Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 192–227

УДК 510.22+51-71+517.983

Я.І. Грушка

Інститут Математики НАН України, Київ

grushka@imath.kiev.ua

Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів

Присвячено 80 ^{й} річниці від дня народження академіка Д.Я. Петрини

New results in the theory of changeable sets are obtained. Applications of the theory of changeable sets for construction of mathematically strict models of kinematics, based on generalized Lorentz transforms, is proposed. This kinematics includes the classical kinematics of special relativity theory but, also, permits the superluminal motion of the inertial reference frames.

Отримано нові результати з теорії мінливих множин. Запропоновано застосування теорії мінливих множин для побудови математично строгих моделей кінематики на основі узагальнених перетворень Лоренца. Ця кінематика включає в себе кінематику класичної спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, але, в той же час, дозволяє надсвітловий рух для інерційних систем відліку.

1 Вступ

Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта, залишається відкритою і по сьогодні [1–3]. Окремі напрямки формалізації певних фізичних теорій було запропоновано в роботах [4–9]. Зауважимо, що в зазначених роботах не було сформульовано єдиного абстрактного підходу. Тому математичний апарат цих робіт виглядає штучним і недостатньо гнучким. Взагалі, головною особливістю існуючих математично строгих моделей теоретичної фізики є їхня складність і громіздкість, в той час, як математично строге визначення і формулювання найбільш елементарних (базових) фізичних понять та постулатів, які і привели до появи цих математичних моделей залишається нерозв'язаною задачею. В роботах [10–12] висловлюється думка, що загальне розв'язання цієї задачі в рамках існуючих на даний час математичних теорій — неможливе і ставиться проблема побудови теорії "динамічних множин" — нових абстрактних математичних структур, у рамках яких можна було б строго математично моделювати різноманітні процеси в фізичних, біологічних та інших складних системах. В зв'язку з поставленою проблемою, в роботах [13–17] побудовано теорію *мінливих множин* — сукупностей об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, а також змінювати свої властивості залежно від способу спостереження (тобто, фактично, системи відліку).

Дана робота є продовженням дослідження абстрактних мінливих множин, розпочатого в [13–17]. В роботі запропоноване нове, більш лаконічне, означення для базових мінливих множин, при цьому доведено еквівалентність старого і нового означень. Також запропоновано застосування теорії мінливих множин для побудови математично строгих моделей "тахіонної" кінематики на основі узагальнених перетворень Лоренца. Така кінематика включає в себе кінематику класичної спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, в якості "підкінематики", але, в той же час, дозволяє надсвітловий рух для інерційних систем відліку. Слід підкреслити, що побудована кінематика не задовольняє принцип відносності на надсвітловому діапазоні швидкостей систем відліку.

2 Базові мінливі множини та їх властивості

Теорія мінливих множин базується на математичних об'єктах "нижчого рівня ієрархії" — базових мінливих множинах. Тому, перш, ніж переходити до загального означення мінливої множини, в цьому (вступному) розділі наводяться основні положення робіт [13–15], в яких викладена теорія базових мінливих множин.

2.1 Орієнтовані множини

Найпримітивніша (стартова) абстрактна модель сукупності мінливих об'єктів закладена в наступному означенні.

Означення 2.1. *Нехай, M — довільна непорожня множина ($M \neq \emptyset$).*

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Leftarrow$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \;\; x \Leftarrow x$) будемо називати ***орієнтацією****, а пару $\mathcal{M} = (M, \Leftarrow)$ будемо називати* ***орієнтованою множиною****. При цьому множину M будемо називати* ***базовою****, або множиною всіх* ***елементарних станів*** *орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\Leftarrow$ будемо називати* ***напрямним відношенням змін (трансформацій)*** *$\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним продовженням" елементарного стану x".

Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 2.2. *Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається* ***транзитивною*** *в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає $z \leftarrow x$.*

Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається ***максимально транзитивною*** *в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такої, що $N \subset N_1$ (підкреслимо, що тут знак $\subset$ означає строге включення, тобто $N \neq N_1$).*

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається ***ланцюгом*** *в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається* ***максимальним ланцюгом*** *в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.*

Твердження 2.1. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. Довільна непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, яка містить не більше, двох елементів є транзитивною.

2. Не більш, ніж двохелементна непорожня підмножина $L = \{x, y\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Зокрема довільна одноелементна підмножина $L = \{x\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ завжди є ланцюгом.

Доведення твердження 2.1 зводиться до тривіальної перевірки.

Твердження 2.2 ([14, 15]).

1. *Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.*

2. *Для довільного ланцюга L в $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.*

Зауважимо, що на другий пункт твердження 2.2 можна дивитися, як на узагальнення принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії.

З тверджень 2.2 та 2.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *1. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально-транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ така, що $x, y \in N$.*

2. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, таких, що $y \leftarrow x$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x, y \in L$.

Поклавши $x = y$ (враховуючи, що, за означенням, множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ непорожня) приходимо до висновку, що в довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існують максимально-транзитивні множини і максимальні ланцюги.

2.2 Означення часу. Примітивні мінливі множини

В теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Проте, абстрактна математика може мати справу з об'єктами потужності, більшої за континуум. Тому, в даній абстрактній теорії, ми не будемо обмежуватись дійсночисловими моментами часу. В наступному означенні в якості моментів часу можуть служити елементи довільної лінійно упорядкованої множини. Таке розуміння часу близьке до філософського, уявлення про час, як певний "хронологічний порядок", узгоджений з процесами змін.

Означення 2.3. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина (в сенсі [18, с. 12], [19, с. 87, 212]). Відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається* ***часом*** *на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:*

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати ***моментами часу****, пару*

$$\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

— ***хронологізацією*** *$\mathcal{M}$, а трійку*

$$\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

— ***примітивною мінливою множиною****.*

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину завжди можна хронологізувати. Найпримітивніший спосіб це зробити — взяти лінійно-упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів, і покласти $\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbf{T}$. Більш нетривіальні способи хронологізації розглянуті в роботах [14, 15]. Зокрема, в [14, 15] доведено теореми про існування часу та існування і єдиність внутрішнього ("найбільш природного") часу для орієнтованих множин із заданою синхронізацією.

Зауваження 2.1. Надалі примітивні мінливі множини будемо позначати каліграфічними великими буквами.

Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi)$ — примітивна мінлива множина. Де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ — лінійно упорядкована множина. Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}); \quad \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; \quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T};$$
$$\leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \leq_{\mathcal{P}}) = (\mathbf{T}, \trianglelefteq); \quad \psi_{\mathcal{P}} := \phi.$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ для позначення оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого нестрогим порядком $\leq_{\mathcal{P}}$. Множину $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *базовою множиною*, або множиною *всіх елементарних станів* примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *елементарними станами* $\mathcal{P}$, а відношення $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ будемо називати *напрямним відношенням змін* $\mathcal{P}$. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ будемо називати *множиною моментів часу* $\mathcal{P}$. Відношення $\leq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$\geq_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ будемо називати відповідно відношеннями нестрогого, строго, нестрогого оберненого і строгого оберненого *часового порядку* на $\mathcal{P}$. Відображення $\psi_{\mathcal{P}} : \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) :\mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})}$ будемо називати часом на $\mathcal{P}$. У випадку, коли зрозуміло, про яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$, $\leq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$, $\psi_{\mathcal{P}}$ символ $\mathcal{P}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

2.3 База елементарних процесів та базові мінливі множини

Означення 2.4. *Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t,x) $(x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}),\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}))$ будемо називати* ***елементарно-часовим станом****, якщо $x \in \psi(t)$.*

Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ будемо позначати через $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$:

$$\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) := \{\omega \mid \omega = (t,x)\,,\ \textit{де}\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}),\ x \in \psi(t)\}\,.$$

Для елементарно-часового стану $\omega = (t,x) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ введемо позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t. \tag{1}$$

Зауваження 2.2. З означень 2.1 та 2.3 випливає, що $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ (для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$), при цьому:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})\} \tag{2}$$

$$\psi_{\mathcal{P}}(t) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P}),\ \mathsf{tm}\,(\omega) = t\}\,,\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \tag{3}$$

Зокрема, $\psi_{\mathcal{P}}(t) = \emptyset$ для випадку, коли не існує $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ такого, що $\mathsf{tm}\,(\omega) = t$.

Означення 2.5. *Будемо вважати, що елементарно-часовий стан $\omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$* ***формально послідовний*** *елементарно-часовому стану $\omega_1 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, вживаючи позначення:*

$$\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\,\omega_1,$$

якщо $\omega_1 = \omega_2$ або $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) <_{\mathcal{P}} \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

Коли це не викликає непорозумінь замість позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})\,\omega_1$ будемо використовувати позначення $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\,\omega_1$

Легко бачити, що для довільної примітивної $\mathcal{P}$ пара $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}), \leftarrow(\mathrm{f}))$ є орієнтованою множиною, в якій відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ є напрямним відношенням змін. Відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ показує всі "потенційно можливі" трансформації елементарно-часових станів, які можна "вписати" в примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$. Проте, як показано в [17, приклад 2.1], [15, example 7.1] це відношення може генерувати деякі паразитичні "трансформації" елементарно-часових станів, яких реально ніколи не було у модельованій фізичній системі. Для того, щоб адекватно описувати модельовані процеси, в роботах [17, приклад 2.1], [15, example 7.1] пропонується задавати деяке під-відношення відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$, яке відображало б лише ті трансформації елементарно-часових станів, які реально мають місце в модельованій частині дійсності.

Сказане вище служить мотивацією для наступного означення.

Означення 2.6. *Нехай, $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина.*
1. *Відношення $\leftarrowtriangle$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо називати **базою елементарних процесів** в $\mathcal{P}$, якщо:*

(1) $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})\ \ \omega \leftarrowtriangle \omega$.

(2) *Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ і $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$, то $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\,\omega_1$ (тобто $\leftarrowtriangle\ \subseteq\ \leftarrow(\mathrm{f})$).*

(3) *Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$.*

2. *Якщо $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина і $\leftarrowtriangle$ — база елементарних процесів на $\mathcal{P}$, то пару:*

$$\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \leftarrowtriangle)$$

*будемо називати **базовою мінливою множиною**.*

Зауваження 2.3. Надалі базові мінливі множини будемо позначати великими каліграфічними буквами.

Нехай, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \leftarrowtriangle)$ — базова мінлива множина. Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P});\ \ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P});\ \ \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow};\ \ \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f}) := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f});$$

$$\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) := \mathbf{Tm}(\mathcal{P});\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P});$$

$$\leq_{\mathcal{B}}:=\leq_{\mathcal{P}};\ \ <_{\mathcal{B}}:=<_{\mathcal{P}};\ \ \geq_{\mathcal{B}}:=\geq_{\mathcal{P}};\ \ >_{\mathcal{B}}:=>_{\mathcal{P}};\ \ \psi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{P}}.$$

Також, для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ для констатації того факту, що $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$. При цьому, у випадку, коли необхідно чітко відрізняти напрямне відношення змін від бази елементарних процесів, замість позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$, будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} \omega_1$, для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ та $x_2 \underset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} x_1$, для елементарних станів $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Коли відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова, в позначеннях $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$, $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$, $\geq_{\mathcal{B}}$, $>_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}}$ символ $\mathcal{B}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leftarrow(\mathrm{f})$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

З означень 2.6, 2.4 та рівності (2) випливають наступні ***властивості базових мінливих множин*** (у властивостях 1-5 символ $\mathcal{B}$ позначає довільну базову мінливу множину).

Властивості 2.1.

1. *Пара* $\mathcal{B}_0 = \left(\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \underset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}\right)$ *є орієнтованою множиною, а відображення* $\psi = \psi_{\mathcal{B}}$ *є часом на* $\mathcal{B}_0$*.*

2. *Якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$*, то* $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\, \omega_1$*, а отже,* $\mathsf{bs}(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}(\omega_1)$ *і* $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$*. Якщо, додатково,* $\omega_1 \neq \omega_2$*, то* $\mathsf{tm}(\omega_1) < \mathsf{tm}(\omega_2)$*.*

3. *Для довільних* $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *умова* $x_2 \leftarrow x_1$ *має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\mathsf{bs}(\omega_1) = x_1$*,* $\mathsf{bs}(\omega_2) = x_2$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$*.*

4. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$*.*

В майбутньому означення 2.6 безпосередньо застосовуватись не буде а замість нього будуть використовуватись властивості 2.1.

Приклад 2.1. Легко перевірити, що для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$ відношення $\leftarrow(\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{P}$. Отже, довільну примітивну мінливу множину завжди можна ототожнити з базовою мінливою множиною $\mathcal{P}_{(f)} = (\mathcal{P}, \leftarrow(\mathrm{f}))$, у якій $\leftarrow(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів.

Більш цікавими прикладами базових мінливих множин є базові мінливі множини, породжені системами абстрактних траєкторій.

Означення 2.7. *Нехай M — довільна множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна непорожня ($\mathbf{T} \neq \emptyset$) лінійно упорядкована множина.*

1. *Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ ($\mathfrak{D}(r) \neq \emptyset$) будемо називати **абстрактною траєкторією** з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення траєкторії r).*

2. ***Системою абстрактних траєкторій** з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що*

$$\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$$

(де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 2.1 ([15,17]). *Для довільної системи абстрактних $\mathcal{R}$ траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1) $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathbb{T}$;

2) $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r$, *де довільну абстрактну траєкторію $r \in \mathcal{R}$ слід розуміти як множину (тобто $r = \{(t, r(t)) \mid t \in \mathfrak{D}(r)\}$);*

3) *Для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}))$ умова $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$ і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r$.*

Зауваження 2.4. Надалі, коли лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}$ є наперед відомою, замість позначення $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ будемо використовувати позначення $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$.

Нехай T, X — довільні множини. Надалі позначення (1) будемо застосовувати для довільного елемента $\omega = (t, x) \in T \times X$ (де символ $\times$ означає декартовий добуток множин). Отже, для довільного $\omega \in T \times X$ маємо, $\omega = (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega))$. Зауважимо, що позначення

(1) раніше використовувались лише для елементарно-часових станів $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ примітивної або базової мінливої множини $\mathcal{P}$ (див. підрозділ 2.3).

Наступна теорема демонструє інший, більш лаконічний, хоча й більш штучний, шлях для визначення поняття базової мінливої множини.

Теорема 2.2. ***Нехай***, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— довільна лінійно упорядкована множина,* $\mathfrak{X}$ *— довільна множина і* $\Lsh$ *— бінарне відношення, визначене на множині* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$*, яке задовольняє такі умови:*

1. *Відношення* $\Lsh$ *рефлексивне на* $\mathbf{B}$*;*
2. *Для довільних* $\omega, \omega_2 \in \mathbf{B}$ *з умов* $\omega_2 \Lsh \omega_1$ *і* $\omega_1 \neq \omega_2$ *випливає, що* $\mathsf{tm}(\omega_1) < \mathsf{tm}(\omega_2)$*.*

Тоді існує єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$*, що задовольняє такі умови:*

$$\textbf{а)}\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T};\quad \textbf{б)}\ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B};\quad \textbf{в)}\ \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \Lsh .$$

Доведення. **1.** Позначимо:

$$\begin{aligned} & r_{\omega_1,\omega_2} := \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ & \mathcal{R} := \{r_{\omega_1,\omega_2} \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B},\ \omega_2 \Lsh \omega_1\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Доведемо, що всі елементи множини $\mathcal{R}$ є абстрактними траєкторіями з $\mathbb{T}$ в $\mathfrak{X}$. Зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B}$ такі, що $\omega_2 \Lsh \omega_1$. Оскільки $r_{\omega_1,\omega_2} = \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$, то r_{ω_1,ω_2} є бінарним відношенням з $\mathbf{T}$ в $\mathfrak{X}$. Доведемо, що це відношення є функцією. Припустимо супротивне. Тоді існують $(t, x_1), (t, x_2) \in r_{\omega_1,\omega_2}$ такі, що $x_1 \neq x_2$ (а отже $(t, x_1) \neq (t, x_2)$). Тому, можливими є лише наступні два випадки: $(t, x_1) = \omega_1$, $(t, x_2) = \omega_2$ або $(t, x_1) = \omega_2$, $(t, x_2) = \omega_1$. Але, оскільки $\omega_2 \Lsh \omega_1$, за умовою 2 даної теореми, в обох випадках отримуємо хибну нерівність $t < t$. Тому, відношення r_{ω_1,ω_2} є функцією, а отже, і абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}$ в $\mathfrak{X}$. Тобто, $\mathcal{R}$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) \subseteq \mathfrak{X}$. Позначимо:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}).$$

а) За теоремою 2.1 (пункт 1), $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$.

б) За теоремою 2.1 (пункт 2):

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r = \bigcup_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ \omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1}} \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B}. \tag{5}$$

З іншого боку, беручи до уваги, що, за умовою 1 даної теореми, відношення $\leftarrowtriangle$ є рефлексивним, отримуємо обернене включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ \omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1}} \{\omega_1, \omega_2\} \supseteq \bigcup_{\omega \in \mathbf{B}} \{\omega\} = \mathbf{B}. \tag{6}$$

Таким чином, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$. Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б) висновку даної теореми.

в) Доведемо, що умова в) для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ також виконується. Необхідно довести, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ умова $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$ еквівалентна умові $\omega_2 \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} \omega_1$ (тобто умові $\omega_2 \leftarrow \omega_1$). Оскільки обидва відношення $\leftarrowtriangle$ та $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}$ є рефлексивними на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$, досить довести останнє твердження лише для випадку $\omega_1 \neq \omega_2$. Отже, зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\omega_1 \neq \omega_2$.

в.1) Припустимо, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. тоді, за теоремою 2.1 (пункт 3),

$$\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2) \tag{7}$$

і існує траєкторія $r_{w_1,w_2} \in \mathcal{R}$ $(w_2 \leftarrowtriangle w_1)$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r_{w_1,w_2} = \{w_1, w_2\}$. Отже, оскільки $w_2 \leftarrowtriangle w_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$, повинна виконуватись хоч одна з умов:

$$\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1 \quad \text{або} \quad \omega_1 \leftarrowtriangle \omega_2$$

Проте, випадок $\omega_1 \leftarrowtriangle \omega_2$ є неможливим, оскільки в цьому випадку, за умовою 2 даної теореми отримуємо нерівність $\mathsf{tm}\,(\omega_2) < \mathsf{tm}\,(\omega_1)$, яка суперечить нерівності (7). Отже, $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$.

в.2) Навпаки, припустимо, що $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$. Тоді, згідно (4), $r_{\omega_1,\omega_2} \in \mathcal{R}$. Отже, за умовою 2 даної теореми $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Тому, за теоремою 2.1 (пункт 3) $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

Рівність $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \leftarrowtriangle$ доведена. Таким чином, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б),в).

Необхідно довести, що існує лише єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$, яка задовольняє умови а),б),в). Припустимо, що базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ також задовольняє умови а),б),в). Доведемо, що тоді $\mathcal{B}_1$ мусить задовольняти умови 1),2),3) теореми 2.1 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$, визначеної в (4).

2.1) За умовою а), $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}$.

2.2) Використовуючи умову б) і застосовуючи рівності (5),(6) для $\mathcal{B}_1$, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r.$$

2.3) Оскільки обидві базові мінливі множини $\mathcal{B}$ та $\mathcal{B}_1$ задовольняють умову в), то:

$$\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)}{\leftarrow} = \leftarrowtriangle = \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))}{\leftarrow}.$$

Це означає, що $\mathcal{B}_1$ задовольняє умову 3) теореми 2.1.

Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ задовольняє всі умови теореми 2.1 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$. Тому, за теоремою 2.1, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. □

Зауваження 2.5. З властивостей 2.1 і рівності (3) випливає, що для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, що задовольняє умови а),б),в) теореми 2.2 виконуються наступні твердження:

1. $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbf{B}\}$;
2. $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbf{B},\ \mathsf{tm}\,(\omega) = t\}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Зокрема, $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \emptyset$ для випадку, коли не існує $\omega \in \mathbf{B}$ такого, що $\mathsf{tm}\,(\omega) = t$.

Зауваження 2.6. Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Позначимо:

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); \quad \mathfrak{X} := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); \quad \mathbf{B} := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \quad \leftarrowtriangle := \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}.$$

Очевидно, що умови 1,2 теореми 2.2 для $\mathbb{T}, \mathfrak{X}, \mathbf{B}$ і $\leftarrowtriangle$ виконуються. Крім того, $\mathcal{B}$ є (єдиною) базовою мінливою множиною, що задовольняє умови а),б),в) висновку цієї теореми. Тому, використовуючи теорему 2.2 можна дати інше означення для поняття базової мінливої множини. А саме, базову мінливу множину можна визначити, як математичну структуру, що складається з лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, множини $\mathfrak{X}$, підмножини $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$, і бінарного відношення $\Leftarrow$, визначеного на $\mathbf{B}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 2.2.

2.4 Лінії долі та елементарні процеси базових мінливих множин

Твердження 2.3 ([15,17]). *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ пара $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}\right) = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є орієнтованою множиною. При цьому відображення $\tilde{\psi}_{\mathcal{B}}(t) := \{\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid \mathsf{tm}\,(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ є часом на $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$.*

Означення 2.8. *Нехай $\mathcal{B}$ базова мінлива множина.*

1) Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ елементарно-часових станів $\mathcal{B}$ будемо називати ***лінією долі*** *$\mathcal{B}$. Множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$:*

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{L} \text{ є лінією долі } \mathcal{B}\}.$$

2) Будь-яку лінію долі $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, що містить елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати ***власною*** *лінією долі елементарно-часового стану ω (в $\mathcal{B}$).*

Зрозуміло, що в загальному випадку елементарно-часові стани можуть мати не одну власну лінію долі.

Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ ***об'єднані долею***, якщо існує хоч одна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, яка є власною лінією долі кожного із станів ω_1, ω_2 одночасно.

Твердження 2.4 ([15,17]). *1) Довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ має хоч одну власну лінію долі.*

2) Для того, щоб елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ були об'єднані долею необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов: $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.

Згідно з теоремою 2.1, довільна система абстрактних траєкторій, визначена на деякій лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, породжує базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$. Виявляється, що, навпаки, довільна базова мінлива множина $\mathcal{B}$ може бути породжена деякою системою максимальних траєкторій.

Теорема 2.3 ([15, 17]). *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ множина $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. При цьому:*

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}.$$

Зауваження 2.7. Підкреслимо, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є підмножиною множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому $\mathcal{L}$ є бінарним відношенням з множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ в множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, теорема 2.3, зокрема стверджує, що це відношення є функцією, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Означення 2.9. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. *Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати* ***мінливою системою*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*
2. *Довільне відображення $s : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) :\mapsto 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ будемо називати* ***процесом*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

Нехай, $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільна мінлива система довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in S\}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}). \tag{8}$$

Легко бачити, що $S^{\sim}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Отже, за означенням 2.9, $S^{\sim}$ є процесом на базовій мінливій множині $\mathcal{B}$.

Означення 2.10. *Процес $S^{\sim}$ будемо називати* ***процесом трансформацій*** *мінливої системи S.*

Твердження 2.5 ([15, 17]). *Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. Для довільних мінливих систем $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ рівність $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $S_1 = S_2$.

2. Для довільного процесу s базової мінливої множини $\mathcal{B}$ існує, причому єдина, мінлива система $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ така, що $s = S^{\sim}$.

Отже, відображення $(\cdot)^{\sim}$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між мінливими системами і процесами базової мінливої множини. Враховуючи зазначений факт, надалі поняття мінливої системи і процесу довільної базової мінливої множини будемо “ототожнювати”, а говорячи про процеси на базових мінливих множинах будемо позначати ці процеси великими буквами з хвилькою у верхньому індексі, маючи на увазі, що довільний процес є процесом трансформацій певної мінливої системи.

В механіці елементарні стани можна інтерпретувати, як положення матеріальних точок в різні моменти часу. Саме тому, на поняття мінливої системи можна дивитись, як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним і може змінюватись довільним чином в процесі трансформацій цього тіла.

Будемо говорити, що мінлива система $U \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є ***підсистемою*** *мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, якщо $U \subseteq S$.*

Твердження 2.6 ([15, 17])**.** *Мінлива система $U \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ є підсистемою мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ тоді і тільки тоді, коли $\forall\, t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})\;\; U^{\sim}(t) \subseteq S^{\sim}(t)$.*

Будемо говорити, що елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ ***належить*** *до мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, якщо $x \in S^{\sim}(t)$.* Той факт, що елементарний стан x базової мінливої множини $\mathcal{B}$ належить до мінливої системи S в момент часу t будемо позначати наступним чином:

$$x \in [t, \mathcal{B}]\; S,$$

а, у випадку, коли зрозуміло про яку базову мінливу множину йде мова, будемо використовувати позначення:

$$x \in [t]\; S.$$

З твердження 2.6 випливає, що для мінливих систем $U, S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ співвідношення $U \subseteq S$ має місце тоді і тільки тоді, коли для довільних $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ і $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ з умови $x \in [t]\; U$ випливає співвідношення $x \in [t]\; S$.

Останнє зауваження говорить про те, що на мінливу систему довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ можна дивитись як на аналог поняття підмножини в класичній теорії множин, а на відношення $\in [\cdot]$ як на аналог відношення належності класичної теорії множин. Проте, з іншої сторони, ні елементарні ні елементарно-часові стани не можуть повністю претендувати на аналог поняття елемента в класичній теорії множин, оскільки знаючи всі елементарні чи елементарно-часові стани базової мінливої множини ми не зможемо відновити ні напрямне відношення змін ні базу елементарних процесів, а отже не зможемо повністю відновити базову мінливу множину за її “елементами”.

Очевидно, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є її мінливою системою.

Означення 2.11. *Процес $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати* ***елементарним процесом*** *$\mathcal{B}$.*

На елементарний процес вже можна дивитись, як на повний аналог елемента звичайної (статичної) множини, оскільки з елементарних процесів, користуючись теоремою 2.3, можна відновити всю базову мінливу множину.

3 Загальні мінливі множини та їхні властивості

3.1 Загальне означення мінливої множини

Базові мінливі множини можна розглядати як абстракцію моделей фізичних та ін. процесів (на рівні макросвіту), коли спостереження за процесом проводиться з одного, фіксованого пункту спостереження (однієї фіксованої системи відліку). Проте, реальний фізичний світ є багатоликим, оскільки у фізиці (зокрема у спеціальній теорії відносності) “картина світу” може істотно змінюватись в залежності від зміни системи відліку. Тобто, в результаті, ми отримуємо не одну, а багато “базових мінливих множин” (пов’язаних з кожною системою відліку в межах даної фізичної моделі). Кожну з цих “базових мінливих множин” можна вважати окремим ликом (областю сприймання) реального світу. При цьому припускається, що між різними областями сприймання існує природна уніфікація фізичних об’єктів і процесів, тобто існує якесь “правило”, котре визначає яким чином об’єкт з однієї області сприймання “слід бачити” в іншій області сприймання. Тобто ми ототожнюємо певний об’єкт або процес із іншим об’єктом або процесом іншої області сприймання, кажучи, що це той самий об’єкт або процес, але “видимий” в іншій області сприймання. В класичній механіці така “уніфікація сприймання” задається з допомогою групи перетворень Галілея, в спеціальній теорії відносності — з допомогою групи перетворень Лорнца-Пуанкаре. Слід зазначити, що в обох випадках уніфікація сприймання проводиться на рівні елементарно-часових станів (з допомогою взаємно-однозначних відображень, заданих на 4-вимірному просторі часу). Отже, припускається, що довільний елементарно-часовий стан, “видимий” з однієї області сприймання (системи відліку) є завжди “видимим” з іншої області сприймання. На нашу думку, таке припущення є певною фізичною ідеалізацією, і для абстрактної теорії мінливих множин добре було б відмовитись від обов’язкової “наскрізної” видимості. Саме тому в означенні нижче уніфікація сприймання проводиться не на рівні елементарно-часових станів, а на рівні “об’єктів і процесів”. Нагадаємо, що в теорії базових мінливих множин абстрактними аналогами фізичних об’єктів або процесів є мінливі системи, тобто підмножини множини $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ всіх елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 3.1. *Нехай* $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *індексована сім’я базових мінливих множин, де* $\mathcal{A}$ *— деяка множина індексів. Система відображень* $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *виду:*

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} : 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)} \longmapsto 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\beta)} \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

називається ***уніфікацією сприймання*** *на* $\overleftarrow{\mathcal{B}}$*, якщо:*

1. $\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A \equiv A$ *для довільних* $\alpha \in \mathcal{A}$ *і* $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$.
   (Тут і надалі де через $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A$ буде позначатись дія відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ на множину $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$, тобто $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \mathfrak{U}_{\beta\alpha}(A)$.)

2. *Будь-яке відображення* $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ *є монотонним відображенням множин, тобто для довільних* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *і* $A, B \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$ *з умови* $A \subseteq B$ *випливає, що* $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$.

3. *Для довільних* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ *і* $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$ *має місце включення:*
$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A. \qquad (9)$$

При цьому відображення $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *будемо називати* ***відображеннями уніфікації****, а трійку виду:*

$$\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

будемо називати ***мінливою множиною***.

Перша умова означення 3.1 є цілком очевидною. Друга умова продиктована природнім прагненням "бачити" підсистему даної мінливої системи в одній області сприймання підсистемою "цієї ж" мінливої системі в іншій області сприймання. У випадку класичної механіки або спеціальної теорії відносності замість співвідношення (9) у третій умові означення 3.1 варто було б записати рівність:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) \tag{10}$$

Заміна в (9) знаку рівності на включення зумовлена можливістю "спотворення зображення" при переході до іншої області сприймання, коли не всі елементарно-часові стани довільної мінливої системи даної області сприймання є "видимими" з іншої області сприймання. Остання думка більш детально пояснена в роботах [15, 16] (див., також, приклад 3.4).

3.2 Зауваження про термінологію і позначення

Нехай $\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ — мінлива множина, де $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ індексована сім'я базових мінливих множин і $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ — уніфікація сприймання на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$. Надалі будемо вживати наступні терміни і позначення:

1) Множину $\mathcal{A}$ будемо називати ***множиною індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$ і будемо позначати її через $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$.

2) Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ пару $(\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ будемо називати ***областю сприймання*** *або* ***системою відліку*** $\mathcal{Z}$.

3) Множину всіх областей сприймання (систем відліку) мінливої множини $\mathcal{Z}$ будемо позначати через $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$:

$$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) := \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})\}\,.$$

Області сприймання мінливих множин будемо, як правило, позначати малими латинськими буквами (l, m, k, p та ін).

4) Нехай $l = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Введемо наступні позначення:

$$\mathtt{ind}\,(l) := \alpha; \quad l^{\hat{}} := \mathcal{B}_\alpha.$$

Отже, для довільної області сприймання $l \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ математичний об'єкт $l^{\wedge}$ є базовою мінливою множиною.

Надалі, коли це не викликає непорозумінь, для довільної області сприймання $l \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ в позначеннях $\mathfrak{Bs}(l^{\wedge})$, $\mathbb{Bs}(l^{\wedge})$, $\mathbf{Tm}(l^{\wedge})$, $\mathbb{Tm}(l^{\wedge})$ $\leq_{l^{\wedge}}$, $<_{l^{\wedge}}$, $\geq_{l^{\wedge}}$, $>_{l^{\wedge}}$, $\psi_{l^{\wedge}}$, $\underset{l^{\wedge}}{\leftarrow}$, $\mathbb{L}d(l^{\wedge})$ символ "$\,^{\wedge}$" будемо опускати, використовуючи замість них позначення:

$$\mathfrak{Bs}(l),\ \mathbb{Bs}(l),\ \mathbf{Tm}(l),\ \mathbb{Tm}(l),\ \leq_l,\ <_l,\ \geq_l,\ >_l,\ \psi_l,\ \underset{l}{\leftarrow},\ \mathbb{L}d(l).$$

5) Для довільних областей сприймання $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(m),\mathtt{ind}(l)}$ будемо позначати через $\langle m \leftarrow l, \mathcal{Z}\rangle$, тобто:

$$\langle m \leftarrow l, \mathcal{Z}\rangle = \mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(m),\mathtt{ind}(l)}.$$

Якщо відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, символ $\mathcal{Z}$ у зазначеному вище позначенні будемо опускати, вживаючи замість нього позначення, $\langle m \leftarrow l\rangle$. Крім того, коли це не викликає непорозумінь, в позначеннях $\leq_l$, $<_l$, $\geq_l$, $>_l$, $\underset{l}{\leftarrow}$ символ l також будемо опускати, застосовуючи замість них позначення $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $\leftarrow$ відповідно.

3.3 Елементарні властивості мінливих множин

Використовуючи означення 3.1, а також позначення, введені у підрозділі 3.2, можна сформулювати наступні **базові властивості мінливих множин**:

Властивості 3.1. *У властивостях 1-5, $\mathcal{Z}$ є довільною мінливою множиною і $l, m, p \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання $\mathcal{Z}$.*

1. $l = (\mathtt{ind}(l), l^{\wedge})$;
2. $l^{\wedge} = \left(\left(\left(\mathfrak{Bs}(l), \underset{l}{\leftarrow}\right), (\mathbf{Tm}(l), \leq_l), \psi_l\right), \underset{\mathbb{Bs}(l)}{\leftarrow}\right)$ *є базовою мінливою множиною.*
3. $\langle l \leftarrow l\rangle A = A$, $A \subseteq \mathbb{Bs}(l)$;
4. *Якщо* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{Bs}(l)$, *то* $\langle m \leftarrow l\rangle A \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle B$;
5. $\langle p \leftarrow m\rangle \langle m \leftarrow l\rangle A \subseteq \langle p \leftarrow l\rangle A$, $(\forall A \subseteq \mathbb{Bs}(l))$.

В майбутньому означення 3.1 безпосередньо застосовуватись не буде а замість нього будуть використовуватись властивості 3.1. Наступні два твердження є безпосередніми наслідками властивостей 3.1. В цих твердженнях символ $\mathcal{Z}$ означає довільну мінливу множину.

Твердження 3.1. *Для довільних $l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ справедлива наступна рівність:*

$$\langle m \leftarrow l \rangle\, \emptyset = \emptyset.$$

Доведення. Позначимо $B := \langle m \leftarrow l \rangle\, \emptyset \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(m)$. Використовуючи властивості 3.1 (5 та 3) отримуємо:

$$\langle l \leftarrow m \rangle\, B = \langle l \leftarrow m \rangle\, \langle m \leftarrow l \rangle\, \emptyset \subseteq \langle l \leftarrow l \rangle\, \emptyset = \emptyset.$$

Отже, $\langle l \leftarrow m \rangle\, B = \emptyset$. Оскільки $\emptyset \subseteq B$, та, за властивістю 3.1(4),

$$\langle l \leftarrow m \rangle\, \emptyset \subseteq \langle l \leftarrow m \rangle\, B = \emptyset,$$

тобто $\langle l \leftarrow m \rangle\, \emptyset = \emptyset$. Отже, згідно з властивостями 3.1 (3 та 5), отримуємо:

$$\emptyset = \langle m \leftarrow m \rangle\, \emptyset \supseteq \langle m \leftarrow l \rangle\, \langle l \leftarrow m \rangle\, \emptyset = \langle m \leftarrow l \rangle\, \emptyset = B.$$

□

Твердження 3.2. *Для довільних $l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і довільної сім'ї мінливих систем $(A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A})$ $(A_\alpha \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l),\ \alpha \in \mathcal{A})$ справедливі наступні включення:*

1) $\langle m \leftarrow l \rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle\, A_\alpha$;

2) $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \supseteq \langle l \leftarrow m \rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle\, A_\alpha \right)$;

3) $\langle m \leftarrow l \rangle \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \supseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle\, A_\alpha$.

Підкреслимо, що множина індексів $\mathcal{A}$ в даному твердженні є довільною, і, взагалі кажучи, не співпадає з множиною індексів у означенні 3.1.

Доведення. 1) Покладемо $A := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A \subseteq A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ і використовуючи властивість 3.1(4), отримуємо:

$$\langle m \leftarrow l \rangle\, A \subseteq \langle m \leftarrow l \rangle\, A_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Отже, $\langle m \leftarrow l\rangle\, A \subseteq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha$.

2) Позначимо: $Q := \bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha$. Тоді $Q \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Звідси, за властивостями 3.1(4,5 і 3) отримуємо:

$$\langle l \leftarrow m\rangle\, Q \subseteq \langle l \leftarrow m\rangle\, \langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha \subseteq \langle l \leftarrow l\rangle\, A_\alpha = A_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Отже, $\langle l \leftarrow m\rangle\, Q \subseteq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$, що й необхідно було довести.

3) Покладемо: $A := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A_\alpha \subseteq A$, $\alpha \in \mathcal{A}$ і використовуючи властивість 3.1(4), отримуємо:

$$\langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle\, A, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Тому, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\, A_\alpha \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle\, A$. □

3.4 Приклади мінливих множин

Приклад 3.1. Нехай індексована сім'я базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ є такою, що множини елементарно-часових станів $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta)$ є рівнопотужними для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, тобто $\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) = \mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta))$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ (де $\mathbf{card}(M)$ означає потужність множини M). Розглянемо довільну індексовану сім'ю бієкцій (взаємно-однозначних відображень) $\overleftarrow{W} = (W_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ виду $W_{\beta\alpha} : \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \leftrightarrow \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta)$, що задовольняє наступні умови:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\alpha}(\omega) &= \omega, & \alpha \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,; \\ W_{\gamma\beta}\,(W_{\beta\alpha}(\omega)) &= W_{\gamma\alpha}(\omega), & \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := W_{\beta\alpha}(A) = \{W_{\beta\alpha}(\omega) \mid \omega \in A\}\,, \quad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,.$$

Неважко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє умови означення 3.1, причому третю умову цього означення можна замінити на більш сильну умову (10). Отже, трійка:

$$\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною. Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ будемо називати ***повністю видимою*** мінливою множиною, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ та системою відображень $\overleftarrow{W}$.

Зауваження 3.1. Сім'ю бієкцій, що задовольняє умови (11), легко побудувати наступним чином. Оскільки $\mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right) = \mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)\right), \quad \alpha,\beta \in \mathcal{A}$, то існує множина $\mathbf{B}_0$, яка є рівнопотужною до всіх множин сім'ї $(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (оскільки $\mathcal{A} \neq \emptyset$, можна вибрати, для прикладу, довільний (фіксований) індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ і покласти $\mathbf{B}_0 := \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}\right)$). Також візьмемо довільну сім'ю бієкцій $\overleftarrow{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ виду $\mathcal{W}_\alpha : \mathbf{B}_0 \leftrightarrow \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ (така сім'я обов'язково існує, оскільки $\mathbf{card}\left(\mathbf{B}_0\right) = \mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right), \quad \alpha \in \mathcal{A}$). Покладемо:

$$W_{\beta\alpha}(\omega) := \mathcal{W}_\beta\left(\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}(\omega)\right), \qquad \alpha,\beta \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

де $\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}$ — бієкція, обернена до $\mathcal{W}_\alpha$. Легко перевірити, що сім'я бієкцій $(W_{\beta\alpha} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{A})$ задовольняє умови (11).

Для побудови наступного прикладу потрібно ввести поняття образу базової мінливої множини при відображенні множини її елементарно-часових станів.

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, і X — довільна множина. Розглянемо довільне відображення $U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{T} \times X$. Відображення такого типу будемо називати ***трансформуючим*** для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X.

Теорема 3.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — будь-яка базова мінлива множина і U — трансформуюче відображення для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X. Тоді існує, причому єдина базова мінлива множина $U[\mathcal{B}]$, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(U[\mathcal{B}]) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$;
2. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(U[\mathcal{B}]\right) = \mathbb{T}$;
3. *Якщо* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(U[\mathcal{B}])$ *і* $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right)$, *то* w_1 *і* w_2 *об'єднані долею в* $U[\mathcal{B}]$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\mathrm{w}_1 = U\left(\omega_1\right)$, $\mathrm{w}_2 = U\left(\omega_2\right)$.

Доведення. **Доведення існування**.

1. Нехай $U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{T} \times X$ — трансформуюче відображення для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$). На множині $U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\} \subseteq \mathbf{T} \times X$ визначимо бінарне відношення $\Lleftarrow$, а саме для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ будемо вважати, що $\mathrm{w}_2 \Lleftarrow \mathrm{w}_1$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з наступних умов:

U[B]1) $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$;

U[B]2) $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) < \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_i = U(\omega_i)$ $(i = 1, 2)$.

З умов U[B]1), U[B]2) випливає, що відношення $\Leftarrow$ задовольняє умови 1,2 теореми 2.2. Отже, за теоремою 2.2, існує (і тільки одна) базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$, яка задовольняє такі умови:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}; \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})); \quad \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)}{\leftarrow} = \Leftarrow. \tag{12}$$

Покладемо:

$$U[\mathcal{B}] := \mathcal{B}_1.$$

З перших двох умов (12) випливає, що базова мінлива множина $U[\mathcal{B}]$ задовольняє умови 1,2 даної теореми. З третьої умови (12), з урахуванням твердження 2.4, випливає, що третя умова даної теореми для базової мінливої множини $U[\mathcal{B}]$ також виконується.

Доведення єдиності.

Нехай, базова мінлива множина $\mathcal{B}_2$ також задовольняє умови 1,2,3 даної теореми, тобто:

1′. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$;

2′. $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_2) = \mathbb{T}$;

3′. Якщо $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \neq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, то w_1 і w_2 об'єднані долею в $\mathcal{B}_2$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_1 = U(\omega_1)$, $\mathrm{w}_2 = U(\omega_2)$.

Тоді, з умов $1'$,$2'$ випливає, що перші дві умови (12) для базової мінливої множини $\mathcal{B}_2$ виконані (тобто $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_2) = \mathbb{T}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$). З умови $3'$, з урахуванням властивості 2.1(2) і твердження 2.4, випливає, що $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)}{\leftarrow} = \Leftarrow$. Тобто, базова мінлива множина $\mathcal{B}_2$ задовольняє всі три умови (12). Але, за теоремою 2.2, існує лише одна базова мінлива множина, яка задовольняє умови (12). Отже, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 = U[\mathcal{B}]$. □

Означення 3.2. *Базову мінливу множину $U[\mathcal{B}]$, що задовольняє умови 1,2,3 теореми 3.1 будемо називати* ***образом базової мінливої множини*** *$\mathcal{B}$ при трансформуючому відображенні $U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{T} \times X$.*

Зауваження 3.2. З умови 3 теореми 3.1 і властивості 2.1(2), випливає, що для довільних елементарно-часових станів $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{Bs}(U[\mathcal{B}])$ співвідношення $\mathrm{w}_2 \underset{U[\mathcal{B}]}{\leftarrow} \mathrm{w}_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$ або $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) < \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_i = U(\omega_i)$ $(i = 1, 2)$.

Приклад 3.2. Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина, X — довільна множина, що містить $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ ($\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq X$). І нехай $\mathbb{U}$ — деяка множина бієкцій виду:

$$U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \longmapsto \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \qquad (U \in \mathbb{U}).$$

Таку множину бієкцій $\mathbb{U}$ будемо називати ***трансформуючою множиною бієкцій*** відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Введемо позначення:

$$\mathcal{A} := \mathbb{U};$$
$$U_\alpha := \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Тоді ми отримаємо індексовану сім'ю відображень $\overleftarrow{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ таку, що $U_\alpha \neq U_\beta$, для $\alpha \neq \beta$.

Кожне відображення U_α $(\alpha \in \mathcal{A})$ відображає $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ у множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$. Тому отримуємо сім'ю базових мінливих множин:

$$\mathcal{B}_\alpha := U_\alpha[\mathcal{B}], \qquad \alpha \in \mathcal{A};$$
$$\overleftarrow{U}[\mathcal{B}] = (U_\alpha[\mathcal{B}] \mid \alpha \in \mathcal{A}) = (U[\mathcal{B}] \mid U \in \mathbb{U}).$$

За теоремою 3.1:

$$\mathbb{Bs}(U_\alpha[\mathcal{B}]) = U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})), \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

отже, кожне відображення U_α є взаємно-однозначним відображенням з множини $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ в множину $\mathbb{Bs}(U_\alpha[\mathcal{B}])$. Розглянемо сім'ю відображень:

$$\widetilde{U}_{\beta\alpha} := U_\beta U_\alpha^{[-1]} = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}.$$

Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ відображення $\widetilde{U}_{\beta\alpha}$ є бієкцією між множинами $\mathbb{Bs}(U_\alpha[\mathcal{B}])$ та $\mathbb{Bs}(U_\beta[\mathcal{B}])$. Саме тому надалі кожне відображення $\widetilde{U}_{\beta\alpha}$ будемо вважати звуженим на множину $\mathbb{Bs}(U_\alpha[\mathcal{B}])$. Згідно із зауваженням 3.1, сім'я відображень $\overleftarrow{U^\sim} = \left(\widetilde{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)$ задовольняє умови

(11). Отже, за результатами прикладу 3.1, можна побудувати мінливу множину:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U},\mathcal{B}) = \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{U}[\mathcal{B}], \overleftarrow{U^{\sim}}\right).$$

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U},\mathcal{B})$ будемо називати ***багатоликим образом*** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$.

Приклад 3.3. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$$

(наприклад $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в M, причому $M \subseteq \mathbb{R}^3$). Використовуючи групу Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3)$ на 4-мірному просторі часу ($\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$) в якості трансформуючої множини відображень отримуємо мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(P(1,3),\mathcal{B})$, яка може бути застосована до формалізації кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Зауважимо, що дана модель формально не забороняє існування тахіонних трансформацій, оскільки, наприклад, можуть існувати елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ такі, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ і $\|\mathsf{bs}\,(\omega_2) - \mathsf{bs}\,(\omega_1)\|^2 > c^2\,(\mathsf{tm}\,(\omega_2) - \mathsf{tm}\,(\omega_1))^2$, де $\|\cdot\|$ — евклідова норма в просторі $\mathbb{R}^3$, і c — додатна числова константа, яка має фізичну інтерпретацію швидкості світла у вакуумі.

В прикладах 3.1-3.3 відображення уніфікації $\langle m \leftarrow l \rangle$ ($l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$) задаються з допомогою взаємно-однозначних відображень між множинами елементарно-часових станів $\mathbb{B}\mathfrak{s}(l)$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(m)$ (тобто:

$$\langle m \leftarrow l \rangle\, A = \bigsqcup_{\omega \in A} \langle m \leftarrow l \rangle \{\omega\} \qquad (l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}),\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l)), \tag{13}$$

де знак $\bigsqcup$ означає диз'юнктне об'єднання (тобто $\langle m \leftarrow l \rangle \{\omega\} \cap \langle m \leftarrow l \rangle \{\omega'\} = \emptyset$ при $\omega \neq \omega'$), і третю умову означення 3.1 можна замінити на більш сильну умову (10)). Але, насправді, умови означення 3.1 дуже загальні. І наступний приклад покаже, наскільки далеко в цьому означенні було зроблено відхід від звичного для класичних кінематик в інерційних системах відліку "поточкового" співставлення елементарно-часових станів різних областей сприймання.

Приклад 3.4. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \begin{cases} A, & \alpha = \beta \\ \emptyset, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Легко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє всі умови означення 3.1. Тому, трійка

$$\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною.

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ будемо називати ***повністю невидимою*** мінливою множиною, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$.

Зауважимо, що будь-яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ можна ототожнити з мінливою множиною виду $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$, де $\mathcal{A} = \{1\}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ і $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}) = (\mathcal{B}_1)$.

Інші, більш цікаві, приклади мінливих множин $\mathcal{Z}$, що не задовольняють умову (13) можна знайти в роботі [16].

4 Мінливі множини, породжені узагальненими перетвореннями Лоренца

Нехай, $(\mathfrak{H}, \|\cdot\| \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел. Позначимо через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}$.

Нагадаємо [20, стор. 128], [21, стор. 140], що простором Мінковського над (дійсним) гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком та нормою:

$$\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2 \rangle; \quad \|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1^2 + \|x_1\|^2,$$

де $\mathrm{w}_i = (t_i, x_i)$, $i \in \{1, 2\}$. В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виділимо наступні підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 = \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbb{R}\}; \quad \mathfrak{H}_1 = \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{H}\},$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Позначимо через $\mathbf{e}_0$ одиничний "часовий" вектор:

$$\mathbf{e}_0 = (1, \mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

Введемо наступні ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_0$ та $\mathfrak{H}_1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} &= t\mathbf{e}_0 = (t, \mathbf{0}) \in \mathfrak{H}_0, \quad && \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \\ \mathbf{X}\mathrm{w} &= (0, x) \in \mathfrak{H}_1, && \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \end{aligned}$$

(нагадаємо, що оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ортопроектором, якщо $P^2 = P^* = P$, де P^* — спряжений оператор до оператора P). Також позначимо через $\mathcal{T}$ наступний лінійний оператор

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}) = t, \quad \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

з $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ в $\mathbb{R}$. Тоді:

$$\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0, \quad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{14}$$

Довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна єдиним чином подати у вигляді:

$$\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 + x, \tag{15}$$

де $x = \mathbf{X}\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_1,\ t = \mathcal{T}(\mathrm{w}) \in \mathbb{R}$.

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\begin{gathered} \mathfrak{H}_1[V] = \mathbf{span}\,\{V\}; \\ \mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[V] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, V \rangle = 0\}, \end{gathered}$$

де $\mathbf{span}\,M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[V]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$ ортопроектори на підпростори (відповідно) $\mathfrak{H}_1[V]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$:

$$\mathbf{X}_1[V]\,\mathrm{w} = \begin{cases} \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H});$$

$$\mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[V]. \tag{16}$$

Покладемо:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1) = \{U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1) \mid U - \text{унітарний оператор}\}; \tag{17}$$

$$\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\}. \tag{18}$$

Нагадаємо, що оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$ називається ***унітарним***, якщо $\forall x \in \mathfrak{H}_1$ $\|Ux\| = \|x\|$ і $U\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$ (де $U\mathfrak{H}_1 = \{Ux \mid x \in \mathfrak{H}_1\}$).

Також нагадаємо [20, page 128, definition 1], що лінійний неперервний оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається ***оператором перетворення координат*** над $\mathfrak{H}$, якщо існує неперервний обернений оператор $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.

Надалі символом c будемо позначати довільну фіксовану додатну дійсну константу, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі.

Позначимо через $\mathsf{M}_c(\cdot)$ псевдо-метрику Лоренца-Мінковського на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) = \|\mathbf{X}\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}), \qquad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{19}$$

Нехай, $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Для довільного для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} := \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ + J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), \quad \text{де} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1 + \theta\,|\theta|}{2\,|\theta|}; \quad \varphi_1(\theta) = \frac{1 - \theta\,|\theta|}{2\,|\theta|}. \tag{21}$$

Легко перевірити, що для довільного $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ справедливі наступні рівності:

$$\begin{gathered} \varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta) = -\frac{1}{4}\left(\theta^2 - \frac{1}{\theta^2}\right); \quad c\frac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_0(\theta)} = c\frac{1 - \theta\,|\theta|}{1 + \theta\,|\theta|}; \\ \varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta) = \frac{1}{|\theta|}; \quad \varphi_0(\theta) - \varphi_1(\theta) = \theta; \\ \varphi_0(\theta)^2 - \varphi_1(\theta)^2 = \operatorname{sign}\theta; \end{gathered} \tag{22}$$

$$\varphi_0(-\theta) = \varphi_1(\theta); \quad \varphi_1(-\theta) = \varphi_0(\theta).$$

Очевидно, що для довільних $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ формула (20) визначає лінійний неперервний оператор над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (тобто, $\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$). Позначимо через $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$ наступний клас лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c) := \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\}, \ \theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) \ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}. \end{aligned} \tag{23}$$

В роботі [20, стор. 142] клас операторів $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$ визначено по-іншому, але з [20, theorem 3] випливає, що означення цього класу операторів з допомогою формули (23) еквівалентне означенню, даному в [20, стор. 142].

Введемо наступні підкласи класу операторів $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\mathfrak{T}_+(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c) \mid s = 1\} \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J] \mid \theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) \ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}; \\ \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c) \mid \theta > 0\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\}, \ \theta \in (0, 1], \\ &\qquad \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) \ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \mid s = 1\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J] \mid \theta \in (0, 1], \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) \ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Зауваження 4.1. В роботі [20, стор. 131] клас операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ названо загальною групою Лоренца над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і визначено дещо по-іншому, а саме, як множину операторів перетворень координат $L : \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \mapsto \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що задовольняють умову:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{26}$$

Доведемо, що обидва означення класу операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ еквівалентні. Справді, нехай $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ (де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in (0, 1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$). Оскільки $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$, то L є оператором перетворення координат, причому для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, згідно (20),(16),(22), отримуємо:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c\left(\left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w} \rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + J\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right)\Big) = \\
&= \left\| J\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right)\right\|^2 - \\
&\quad - c^2\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)^2 = \\
&= \left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\varphi_0(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\right)^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\|^2 - \\
&\quad - c^2\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)^2 = \\
&= c^2\varphi_1^2(\theta)\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) + \varphi_0^2(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\|^2 - \\
&\quad - c^2\varphi_0^2(\theta)\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) - \varphi_1^2(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2 = \\
&= -c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) + \langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\|^2 = \\
&= \|\mathbf{X}\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}).
\end{aligned}
$$

Навпаки, нехай $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ — оператор перетворення координат, що задовольняє умову (26). Тоді, згідно з [20, формула (20)] та означенням класу операторів $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$, даним в [20, page 142], $L \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$. Отже, згідно (23) оператор L можна подати у вигляді $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$ (де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$). Нагадаємо ([20, definition 2], [21, означення 2.2]), що оператор перетворення координат $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається **v-*детермінованим***, якщо $\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right) \neq 0$, і що швидкістю v-детермінованого оператора перетворення координат S називається вектор $\mathcal{V}(S) = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)} \in \mathfrak{H}_1$. Оскільки оператор перетворення координат L задовольняє умову (26), то, згідно [20, формула (12)], L є v-детермінім, причому $\|\mathcal{V}(L)\| < c$. З іншої сторони, згідно з [20, theorem 3], $\mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]) = cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$. Отже,

$$
\|\mathcal{V}(L)\| = \left\| cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n} \right\| = c\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|} < c.
$$

Звідси, $\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|} < 1$, тобто $\theta > 0$. Отже $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in (0, 1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, що й необхідно було довести.

Що торкається класу $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$, можна довести [20], що цей клас операторів у випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ являє собою повну групу Лоренца, визначену в [22]. Нижче буде доведено більш загальний результат, а саме буде показано, що в загальному випадку, коли $\mathfrak{H}$ — довільний дійсний гільбертовий простір, $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$ є групою операторів в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, яка залишає інваріантним клас додатних часоподібних векторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Означення 4.1. *Вектор* $\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *будемо називати:*

- ***додатним**, якщо* $\mathcal{T}(\mathrm{w})>0$*;*
- *c-**часоподібним**, якщо* $\mathsf{M}_c(\mathrm{w})<0$

Позначимо через $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ клас додатних c-часоподібних векторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}) := \{\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}) \mid \mathcal{T}(\mathrm{w})>0,\ \mathsf{M}_c(\mathrm{w})<0\}$$

Лема 4.1. *Має місце наступна рівність:*

$$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) = \{L\in\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \mid L\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ (\forall \mathrm{w}\in\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}))\}. \qquad (27)$$

Доведення. **1.** Нехай $L\in\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$. Розглянемо довільний вектор $\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Оскільки, враховуючи зауваження 4.1, оператор L задовольняє умову (26) і вектор $\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ є c-часоподібним, то:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w})<0. \qquad (28)$$

Оскільки $L\in\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$, то оператор L можна подати у вигляді $L=\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]$, де $\theta\in(0,1]$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Отже, враховуючи, що для вектора $\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ справедливі нерівності $\mathcal{T}(\mathrm{w})>0$, $\mathsf{M}_c(\mathrm{w})<0$, враховуючи (20), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(L\mathrm{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w}) &= \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c} = \\
&= \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle\mathbf{X}\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c} = \\
&= \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c} \geq \\
&\geq \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\|\mathbf{X}\mathrm{w}\|}{c} = \\
&= \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\theta} - \frac{\varphi_1(\theta)}{c}\left(\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\theta} - \frac{1-\theta^2}{2\theta\cdot c}\frac{\mathsf{M}_c(\mathrm{w})}{\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| + c\mathcal{T}(\mathrm{w})} > 0. \tag{29}$$

З нерівностей (28) і (29) випливає, що $L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ (для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$.

2. Навпаки, нехай тепер оператор $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ задовольняє умову

$$\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ (L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})). \tag{30}$$

Оскільки $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, то оператор L можна подати у вигляді $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in (0, 1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Легко бачити, що вектор $\mathbf{e}_0$ належить до класу $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Отже, за умовою (30), $L\mathbf{e}_0 \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Тому, за означенням класу векторів $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) > 0$. Згідно з (20),

$$\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) = \mathcal{T}(\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathbf{e}_0) = s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) - \varphi_1(\theta)\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_0\rangle}{c} =$$
$$= s\frac{1+\theta^2}{2\theta}.$$

Отже, $s\frac{1+\theta^2}{2\theta} > 0$. Звідси, $s > 0$, тобто $s = 1$. Таким чином, $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, де $s = 1$. Тому $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. □

Наслідок 4.1. *$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів в просторі Мінковського $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$.*

Доведення. 1. Із зауваження 4.1 випливає, що $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторі в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тому, з леми 4.1 (рівність (27)) випливає, що добуток операторів, що належать до $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ належить до $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$.

2. Нехай, $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Доведемо, що $L^{-1} \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ (де L^{-1} — оператор, обернений до L). Згідно з [21, наслідок 5.1], $L^{-1} = \mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta^1,c}\left[\mathfrak{S}(1,\theta), \mathfrak{S}(1,\theta)J\mathbf{n}, J^{-1}\right]$, де $\mathfrak{S}(s,\theta) = \begin{cases} 1, & s,\theta > 0 \\ -1, & s < 0 \text{ або } \theta < 0 \end{cases}$. Оскільки $\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$, то, за означенням класу операторів $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ (25), $\theta \in (0, 1]$. Отже, $\mathfrak{S}(1,\theta) = 1$. Тому $L^{-1} = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[1, J\mathbf{n}, J^{-1}\right]$, де $\theta \in (0, 1]$, $J\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J^{-1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Отже, згідно (25), $L^{-1} = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[1, J\mathbf{n}, J^{-1}\right] \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. □

Приклад 4.1. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Зафіксуємо довільну додатну дійсну константу c. Нехай $\mathbb{U}$ — один з класів операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$, $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c)$, $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Тоді довільний оператор $L \in \mathbb{U}$ буде бієкцією типу:

$$L : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{H} \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{H}.$$

Отже, $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H}$. Тому можна визначити наступні мінливі множини:

$$\begin{aligned}
\mathcal{ZLT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}\right);\\
\mathcal{ZLT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}\right);\\
\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}\right);\\
\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}\right).
\end{aligned}$$

У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$ мінлива множина $\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ являє собою найпростішу математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, які "стартували" в заданий "нульовий" момент часу зі спільного початку відліку. Мінлива множина $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца, і містить крім звичайних систем відліку "з додатним напрямком часу", які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з "від'ємним напрямком часу", породженими операторами перетворення координат, що належать до класу $\mathfrak{O}_-(\mathfrak{H}, c) = \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \mid s = -1\}$.

Мінливі множини $\mathcal{ZLT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ і $\mathcal{ZLT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ містять крім стандартних ("тардіонних") систем відліку, породжених класичними перетвореннями Лоренца також і "тахіонні" системи відліку, породжені узагальненими перетвореннями Лоренца (тобто операторами перетворення координат, що належать до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \setminus \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$), і які рухаються відносно "тардіонних" систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. Зауважимо, що узагальнені "тахіонні" перетворення Лоренца на фізичному рівні строгості було введено в роботах [23–25] у випадку, коли простір "геометричних координат" є трьохвимірним. На математичному рівні строгості ці перетворення координат досліджувались в роботах [20, 21] у випадку, коли простір "геометричних координат" має довільну (в тому числі і нескінченну) розмірність.

Підкреслимо, що всі мінливі множини, розглянуті в попередньому прикладі ($\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, $\mathcal{ZLT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, $\mathcal{ZLT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$)

містять лише “однорідні” інерційні системи відліку, тобто системи відліку, які стартували в заданий “нульовий” момент часу зі спільного початку. В наступному прикладі “однорідні” системи відліку доповнено неоднорідними, тобто інерційними системами відліку, які в нульовий момент часу можуть знаходитись в довільному положенні.

Приклад 4.2. Зафіксуємо довільну додатну дійсну константу c. Нехай, $s \in \{-1,1\}$, $\theta \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}]\,\mathrm{w} := \mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} + \mathbf{a}.$$

Позначимо через $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$ наступний клас лінійних (неоднорідних) неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\},\ \theta \in [-1,1] \setminus \{0\},\\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}.\end{aligned} \tag{31}$$

По аналогії з попереднім прикладом введемо наступні підкласи класу операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\};\\ \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid \theta > 0\};\\ \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\}.\end{aligned}$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\leq)$. Нехай $\mathbb{U}$ — один з класів операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$. Тоді $\mathbb{U}$ буде трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H}$. Отже можна визначити наступні мінливі множини:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B});\\ \mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}\right);\\ \mathcal{Z}\mathfrak{P}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B});\\ \mathcal{Z}\mathfrak{P}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &= \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}).\end{aligned}$$

Мінливі множини $\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ аналогічні відповідним мінливим множинам $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ з попереднього прикладу, але крім “однорідних” систем відліку які стартували в заданий “нульовий” момент часу зі спільного початку, ці мінливі множини містять також всі інерційні системи відліку, які в нульовий момент часу знаходяться в довільному положенні.

Література

[1] *Проблемы Гильберта.* Сборник под ред. П.С. Александрова. М.:“Наука”, 1969.

[2] А.Д. Гладун, *Шестая проблема Гильберта.* Потенциал. **N 3**, (2006), (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).

[3] Yu.I. Petunin, D.A. Klyushin, *A structural approach to solving the 6th Hilbert problem.* Theory of Probability and Mathematical Statistics. **N 71**, (2005), 165–179.

[4] J.C.C. McKinsey, A.C. Sugar, and P. Suppes, *Axiomatic foundations of classical particle mechanics.* Journal of Rational Mechanics and Analysis. **N 2**, (1953), 253–272.

[5] John W. Schutz, *Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time.* Lecture Notes in Mathematics. **361**. Springer-Verlag, 1973.

[6] N.C.A. da Costa and F.A. Doria, *Suppes predicates for classical physics.* In: The Space of Mathematics. Proceedings of the International Symposium on Structures in Mathematical Theories. N.Y.: De-Gruyter, 1992, 168-191.

[7] Adonai S. Sant’Anna, *The definability of physical concepts.* Bol. Soc. Parana. Mat. (3s.). **23**, (1-2), (2005), 163–175.

[8] Р.И. Пименов, *Математические темпоральные конструкции.* Сборник: “Конструкции времени в естествознании: На пути к пониманию феномена времени”, часть I. М.: Изд. Моск. ун-та., 1996, 153–199.

[9] Р.И. Пименов, *Основы теории темпорального универсума.* М.: ЛЕНАНД, 2006.

[10] А.П. Левич, *Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени.* http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf (2009).

[11] А.П. Левич, *Почему скромны успехи в изучении времени.* Сборник: "На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании”, Часть 3. М.: Прогресс-Традиция, 2009, 15–29.

[12] A.P. Levich, *Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows.* Collection “On the way to understanding the time phenomenon:

the constructions of time in natural science", Part 1. World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1995, 149–192, (http://www.chronos.msu.ru/Public/levich_time_as_variab.html).

[13] Я.І. Грушка, *Мінливі множини та їх властивості.* Доповіді НАН України. **N 5**, (2012), 12–18.

[14] Я.І. Грушка, *Примітивні мінливі множини та їх властивості.* Математичний Вісник НТШ. **9**, (2012), 52–80.

[15] Ya.I. Grushka, *Abstract concept of changeable set.* Preprint arXiv:1207.3751v1, (2012).

[16] Я.І. Грушка, *Видимість у мінливих множинах.* Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **9**, (2), (2012), 122–145.

[17] Я.І. Грушка, *Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем.* Укр. матем. журн. **65**, (9), (2013), 1198–1218.

[18] Г. Биркгоф, *Теория Решёток.* М.: "Наука", 1984.

[19] К. Куратовский, А. Мостовский. *Теория множеств.* М.: "Мир", 1970.

[20] Ya.I. Grushka, *Tachyon Generalization for Lorentz Transforms.* Methods of Functional Analysis and Topology. **20**, (2), (2013), 127–145.

[21] Я.І. Грушка, *Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца.* Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **10**, (2), (2013), 138–169.

[22] М.А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца.* УМН. **IX**, (Вып. 4 (62)), (1954), 19–93.

[23] E. Recami, *Classical Tachyons and Possible Applications.* Nuovo Cim. **9, s.3**, (6), (1986), 1–178.

[24] James M. Hill and Barry J. Cox, *Einstein's special relativity beyond the speed of light.* Proceedings of the Royal Society. London. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **468**, (2148), (2012), 4174–4192.

[25] Ricardo S. Vieira, *An Introduction to the Theory of Tachyons.* Preprint arXiv:1112.4187v2, (2012).