Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 178–191

УДК 533.72

В.Д. Гордевський, О.О. Гукалов

Харківський національний університет імені В.Н. Каразина

gordevskyy2006@yandex.ru, gukalex@ukr.net

Бімодальний розподіл з гвинтовими модами для моделі Бріана–Піддака

У роботі отриман явний вигляд бімодального розподілу з максвеловськими модами спеціального типу для моделі шорсткуватих куль. Наведено достатні умови для мінімізації рівномірно-інтегрального відхилення між частинами рівняння Бріана–Піддака.

Explicit form of the bimodal distribution with Maxwellian modes of special type for the model of rough spheres is obtained in the paper. Sufficient conditions to minimization of uniform-integral remainder between the sides of the Bryan–Pidduck equation is done.

1 Вступ

У даній роботі розглядається модель шорсткуватих куль [1], яка вперше була введена у 1894р. Бріаном; методи, що були розвинуті для загальних сферичних молекул, які не обертаються, у 1922р. були розповсюджені на модель Бріана Піддаком. Перевага цієї моделі перед усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Вказані молекули є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими, що означає наступне. При зіткненні двох молекул, точки, які розсіюються, не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертального руху без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену.

Рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих куль(або рівняння Бріана-Піддака) має вигляд [1–4]:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{1}$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q(f, f) \quad \equiv \quad & \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot \\ & \cdot \Big[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут d – діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I наступним співвідношенням:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{4}$$

де b – параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули; t – час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – просторова координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ та $w = (w^1, w^2, w^3) \in R^3$ – лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — градієнт функції f за змінною x; Σ – одинична сфера у просторі R^3; α — одиничний вектор із R^3, що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, які зіштовхуються;

$$B\left(V - V_1, \alpha\right) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \tag{5}$$

— член зіткнення.

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (w^*, w_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражаються через відповідні швидкості до зіткнення наступним чином:

$$\begin{aligned}
V^* &= V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right), \quad (6)\\
V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
\omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},\\
\omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},
\end{aligned}$$

де знак $\times$ позначає векторний добуток.

2 Постановка задачі

Загальний вигляд локальних максвеліанів (тобто точні розв'язки системи $D = Q = 0$) для задачі, що розглядається було знайдено у роботі [5]. Задача взаємодії для деяких максвеліанів була розглянута раніше у роботах [6,7]. У роботі [7] було розглянуто питання о взаємодії течій, що описують "прискорення-ущільнення".

Ця стаття присвячена випадку бімодального розподілу з гвинтовими модами, які мають "прискорення-ущільнення"

Приймаючі до уваги те, що здійснюється пошук явних наближених розв'язків, ми будемо використовувати відхилення, що було запропоновано у [4]:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|. \quad (7)$$

Отже розглянемо бімодальний розподіл:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (8)$$

де функції $\varphi_i = \varphi_i(t,x)$, (тут і надалі індекс i приймає тільки значення 1 та 2), а максвеліани M_i відповідають гвинтовому руху з прискоренням-ущільненням [5]:

$$M_i = \rho_{0i} e^{\beta_i\left(\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i\left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}. \quad (9)$$

Тут ρ_{0i} – довільна додатня константа, а $\overline{V}_i-$ масова швидкість, що має вигляд:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \tag{10}$$

де $\overline{\omega}_i-$ кутова швидкість потоку газу у цілому, $\widehat{V}_i-$ довільний постійний вектор, що позначає лінійну швидкість газу вздовж вісі обертання, $\overline{u}_i-$ довільний вектор, паралельний $\overline{\omega}_i$, а $\beta_i = \frac{1}{2T}-$ обернена температура газу.

Задача полягає у наступному. Знайти такі функції $\varphi_i(t,x)$, щоб бімодальний розподіл (8) забезпечував довільну мализну відхилу (7).

Перш ніж перейти до формулювання основних результатів, зробимо деяке перетворення виразу (9). Спочатку ведемо позначення:

$$\rho_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{11}$$

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i (\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x)}, \tag{12}$$

де

$$r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})\right]^2, \quad x_{0i} = \frac{[\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i]}{\overline{\omega}_i^2}, \tag{13}$$

$x_{0i}-$ точка, через яку проходить вісь обертання течії у момент часу $t=0$.

Тепер використаємо тотожність, що наведена у роботі [8]:

$$\overline{V}_i^2 = \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t\right)^2, \tag{14}$$

дійсність якої випливає із формул (10), (13) та умови коленеарності векторів $\overline{u}_i$ та $\overline{\omega}_i$. Таким чином, використовуючи (14) можна перетворити представлення (12):

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i \beta_i x}. \tag{15}$$

Значить, вираз (9) приймає вигляд:

$$M_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}. \tag{16}$$

З фізичної точки зору вираз (16) означає наступне. Функція M_i описує обертання газу як цілого з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_i$ навколо нерухомої вісі, що проходить через точку x_{0i} (величина r_i^2 є квадрат відстані від точки $x \in R^3$ до цієї вісі), а $\overline{\rho}_i$ задає розподіл густини (до того ж $\overline{u}_i x-$ її найменше значення по усім $r \in [0; +\infty)$ при фіксованому t) вздовж вісі обертання. Також зазначимо, що функції (10), (12) зростають по t и x, при чому (10) лінійна по t, а (12) лінійна по x саме вздовж вісі, що задається вектором $\overline{\omega}_i$ у зв'язку паралельності $\overline{u}_i$ та $\overline{\omega}_i$, що виправдовує термін "прискорення-ущільнення" (вектор $\overline{u}_i-$ грає роль "масового прискорення", а $\overline{V}_i$ масової швидкості вздовж вісі при $t = 0$).

3 Основні результати

Наведемо декілька теорем, що присвячені поставленому питанню.

Теорема 1 *Нехай розподіл f задається формулами (8), (9), (10), а функції $\varphi_i(t,x)$ мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i} \right), \tag{17}$$

де $D_i > 0, s_i \geqslant \frac{1}{2}$ – довільні константи, а $C_i \geqslant 0-$ довільні гладкі фінітні функції або швидкоспадаючі функції вказаних векторних аргументів.

Припустимо, що:

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i}, \quad \overline{u}_i = \overline{u}_{0i} \beta_i^{-n_i}, \tag{18}$$

$$\widehat{V}_i = 0, \tag{19}$$

де $\overline{\omega}_{0i}, \overline{u}_{0i} \in R^3-$ довільні, фіксовані вектори, а на числа m_i, n_i накладаються умови:

$$m_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad n_i \geqslant 1. \tag{20}$$

Тоді існує така величина Δ', що:

$$\Delta \leqslant \Delta', \tag{21}$$

при цьому має місце твердження:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i K_i(s_i) \sup_{x \in R^3} (C_i(x) \mu_i(x)), \tag{22}$$

де

$$K_i(s_i) = 2s_i \sup_{t \in R^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}, \tag{23}$$

та функції $\mu_i(x)$ *наступного вигляду*

$$\begin{array}{ll} 1, & m_i > \frac{1}{2}, n_i > 1; \\ e^{2\overline{u}_{0i}x}, & m_i > \frac{1}{2}, n_i = 1; \\ e^{[\overline{\omega}_{0i} \times x]^2}, & m_i = \frac{1}{2}, n_i > 1; \\ e^{[\overline{\omega}_{0i} \times x]^2 + 2\overline{u}_{0i}x}, & m_i = \frac{1}{2}, n_i = 1. \end{array} \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. Підставляючі розподіл (8) у (2), (3) отримуємо[6]:

$$D(f) = M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \tag{25}$$

$$Q(f,f) = \varphi_1 \varphi_2 \Big[Q\Big(M_1, M_2\Big) + Q\Big(M_2, M_1\Big) \Big]. \tag{26}$$

Інтеграл зіткнень $Q(f,g)$ може бути представлено у наступному вигляді[1,6]:

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g), \tag{27}$$

де $G(f,g)$ називають прибутковим членом інтеграла зіткнень та він має вигляд:

$$\begin{aligned} G(f,g) \quad = \quad & \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\ & \times f(t, x, V_1^*, \omega_1^*) g(t, x, V^*, \omega^*), \end{aligned} \tag{28}$$

а $L(g)-$ витратний член:

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) g(t, x, V_1, \omega_1). \tag{29}$$

Використовуючи доведену у роботі [6] формулу:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q(M_i, M_j) = 0, \tag{30}$$

із (27)—(30) отримуємо, що:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i L(M_j). \tag{31}$$

Оцінемо модуль різниці лівої та правої частин рівняння (1), використовуючи (25)–(29):

$$\Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \leqslant M_1\Big(|D(\varphi_1)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_2)\Big) \tag{32}$$
$$+M_2\Big(|D(\varphi_2)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_1)\Big) + \varphi_1\varphi_2\Big(G(M_1,M_2) + G(M_2,M_1)\Big).$$

Далі зробимо перехід до шестикратного інтегралу по просторам лінійних та кутових швидкостей, отримаємо наступне:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \tag{33}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + 4\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2).$$

Для інтеграла у другому доданку правої частини нерівності (33) використаємо отриману у статті [4] формулу:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \tag{34}$$
$$= \frac{d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Продовжимо оцінку (33), використовуючи формулу(34):

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i$$
$$+ \frac{4 d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|,$$

що, завдяки (2), (9), (11), дає:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \qquad (35)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \\ &\times \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i \right)^2 + I \omega^2 \right)} \\ &+ \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \end{aligned}$$

Права частина оцінки (35) може бути спрощена, якщо врахувати, що:

$$\int_{R^3} d\omega e^{-\beta_i I \omega^2} = \left(\frac{\pi}{\beta_i I} \right)^{3/2},$$

а також зробити заміну змінних у інтегралі, який входить у перший доданок $p = \sqrt{\beta_i}(V - \overline{V}_i)$, тобто:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \qquad (36)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}} \\ &+ \frac{4d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \\ &\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \end{aligned}$$

Далі робимо перехід до супремума у нерівності (36), обґрунтованість можливості якого випливає із припущень цієї теореми:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \tag{37}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$

$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2$$

$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

У зв'язку з умовою теореми (19) замість (10), (12), (13), (15) будемо мати:

$$\overline{V}_i = [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \quad r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times x\right]^2, \tag{38}$$

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i ([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2)}.$$

Тепер, використовуючи вираз (38), вигляд локальних максвеліанів (16), відомі властивості модуля, скалярного добутку, інтегралів и точних верхніх меж, а також нерівність (21) маємо:

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| e^{\beta_i \left([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \tag{39}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dp \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta_i}} + |[\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t| \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \right) \overline{\rho}_i e^{\beta_i [\overline{\omega}_i \times x]^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$

$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2}$$

$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 [\overline{\omega}_1 \times x]^2 + \beta_2 [\overline{\omega}_2 \times x]^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \right\}.$$

Для існування Δ', як випливає з її вигляду (39) достатньо перевірити, що, якщо функції φ_i мають вигляд (17), то добуток функцій

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|, \quad \varphi_i \left| [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t \right|, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \left| [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t \right| \tag{40}$$

на множник (11) з врахуванням умов теореми (19) обмежений по $(t, x) \in R^4$ (збіжність усіх інтегралів очевидна у зв'язку з наявністю виразу

$$\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|$$

та присутністю у інтегралах спадаючих експонент).

Розглянемо перший добуток $\varphi_i \rho_i$, для чого зробимо заміну:

$$y = x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}, \tag{41}$$

після якої вказаний добуток приймає вигляд:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i \left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)}. \tag{42}$$

Таким чином, враховуючі властивості функції C_i, які описані в умовах Теореми 1, добуток (42) обмежений по $y \in R^3$, а обмеженість за часом t випливає із умови показника степеню $s_i \geqslant \frac{1}{2}$. З таких же причин обмежений добуток четвертої із перерахованих функцій (40) на густину ρ_i після запропанованої заміни (41), у зв'язку можливості обмеження зверху наступним виразом:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i \left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)} \left(|[\overline{\omega}_i \times y]| + |t||\overline{u}_i|\right). \tag{43}$$

Аналогічно перевіряється обмеженість добутків густини ρ_i на функції, що залишилися у (40), після знаходження наступних похідних:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i' \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}\right), \tag{44}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{-2ts_i D_i}{(1+t^2)^{s_i+1}} C_i \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}\right) + \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} \left(C_i' \cdot \overline{\omega}_i\right) \frac{t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i \overline{\omega}_i},$$

де $(C_i' \cdot \overline{\omega}_i)$ – скалярний добуток градієнта функції C_i на кутову швидкість $\overline{\omega}_i$.

Отже, враховуючи умови теореми (18), (19) та знайдені похідні функції φ_i (44) величина, яка досліджується, Δ' (39) приймає вигляд:

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i}} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + \beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i}\times y]^2} \right. \tag{45}$$
$$\left. \times \left| \frac{2s_i}{1+t^2} C_i(y) + (C_i'(y)\cdot \overline{\omega}_i) \frac{t\overline{u}_{0i}^2}{\overline{u}_{0i}\overline{\omega}_{0i}} \beta_i^{-n_i} \right| \right\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta}_i} + \left|\beta_i^{-m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times y] - \overline{u}_{0i} t \beta_i^{-n_i}\right| \frac{D_i |C_i'(y)|}{(1+t^2)^{s_i}} \right) \right.$$
$$\left. \times\ \rho_{0i} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + [\overline{\omega}_{0i}\times y]^2 \beta_i^{1-2m_i}} \right\} \frac{e^{-p^2}}{\pi^{3/2}}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{D_1 D_2}{(1+t^2)^{s_1+s_2} C_1(y) C_2(y)} \right.$$
$$\times \exp\left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(\beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i}\times y]^2 + 2y\overline{u}_{0i}\beta_i^{1-n_i} \right) \right\} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} \right.$$
$$\left. \left. + [\overline{\omega}_{01}\times y]\beta_1^{-m_1} - [\overline{\omega}_{02}\times y]\beta_2^{-m_2} + t\left(\overline{u}_{02}\beta_2^{-n_2} - \overline{u}_{01}\beta_1^{-n_1}\right) \right| \right\}.$$

Далі залишається зробити перехід до границі при $\beta_i \to +\infty$ у останній рівності (45). Обґрунтованість можливості такого переходу аргументується властивостями функції C_i, а для переходу під знаком супремуму використаємо наведену у роботі [9] лемму 1, перевірка умов якої легко здійснюється виходячи із умов теореми, що розглядається.

Розглянемо тепер чотири випадку можливих значень m_i и n_i, які припускаються умовою (20).

1) Якщо $m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1:$

$$\lim_{\beta_i\to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \cdot 2s_i \sup_{t\in R^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x\in R^3} C_i(x). \tag{46}$$

2) У випадку $m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i = 1:$

$$\lim_{\beta_i\to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{t\in R^1} \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x\in R^3} \left(C_i(x) e^{2\overline{u}_{0i} x} \right). \tag{47}$$

3) При $m_i = \frac{1}{2}, \quad n_i > 1:$

$$\lim_{\beta_i \to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{t \in R^1} \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x \in R^3} \left(C_i(x) e^{[\overline{\omega}_{0i} \times x]^2} \right). \tag{48}$$

4) та в останьому варіанті $m_i = \frac{1}{2}, \quad n_i = 1:$

$$\lim_{\beta_i \to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,x) \in R^4} \left\{ \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} C_i(x) e^{2\overline{u}_{0i} x + [\overline{\omega}_{0i} \times x]^2} \right\}. \tag{49}$$

Таким чином знайдені границі величини Δ' при різних значеннях показників степеня m_i та n_i (46)$-$(49) підтверджують дійсність твердження теореми (22)$-$(24). Теорема доведена.

Наслідок 1. Нехай виконані усі умови Теореми 1, тоді для будь-якого додатнього числа ε існує таке додатне число δ, що для будь-яких достатньо малих коефіцієнтів D_1, D_2, а β_1, β_2- достатньо великих досягається нескінчена мализну відхилу Δ(7). Тобто:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall D_1, D_2:\ 0 < D_1, D_2 < \delta,\ \beta_1, \beta_2 > \delta,\ \Delta < \varepsilon. \tag{50}$$

Д о в е д е н н я. Виходячи із вигляду границі Δ', яку можна бачити у формулах (22)$-$(24) та нерівності (21), легко бачити, що уся сума, завдяки спеціальному підбору констант D_1, D_2 у правій частині (22) починає дорівнювати нулю, що і доводить твердження (50). Наслідок перевірено.

Сформулюємо ще одну теорему для розподілу (8).

Теорема 2 *Нехай коефіцієнтні функції у бімодальному розподілі (8) наступного вигляду:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \rho_{0i} [\overline{\rho}_i(t,x)]^{-1} e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{51}$$

де r_i^2 и $\overline{\rho}_i(t,x)$ представлені у (12), (13). Нехай при виконанні умов

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1 \tag{52}$$

також залишається вірним припущення (18). Тоді, якщо функції ψ_i у (51) наступні:

$$\psi_i(t,x) = D_i C_i(t) E_i(x), \tag{53}$$

де $C_i(t), E_i(x) \geqslant 0$ – гладкі фінітні або швидкоспадні функції, то твердження (50) залишається у силі.

Д о в е д е н н я. Як і раніше залишається вірною нерівність (37), проте зважаючи на умову (51) необхідно знову обчислити похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} &= \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}\left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i t\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}, \qquad (54)\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} &= \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i\times(x-x_{0i})]\times\overline{\omega}_i]\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}.\end{aligned}$$

Далі, підставимо (54) у оцінку (37) та отримаємо представлення для Δ' :

$$\begin{aligned}&\Delta' \qquad (55)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\cdot\frac{(\overline{\omega}_i,\overline{u}_i)}{\overline{\omega}_i^2}\left(\left(\overline{\omega}_i,\widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i^2 t\right)\right.\\ &\left.+\left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta}_i}\right)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i\times(x-x_{0i})]\times\overline{\omega}_i]\right)\right)\right|e^{-p^2}\\ &+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\\ &\times\sup_{(t,x)\in R^4}\left(\psi_1\psi_2\left|\frac{q}{\sqrt{\beta}_1} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta}_2} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\right).\end{aligned}$$

Скінченість отриманої величини Δ' забезпечується тим, що якщо виконано умову (53), то усі функції (40) (с заміною φ_i на ψ_i) обмежені на R^4.

Зробимо перехід до границі, приймаючі до уваги (18) (можливість переходу аргументується аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні Теореми 1). Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta' &= \sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|e^{-p^2}\\ &+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\left(\psi_1\psi_2\left|\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\right),\end{aligned}$$

що у підсумку дорівнює:

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'\\ &= \sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| + 4\pi d^2\rho_{01}\rho_{02}\left|\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}(\psi_1\psi_2).\end{aligned}$$

Тепер залишається підставити вигляд функції $\psi_i(t,x)$ (53), що дає наступне:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta' = \sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i \sup_{(t,x)\in R^4}\left|E_i(x)C_i'(t)+\widehat{V}_iE_i'(x)C_i(t)\right|$$
$$+4\pi d^2\rho_{01}\rho_{02}\left|\overline{V}_1-\overline{V}_2\right| D_1D_2 \sup_{t\in R^1}(C_1(t)C_2(t)) \sup_{x\in R^3}(E_1(x)E_2(x)).$$

Враховуючі нескінчену мализну величин D_1, D_2 отримуємо твердження теореми. Теорема доведена.

Таким чином, у даній роботі продемонстровано, що для моделі Бріана–Піддака та розглянутого типу максвелівських мод справедливі результати, аналогічні тим, які раніше були отримані у більш простому випадку моделі твердих куль[8].

Література

[1] С. Чепмен, Т. Каулинг. *Математическая теория неоднородных газов.* М.:Мир, 1960.

[2] C. Cercignani, M. Lampis. *On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres.* J. Stat. Phys., (1988), **53**, P. 655–672.

[3] В.Д. Гордевський. *Явні наближені розв'язки рівняння Больцмана для моделі шершавих куль* . Доп. НАН України (2000), **4**, С. 10–13.

[4] V.D. Gordevsky. *Approximate billow solutions of the kinetic Bryan–Pidduck equation* Math. Meth. Appl. Sci., (2000), **23**, P. 1121–1137.

[5] В.Д. Гордевский, А.А. Гукалов. *Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер.* УМЖ, (2011), **63**, №5, С. 629–639.

[6] В.Д. Гордевский, А.А. Гукалов. *Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака.* Вестник ХНУ им. В.Н.Каразина, серия "Математика, прикладная математика и механика (2011), **64**, №.2, С. 27–41.

[7] A.A. Gukalov. *Interaction between "accelerating-packing" flows for the Bryan—Pidduck model.* Журн. матем. физ. анал. геом., (2013), **9**:3, P. 316—331.

[8] В.Д. Гордевский. *Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер.* ТМФ, (2009), **161**:2, С. 278—286.

[9] В.Д. Гордевский. *Двухпотоковое распределение с винтовыми модами.* ТМФ, (2001), **126**:2, С. 283—300.