Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 228–240

УДК 517.9+531.19

***Т.М. Засадко*†, *А.Г. Нікітін*††**

† *Національний університет ім. Т.Г. Шевченка*
††*Інститут математики НАН України*
nikitin@imath.kiev.ua

Групова класифікація рівнянь Шродінгера зі змінною масою

Group classification of Schrödinger equations with position dependent mass is carried out. Twenty classes of such equations with non-equivalent symmetries are specified. Among them are equations invariant with respect to the Lie algebra of Lorentz group

Проведено групову класифікацію рівнянь Шродінгера зі змінною масою. Доведено, що існує двадцять класів таких рівнянь, кожен з яких характеризується нееквівалентною групою симетрії. Серед них є рівняння, інваріантне відносно алгебри Лі групи Лоренца

1 Вступ

Дослідження симетрії рівняння Шродінгера має довгу і цікаву історію. Інваріантність цього рівняння відносно групи Галілея завжди вважалась очевидною. Але тільки у 1972 році була встановлена його повна неперервна група симетрії, яка виявилась ширшою за групу Галілея і включає додаткову інваріантність відносно масштабних та спеціальних конформних перетворень [1], [2]. У роботах [3] - [5] зроблено групову класифікацію рівняння Шродінгера з довільним потенціалом.

Важливою гілкою науки про симетрію рівняння Шродінгера складають дослідження його вищих симетрій. Вивчення операторів симетрії вищих порядків є необхідною складовою частиною опису систем координат, у яких існують розв'язки з розділеними змінними [6]. Оператори симетрії вищих порядків для нестаціонарного рівняння Шродінгера досліджувались у роботах [7] [8]. Нагадаємо, що потужний метод оберненої задачі також тісно пов'язаний з вищими симетріями рівняння Шродінгера.

Дослідження симетрії цього рівняння активно продовжується і в сучасну добу, а саме досліджуються суперінтегровані та суперсиметричні системи квантової механіки, дивись [9], [10] та цитовану там літературу. При цьому майже не дослідженими залишаються симетрії квантово-механічних моделей, заснованих на рівняннях Шродінгера зі змінною масою, які мають наступний вигляд:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{1}$$

де

$$\hat{H} = -\frac{\partial}{\partial x_a}\frac{1}{m(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial x_a} + V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \tag{2}$$

і по індексах, що повторюються, проводиться сумування за значеннями $a = 1, 2, 3$.

Такі рівняння є невід'ємною складовою частиною фізики конденсованих станів. Вони також природно виникають при квантуванні та редукції класичних моделей у багатовимірному викривленому просторі. Слід відмітити, що назва "рівняння Шродінгера зі змінною масою"не є цілком адекватною для (1), але ми будемо дотримуватись цієї дуже поширеної термінології.

Дана робота присвячена дослідженню симетрії рівняння (1) відносно груп неперервних перетворень. Ми проведемо групову класифікацію цих рівнянь, які включають два довільні елементи - потенціал $V(\mathbf{x})$ та змінну масу $m(\mathbf{x})$. Ця задача еквівалентна знаходженню усіх інтегралів руху для гамільтоніану (2), які належать до класу диференціальних операторів першого порядку. Буде показано, що існує 20 класів таких рівнянь з різними групами симетрії. Два зі знайдених рівнянь мають широку і досить екзотичну симетрію. Одне з них має шість інтегралів руху, що утворюють алгебру Лі групи обертань у чотиривимірному евклідовому просторі, а друге є інваріантним відносно алгебри Лі групи Лоренца. Повний список рівнянь з нееквівалентними групами симетрії наведено нижче у таблиці 2.

2 Визначальні рівняння

Ми будемо використовувати наступне представлення для гамільтоніану (2):

$$\hat{H} = \frac{\partial}{\partial x_a} f \frac{\partial}{\partial x_a} + V, \tag{3}$$

де $V = V(\mathbf{x})$ та $f = f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{m(\mathbf{x})}$.

Наша задача - знайти усі гамільтоніани (3), які допускають інтеграли руху, що належать до диференціальних операторів першого порядку. Не зменшуючи загальності, такі інтеграли руху можна представити у наступному вигляді:

$$Q = \xi^i \partial_i + \eta, \quad i = \overline{1,3}, \tag{4}$$

де ξ^i та η - невідомі функції від $\mathbf{x}$.

Згідно з визначенням, диференціальні вирази (3) та (4) повинні комутувати:

$$[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0 \tag{5}$$

причому співвідношення (5) треба розуміти як операторне рівняння, яке повинно виконуватись при дії операторів у лівій частині на довільну двічі диференційовану функцію. Обраховуючи комутатор і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних похідних, дістаємо наступну систему визначальних рівнянь:

$$\xi^c f_c \delta_{ab} - f(\xi^b_a + \xi^a_b) = 0, \tag{6}$$

$$-\xi^i f_{ai} + f_i \xi^a_i + f \xi^a_{cc} + 2f\eta_a = 0, \tag{7}$$

$$f_a \eta_a + f \eta_{aa} - \xi^i V_i = 0, \tag{8}$$

де δ_{ab}– символ Кронекера, і нижні індекси позначають похідні по відповідним змінним. Наприклад, $\xi^a_c = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_c}$, і т.п. Як і всюди у тексті, за індексами, що повторюються, розуміємо сумування за значеннями 1, 2 і 3.

Система (6)-(8) є перевизначеною, але досить складною. Вона включає десять рівнянь для шести функцій f, V, ξ^i та η, кожна з яких залежить від трьох змінних x_1, x_2, x_3.

Рівняння (6) може бути розщеплено на дві наступні підсистеми:

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{3}\delta_{ab}\xi_i^i = 0 \tag{9}$$

$$3\xi^i f_i = 2f\xi_i^i. \tag{10}$$

Формула (9) визначає рівняння для конформного вектора Кіллінга. Загальний розв'язок цього рівняння має наступний вигляд (дивись, наприклад, [11])

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a\lambda^n x^n + \mu^c\varepsilon^{abc}x^b + \omega x^a + \nu^a \tag{11}$$

де грецькими літерами позначено константи інтегрування.

Згідно з (4), (11), загальний вигляд інтеграла руху першого порядку для гамільтоніану (3) задається наступною формулою:

$$Q = \lambda^i K^i + \mu^i J^i + \omega D + \nu^i P^i + b \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} &P^i = p^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad J^i = \varepsilon^{ijk}x^j p^k, \\ &D = x^n p^n + \frac{1}{2}, \quad K^i = x^n x^n p^i - 2x^i D \end{aligned} \tag{13}$$

а b - невідома функція від $\mathbf{x}$. Оператори (13) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned} &[P^a, P^b] = 0, \quad [P^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}P^c, \\ &[J^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}J^c, \quad [D, J_a] = 0, \\ &[D, P^a] = -P^a, \quad [D, K^a] = K^a, \\ &[K^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}K^c, \quad [K^a, K^b] = 0, \\ &[K^a, P^b] = 2(\varepsilon_{abc}J^c - \delta^{ab}D) \end{aligned} \tag{14}$$

які характеризують алгебру Лі конформної групи у тривимірному евклідовому просторі. Іншими словами, с точністю до останнього доданку, пропорційного одиничному оператору, шуканий інтеграл руху є лінійною комбінацією генераторів конформної групи у тривимірному евклідовому просторі $C(3)$, яка виявляється максимально можливою групою симетрії досліджуваних рівнянь.

3 Алгоритм інтегрування визначальних рівнянь

Для знаходження розв'язків системи визначальних рівнянь (8), (7) і (10) треба перебрати усі нееквівалентні набори довільних параметрів λ^a, μ^c, ν^a та ω, що визначають функції ξ^a згідно з формулою (11). З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів групи $C(3)$, такі набори визначаються оптимальною системою підалгебр алгебри (3), базисні елементи якої задані формулами (13). Для знаходження цих підалгебр скористаємось наступним твердженням.

Твердження 1 *Алгебра $c(3)$ ізоморфна алгебрі Лі псевдоортогональної групи $SO(1,3)$.*

Сформульований вище автоморфізм може бути заданий явно за допомогою наступних співвідношень:

$$J^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c,\ K^a = J^{4a} + J^{0a},\ P^a = J^{0a} - J^{4a},\ D = J^{40} \qquad (15)$$

де P^a, J^a, K^a та D - оператори (13). Використовуючи рівняння (14), легко переконатися, що нові базисні елементи (15) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\sigma}] = -(g^{\mu\sigma} J^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\lambda} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\lambda}) \qquad (16)$$

де індекси $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ пробігають значення 0, 1, 2, 3, 4, $g^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. А ці співвідношення визначають алгебру $so(1,3)$.

Згідно з наведеним твердженням, оптимальна система підалгебр алгебри (3) співпадає з оптимальною системою підалгебр алгебри $so(1,3)$. Остання була знайдена у роботі [12], результатами якої ми і скористуємось. Ці результати можуть бути представлені у вигляді наступного твердження.

Твердження 2 *Нееквівалентні підалгебри алгебри $so(1,3)$ визначаються наступними наборами базисних елементів.*

Одновимірні підалгебри:
$< A + H >,\quad < H >,\quad < A + \alpha H >, 0 < \alpha < 1,\quad < G >,$
$< H\cos c + G\sin c >, 0 < c < \frac{\pi}{2},\quad < A - G >,\quad < A - G + H >;$
двовимірні підалгебри:
$< A, H >, < G, H >, < E + J, F + K >, < E + J, G >,\ < H, A - G >,$
$< A - G, D + \alpha H >;$

тривимірні підалгебри:
<A+H, B-F, C+E>, <E, F, H>, $< H\cos c + G\sin c$*, E+J, F+K>,*
<H, E+J, F+K>,<G,E+J, F+K >,<H,J,K>, <A-G, B-J, C-K>,
<H+A-G, B-J, C-K>,<D, H, A-G>;
чотиривимірні підалгебри:
<A+H, B-F, C+E, A-H>,<D,E,F,H>,<H,G,E+J,F+K>,
<H, A-G, B-J, C-K>, <D, A-G, B-J, C-K>,<A,K,J,H>;
п'ятивимірна підалгебра:
<D, H, A-G, B-J, C-K>;
шестивимірні підалгебри:
<E, F, H, A-G, B-J, C-K>, <E, F, G, H, J,K>, <A, B, C, E, F, H>;
семивимірна підалгебра:
<D, E, F, H, A-G, B-J, C-K>;
десятивимірна алгебра:
<A, B, C, D, E, F, G, H, J, K>

де

$$\begin{aligned}
&A = \frac{1}{2}(P_3 - K_3), \quad B = \frac{1}{2}(P_2 - K_2), \quad C = \frac{1}{2}(P_1 - K_1),\\
&G = -\frac{1}{2}(P_3 + K_3), \quad J = -\frac{1}{2}(P_2 + K_2), \quad K = -\frac{1}{2}(P_1 + K_1),\\
&E = J_{32}, \quad F = J_{31}, \quad H = J_{21}.
\end{aligned}$$

Таким чином, задача групової класифікації рівняння (1) зводиться до пошуку неіквівалентних розв'язків рівнянь (8), (7), (10), де ξ^a - функції, задані рівнянням (11). При цьому досить обмежитись такими наборами значень числових параметрів λ^i, μ^i, ν^i та ω, що відповідають підалгебрам, перерахованим вище. Для знаходження цих значень досить порівняти загальний вигляд оператора симетрії (12) з конкретними операторами, що входять у оптимальні підалгебри.

Можна показати, що функція η у визначальних рівняннях (8) та (7) повинна мати вигляд $\eta = -\tilde{\lambda}^a x^a + c$, де $\tilde{\lambda}^a = \lambda^a$, а λ^a - константи, що входять у загальний вираз (12) для операторів симетрії, а c - довільна константа, яка є несуттєвою і може бути опущена. Для інших функцій η оператори (12) не будуть утворювати алгебру Лі, що протирічить основним теоремам групового аналізу, а у випадку $\tilde{\lambda}^a \neq \lambda^a$ визначальні рівняння стають несумісними.

Явний вигляд допустимих функцій ξ^a і η наведено у наступній таблиці.

Таблиця 1. Функції ξ^a і η, що відповідають базисним елементам нееквівалентних підалгебр алгебри $c(3)$.

Базисні елементи алгебри	ξ^1	ξ^2	ξ^3	2η
A	x_1x_3	x_2x_3	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3
B	x_1x_2	$\frac{s_2+1}{2}$	x_2x_3	x_2
C	$\frac{s_1+1}{2}$	x_1x_2	x_1x_3	x_1
D	x_1	x_2	x_3	0
E	0	x_3	$-x_2$	0
F	x_3	0	$-x_1$	0
G	x_1x_3	x_2x_3	$\frac{s_3-1}{2}$	x_3
H	x_2	$-x_1$	0	0
J	x_1x_2	$\frac{s_2-1}{2}$	x_2x_3	x_2
K	$\frac{s_1-1}{2}$	x_1x_2	x_1x_3	x_1
$A+H$	$x_1x_3+x_2$	$x_2x_3-x_1$	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3
$H\cos c$ $+G\sin c$	$\sin(c)x_1x_3$ $+\cos(c)x_2$	$\sin(c)x_2x_3$ $-\cos(c)x_1$	$\frac{\sin(c)(s_3+1)}{2}$	$x_3\sin c$
$E+J$	x_1x_2	$\frac{s_2+2x_3-1}{2}$	$(x_3-1)x_2$	x_2
$A-G+H$	x_2	$-x_1$	1	0
$F+K$	$\frac{s_1-2x_3-1}{2}$	x_1x_2	$(x_3+1)x_1$	x_1
$A-G$	0	0	1	0
$D+\alpha H$	$x_1+\alpha x_2$	$x_2-\alpha x_1$	x_3	0
$B-J$	0	1	0	0
$C-K$	1	0	0	0
$B-F$	$x_1x_2+x_3$	$\frac{s_2+1}{2}$	$x_2x_3-x_1$	x_2
$C+E$	$\frac{s_1+1}{2}$	$x_1x_2+x_3$	$x_1x_3-x_2$	x_1
$A-H$	$x_1x_3-x_2$	$x_2x_3+x_1$	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3

де $s_a = 2x_a^2 - r^2,\ a = 1,2,3.$

4 Результати групової класифікації

Для завершення групової класифікації рівнянь залишилося проінтегрувати визначальні рівняння (8), (7) та (10) для випадків, що відповідають підалгебрам, перерахованим у твердженні 2. Відповідні функції ξ^a і b наведено у таблиці 1.

Розглянемо випадок, коли оптимальна підалгебра одновимірна і включає єдиний базисний елемент $G = -\frac{1}{2}(P_3 + K_3)$. Згідно з таблицею 1, з точністю до загального знаку відповідні функції ξ^1, ξ^2 та ξ^3 мають наступний вигляд:

$$\xi^1 = x_1 x_3, \quad \xi^2 = x_2 x_3, \quad \xi^3 = x_3^2 - \frac{1}{2}(r^2 + 1)$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Підставивши ці функції у (10), отримуємо рівняння для невідомої функції f:

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 - \frac{r^2 + 1}{2x_3} f_3 = 2f,$$

загальний розв‘язок якого має вигляд:

$$f(x) = r_{12}^2 F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2 - 1}{r_{12}}\right) \tag{17}$$

де $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2$, і $F(.,.)$ є довільною функцією своїх двох аргументів.

Пряма перевірка показує, що функції (17) тотожно задовольняють також рівняння (7).

Залишилось розв’язати останнє визначальне рівняння (8), яке набуває наступного вигляду:

$$2x_3(x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3) - (r^2 + 1)V_3 = f_3. \tag{18}$$

Це лінійне неоднорідне рівняння, загальний розв’язок якого має наступний вигляд:

$$V(x) = r_{12} D_2 F + \tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2 - 1}{r_{12}}\right) \tag{19}$$

де $\tilde{F}(.,.)$ - ще одна довільна функція, і символ $D_2 F$ означає похідну по другому аргументу функції F.

Ми бачимо, що умові інваріантності відносно оператора G задовольняє досить широкий клас рівнянь (3). А саме, такі рівняння визначені з точністю до двох довільних функцій $F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ та $\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$.

Розглянемо рівняння, що допускають симетрію відносно більш широких алгебр, які включають G і інші базисні елементи. Згідно з твердженням 2, достатньо розглянути дві двовимірні алгебри: $< G, H >$ та

$< G, E + J >$. При цьому виникають додаткові умови інваріантності відносно дії операторів H та $E + J$ відповідно.

Розглянемо підалгебру $< G, H >$. Підставивши з Таблиці 1 відповідні значення функції ξ^a в рівняння (6), отримуємо додаткову систему визначальних рівнянь для f і V:

$$x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0, \quad x_2 V_1 - x_1 V_2 = 0.$$

Ці умови забороняють залежність функцій $F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ та $\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ від першого аргументу, і допустимі функції f і V набувають вигляд:

$$f(x) = r_{12}^2 F\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right), \quad V(x) = r_{12}F' + \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right). \tag{20}$$

де F' означає похідну від функції $F\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right)$ по її аргументу $\frac{r^2-1}{r_{12}}$.

Для рівнянь, інваріантних відносно підалгебри $< G, E+J >$, функції (17) та (19) повинні задовольняти наступні додаткові умови:

$$x_2(x_1 f_1 + x_2 f_2 + (x_3 - 1)f_3) - \frac{1}{2}(r^2 - 1 - 2x_3)f_2 = 2x_2 f,$$
$$2x_2(x_1 V_1 + x_2 V_2 + (x_3 - 1)V_3) - (r^2 - 1 - 2x_3)V_2 = f_2$$

які отримуються при підстановці у (7) та (10) відповідних виразів для ξ^a та η з таблиці 1. Ці умови сумісні з (17) та (19) тільки тоді, коли

$$f(x) = x_1^2 F\left(\frac{r^2-1}{x_1}\right), \quad V = x_1 F' + \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{x_1}\right). \tag{21}$$

Наступна за розмірністю оптимальна підалгебра, що включає G, є лінійною оболонкою базисних елементів $< G, H, E+J >$. Симетрія відносно цієї алгебри вимагає сумісності формул (21) та (20), що можливо тільки у випадку, коли

$$f(x) = \mu(r^2-1)^2, \quad V = 2\mu r^2 + \nu \tag{22}$$

де μ та ν - довільні константи. Ці ж формули виявляються справедливими і для усіх інших розширень алгебр $< G, H >$ та $< G, E + J >$, присутніх у переліку з твердження 2.

Аналогічно, стартуючи з інших одновимірних алгебр, наведених у згаданому твердженні, і послідовно розв'язуючи відповідні визначальні рівняння, знаходимо усі інші рівняння Шродінгера та їх алгебри симетрії. Ця процедура є алгоритмічною для усіх розв'язних оптимальних підалгебр. У нашому випадку нерозв'язними є тільки такі алгебри, що включають підалгебру $so(3)$. Для таких алгебр обрахунки аналогічні, але доводиться починати відразу з трьох систем визначальних рівнянь, що відповідають цій підалгебрі. Результати щодо розв'язків визначальних рівнянь наведено у наступній таблиці.

Таблиця 2. Алгебри інваріантності рівнянь (3) та відповідні функції f та V, що визначають ці рівняння

Підалгебра	f	V
G	$r_{12}^2F(\frac{x_2}{x_1},\frac{r^2-1}{r_{12}})$	$r_{12}D_2F+\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1},\frac{r^2-1}{x_1})$
H	$F(r_{12}^2,x_3)$	$V(r_{12}^2,x_3)$
$A+G$	$r_{12}^2F(\frac{x_2}{x_1},\frac{r^2}{r_{12}})$	$r_{12}D_2F+\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1},\frac{r^2}{r_{12}})$
$A+H$	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}},\omega_1)$	$r_{12}D_1F+\frac{2r_{12}^2x_3}{l_-}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}},\omega_1)$
$A+\alpha H$	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}},\omega_2)$	$r_{12}D_1F+\frac{2\alpha r_{12}^2x_3}{l_-}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}},\omega_2)$
$H\cos c+G\sin c$	$r_{12}^2F(\frac{r^2-1}{r_{12}},\omega_3)$	$r_{12}D_1F+\frac{2\cot(c)r_{12}^2x_3}{l_+}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2-1}{r_{12}},\omega_3)$
$A-G+H$	$F(r_{12}^2,x_3-\varphi)$	$V(r_{12}^2,x_3-\varphi)$
A,H	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}})$	$r_{12}F'+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}})$
G,H	$r_{12}^2F(\frac{r^2-1}{r_{12}})$	$r_{12}F'+\tilde{F}(\frac{r^2-1}{r_{12}})$
$H,A-G$	$F(r_{12})$	$V(r_{12})$
$A-G,D+\alpha H$	$r_{12}^2F(\ln r_{12}^{\alpha}+\varphi)$	$\tilde{F}(\ln r_{12}^{\alpha}+\varphi)$
H,J,K	$x_3^2F(\frac{r^2-1}{x3})$	$x_3F'+\tilde{F}(\frac{r^2-1}{x3})$
B,C,H	$x_3^2F(\frac{r^2+1}{x3})$	$x_3F'+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{x3})$
E,F,H	$F(r^2)$	$\tilde{F}(r^2)$
$D,H,A-G$	μr_{12}^2	ν
A,K,J,H	$\mu((r^2+1)^2+4x_3^2)$	$2\mu r^2+\nu$
E,F,H,D	μr^2	ν
A,B,C,E,F,H	$\mu(r^2+1)^2$	$2\mu r^2+\nu$
E,F,G,H,J,K	$\mu(r^2-1)^2$	$2\mu r^2+\nu$

Тут μ та ν - довільні константи,

$$l_{\pm} = (r^2-1)^2 \pm 4r_{12}^2(r^2-1)^2, \quad \omega_1 = \arctan\frac{r^2+1}{2x_3} + \varphi,$$
$$\omega_2 = \alpha \arctan\frac{r^2+1}{2x_3} + \varphi, \quad \omega_3 = -\cot c \arctan\frac{r^2-1}{2x_3} + \varphi,$$
$$\varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}.$$

Таблиця 2 не включає постійних функцій f та V, що відповідають очевидній симетрії рівняння (2) відносно групи Евкліда. Наведені розв'язки для f і V можуть бути розмножені з використанням групи еквівалентності цього рівняння, генератори якої задані формулами (13).

5 Висновки

У даній роботі проведено групову класифікацію рівнянь Шродінгера зі змінною масою. Як видно з таблиці 2, множина рівнянь з нетривіальною симетрією виявилась досить широкою. При цьому розмірність алгебр інваріантності може бути від одиниці до шести.

Встановлено, що існує три нееквівалентних рівняння, які допускають максимально широкі (шестипараметричні) групи Лі. З точністю до нормування власних значень такі рівняння можуть бути записані у наступному вигляді (див. три останні строчки таблиці 2):

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + C\right)\psi = E\psi, \tag{23}$$
$$\big((-\nabla_a(r^2+1)^2\nabla_a - 4r^2\big))\psi = E\psi, \tag{24}$$
$$\big(-\nabla_a(r^2-1)^2\nabla_a - 4r^2\big))\psi = E\psi \tag{25}$$

де m - константа.

Рівняння Шродінгера для вільної частинки, що задається формулою (23), має очевидну симетрію відносно групи Евкліда $E(3)$. Більш несподівані симетрії мають рівняння (25) і (24). А саме, симетрія рівняння (24) визначається алгеброю $so(4)$, тобто алгеброю Лі групи обертань у чотиривимірному просторі. А рівняння (25) виявляється інваріантним відносно алгебри Лі групи Лоренца.

Ще два рівняння з незвичайною симетрією задається наступними формулами:

$$\left(-\nabla_a x_3^2 F\left(\frac{r^2+1}{x_3}\right)\nabla_a - 2x_3F' - \tilde{F}\left(\frac{r^2+1}{x_3}\right)\right)\psi = E\psi \qquad (26)$$

та

$$\left(-\nabla_a x_3^2 F\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)\nabla_a - 2x_3F' - \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)\right)\psi = E\psi \qquad (27)$$

де $F(\cdot)$ та $\tilde{F}(\cdot)$ - довільні функції вказаних аргументів.

Алгебра інваріантності рівняння (26) є лінійною оболонкою операторів B, C та H, які утворюють нестандартне представлення алгебри Лі групи обертань у тривимірному просторі. Алгебра симетрії рівняння (27) включає оператори H, J і K, що утворюють предстівлення алгебри Лі групи Лоренца у (1+2)-вимірному просторі-часі.

Знайдені симетрії створюють теоретико-групове підґрунтя для побудови моделей зі змінною масою. Вони також можуть бути використані для ефективного інтегрування таких моделей. Зокрема, усі отримані рівняння, що мають більше ніж два інтеграла руху (наприклад, рівняння (26) та (27)) є суперінтегрованими, а рівняння (25) та (24) належать до максимально суперінтегрованих рівнянь, бо допускають чотири алгебраїчно незалежних інтеграла руху, а це є максимально можлива кількість для гамільтонової системи з трьома ступенями вільності.

Література

[1] C.R. Hagen. *Scale and conformal transformations in Galilean-invariant conformal field theory.* Phys. Rev. D **5**, (1972), 377–388.

[2] U. Niederer. *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equations.* Helv. Phys. Acta, **45**, (1972), 802–810.

[3] U. Niederer. *The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator.* Helv. Phys. Acta, **46**, (1973), 191–200.

[4] R.L. Anderson, S. Kumei, C.E. Wulfman. *Invariants of the equations of wave mechanics. I* . Rev. Mex. Fis., **21**, (1972), 1–33.

[5] C.P. Boyer. *The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential* Helv. Phys. Acta, **47**, (1974), 450–605.

[6] У. Миллер. *Симметрия и разделение переменных.* М.: Мир, 1981.

[7] J. Beckers, N. Debergh, A.G. Nikitin. *More on symmetries of the Schrodinger equation.* J. Phys. A: Math.Gen., **24**, (1991), L1269–L1275.

[8] W.I. Fushchich, A.G. Nikitin. *Higher symmetries and exact solutions of linear and nonlinear Schrödinger equation.* Journal of Mathematical Physics, **38**, (1997), 5944–5959.

[9] W. Miller, Jr, S. Post, P. Winternitz. *Classical and Quantum Superintegrability with Applications* J. Phys. A: Math. Theor. **46**, (2013), 423001.

[10] A.G. Nikitin. *Integrability and supersymmetry of Schrodinger-Pauli equations for neutral particles.* J. Math. Phys., **53**, (2012), 122103.

[11] А.Г. Нікітін. *Узагальнені тензори Кілінга довільного рангу та порядку.* УМЖ, **43**, (1991), 786–795; A.G. Nikitin. *Generalized Killing tensors of arbitrary valence and order.* Ukrainian Math. J., **43**, (1991), 734–743.

[12] J. Patera, P. Winternitz. *Quantum numbers for particles in de Sitter space.* J. Math. Phys., **17**, (1976), 717–728.