Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 241–256

УДК 517.5

В.М. Коваленко

НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ

vmkovalenko@ukr.net

Скінченні та нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел

In this paper we consider topological and metric properties of infinite arithmetic sum of an infinite sequence of finite sets of the complex numbers.

У даній роботі розглядаються тополого-метричні властивості множин, які представляють собою нескінченні арифметичні суми послідовностей скінченних множин комплексних чисел.

1 Вступ

У працях Мінковського була введена бінарна операція над множинами A і B лінійного простору V, визначена рівністю

$$A \oplus B = \{c = a + b : \ a \in A, \ b \in B\}. \tag{1}$$

Її називають арифметичною [14, 15] або векторною [6] сумою множин A і B. Арифметична сума $A \oplus B$ має просту геометричну інтерпретацію, виражену наступною рівністю:

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} t_a(B) = \bigcup_{b \in B} t_b(A), \quad \text{де} \quad t_c(x) = x + c. \tag{2}$$

Крім арифметичної суми множин використовується операція множення множини лінійного простору на скаляр: $\lambda A = \{\lambda a : \ a \in A\}$. Сам Мінковський використовував ці операції при дослідженні властивостей лінійних комбінацій многогранників [5]. Взагалі кажучи, арифметична сума не успадковує ні топологічних, ні метричних властивостей множин-доданків. Одним з яскравих прикладів цьому є арифметична сума двох класичних множин Кантора $C = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} : \ a_k \in \{0,1\}\}$. Як відомо [3], $C \oplus C = [0,2]$, тобто в цьому випадку арифметична сума двох ніде не щільних множин нульової міри Лебега є зв'язною множиною додатної міри Лебега. У роботах [14, 15] досліджувались топологічні та метричні властивості арифметичних сум множин канторівського типу. Крім самостійного інтересу ці результати є корисними при дослідженні структури згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин канторівського типу. Нетривіальний інтерес викликають нескінченні лінійні комбінації множин, зокрема при дослідженні нескінченних згорток Бернуллі (симетричних та несиметричних). Як відомо [7], спектр нескінченної згортки Бернуллі може бути відрізком, об'єднанням відрізків, досконалою, ніде не щільною множиною нульової або додатної міри Лебега. А по суті, він є арифметичною сумою зліченного числа двоелементних множин – спектрів розподілів випадкових величин - доданків. Множина неповних сум абсолютно збіжного ряду [2, 13] також є арифметичною сумою зліченного числа двоелементних множин. Аналогічна ситуація спостерігається при аналізі випадкових величин типу Джессена-Вінтнера [10]. Ключовим моментом в наведених прикладах є те, що арифметична сума зліченного числа скінченних множин є континуальною множиною, яка також може мати додатну міру Лебега. У роботах, присвячених дослідженню властивостей згаданих множин, не приділяли достатньо уваги можливості їх представлення нескінченними арифметичними сумами більш простих (скінченних) множин. Проте в деяких випадках такий підхід є зручним при дослідженні властивостей суми нескінченного числа множин в термінах величин, що характеризують множини-доданки. У даній роботі ми розглядаємо поняття нескінченної арифметичної суми множин, досліджуємо властивості множин, які є нескінченними арифметичними сумами скінченних підмножин комплексної площини, в залежності від властивостей множин-доданків.

2 Нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел, Σ-множини

Нехай $\mathbb{C}$ – нормований простір комплексних чисел $z = x + iy$ з нормою $\|z\| = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Арифметичною сумою n числових множин $A_1, \dots, A_n$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k$) називається множина елементів виду $e = a_1 + \dots + a_n$, де $a_k \in A_k$ $(k = 1, \dots, n)$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k = \{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k : \ a_k \in A_k, \ k = 1, \dots, n\}$.

Означення 1. Нескінченною арифметичною сумою послідовності числових множин $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) називатимемо топологічну границю (якщо вона існує) послідовності множин $S_k = \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$ при $k \to \infty$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k := \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$.

Як відомо [8], топологічна границя послідовності множин є замкненою множиною, отже, $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – замкнена.

Арифметична сума скінченного числа скінченних множин є множиною скінченною, більш цікавою з геометричної точки зору, навіть для скінченних множин-доданків, є сума зліченного їх числа.

Означення 2. Будемо казати, що множина S є Σ-множиною, якщо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, де Z_k $(k \in \mathbb{N})$ – скінченні підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$, для яких виконуються наступні умови:

1)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty, \quad \text{де} \quad \mu_k = \max\{|z| : \ z \in Z_k\} \tag{3}$$

2) серед множин Z_k існує нескінченна кількість множин, що містять не менше двох елементів.

Очевидно, що елементи множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ визначаються сумами абсолютно збіжних рядів виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, де $z_k \in Z_k$. Таким чином, якщо

$Z_k = \{z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{m_k k}\}$ $(m_k, k \in \mathbb{N})$, то

$$S = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Z_k = \{\sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} : \ z_{i_k k} \in Z_k\}. \tag{4}$$

Позначимо $I_k := \{1, \dots, m_k\}$, $I := \{(i_1, \dots, i_k, \dots) : i_k \in I_k, \ k \in \mathbb{N}\}$. Між множинами I та S можна встановити відповідність σ наступним чином:

$$\sigma : \quad (i_1, \dots, i_k, \dots) \to \sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} \tag{5}$$

Довільній послідовності $i = (i_1, \dots, i_k, \dots) \in I$ відповідає єдине комплексне число, що є сумою ряду $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} \in S$, тобто відповідність σ є відображенням. Оскільки кожний елемент множини S ставиться у відповідність деякому елементу (послідовності) i з множини I і при цьому різним послідовностям $i, j \in I$ можуть (в загальному випадку) відповідати комплексні числа, які визначаються рядами з рівними сумами, то відповідність σ є сюр'єктивним відображенням (ін'єктивність має місце лише в окремих випадках).

Лема 1. *Довільна Σ-множина є компактною.*

Доведення. Оскільки S є підмножиною скінченновимірного евклідового простору, нам достатньо показати, що вона є замкненою та обмеженою. Замкненість S випливає з її означення як топологічної границі послідовності множин. Покажемо, що S обмежена. Нехай z – довільна точка множини S. Тоді існують $z_k \in Z_k$ такі, що $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. Враховуючи нерівність (3), маємо $\|z\| = |\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty$. Звідси випливає, що множина S міститься в замкненому крузі скінченного радіуса M з центром в початку координат і, значить, є обмеженою. Лему доведено.

При дослідженні властивостей Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ зручно використовувати так звані циліндри (циліндричні множини), в сенсі наступного означення.

Означення 3. Нехай $(c_1, \dots, c_k)$ – фіксований упорядкований набір, де $c_j \in I_j$ $(j = \overline{1,k})$. Циліндром рангу k з основою $c_1 \dots c_k$ називається множина

$$S_{c_1 \dots c_k} = \{x = \sum_{m=1}^{\infty} z_{i_m m} : \ i_m = c_m \ (m = 1, \dots, k), \ z_{i_m m} \in Z_m\}. \quad (6)$$

Циліндри є компактними, а також володіють наступними властивостями: 1) $S_{c_1 \dots c_k c_{k+1}} \subset S_{c_1 \dots c_k}$; 2) $S = \bigcup\limits_{(c_1, \dots, c_k)} S_{c_1 \dots c_k}$; 3) циліндри одного рангу є конгруентними; 4) $d(S_{c_1 \dots c_k}) \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$; 5) циліндр k-го рангу повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ (якщо циліндри є центрально-симетричними, то $R_k = \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$); 6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{c_1 \dots c_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{c_k k}\}$.

Доведемо, наприклад, четверту властивість. Нехай $S_{c_1 \dots c_k}$ – довільний циліндр k-го рангу. Оскільки $S_{c_1 \dots c_k}$ компактна множина, то існують точки $z', z'' \in S_{c_1 \dots c_k}$ такі, що $d(S_{c_1 \dots c_k}) = |z'' - z'|$. З належності точок z', z'' множині $S_{c_1 \dots c_k}$ випливає існування таких послідовностей $(i_1, \dots, i_m, \dots)$ та $(j_1, \dots, j_m, \dots)$, $i_m, j_m \in I_m$, $i_1 = j_1 = c_1, \dots, i_k = j_k = c_k$, що $z' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{i_m m}$, $z'' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{j_m m}$. Тоді $d(S_{c_1 \dots c_k}) = |z'' - z'| = |\sum\limits_{m=k+1}^{\infty} (z_{j_m m} - z_{i_m m})| \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Що і треба було довести.

Позначимо $l(Z_k) := \min\limits_{\substack{u, v \in Z_k \\ u \neq v}} |u - v|$.

Лема 2. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m) \quad (7)$$

(або $l(Z_k) > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ у випадку, коли всі циліндри є центрально-симетричними), то циліндри (6) *одного рангу попарно не перетинаються.*

Доведення. Нехай r–довільне фіксоване натуральне число, $S_{p_1\ldots p_r}$ і $S_{q_1\ldots q_r}$ – довільні циліндри r-го рангу. Оскільки $(p_1,\ldots,p_r) \neq (q_1,\ldots,q_r)$, то існує такий номер $s \in \{1,\ldots,r\}$, що $p_j = q_j$ $(j = 1,\ldots,s-1)$ і $p_s \neq q_s$. Розглянемо циліндри $S_{p_1\ldots p_s}$ і $S_{q_1\ldots q_s}$. За властивістю 5 циліндрів множина $S_{p_1\ldots p_s}$ може бути покрита замкненим кругом радіуса $R = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m)$. Позначимо цей круг ω_1. Множина $S_{q_1\ldots q_s}$ є образом множини $S_{p_1\ldots p_s}$ при паралельному перенесенні $t(z) = z + \sum\limits_{m=1}^{s}(z_{q_m m} - z_{p_m m}) = z + z_{q_s s} - z_{p_s s}$ (властивість 3 циліндрів). При цьому круг $\omega_2 = t(\omega_1)$ покриває множину $S_{q_1\ldots q_s}$. Відстань L між центрами кругів ω_1, ω_2 дорівнює $|z_{q_s s} - z_{p_s s}|$. Позначимо $\rho(U,V)$ відстань між множинами $U,V \subset \mathbb{C}$, в тому сенсі, що $\rho(U,V) = \inf\limits_{u\in U, v\in V} |u-v|$. Очевидно, що $\rho(\omega_1,\omega_2) = \max\{0, L-2R\}$. Якщо $\delta = L - 2R > 0$, то $\rho(\omega_1,\omega_2) = \delta > 0$ і $\omega_1 \bigcap \omega_2 = \varnothing$. Враховуючи умову теореми та значення величин L та R, маємо: $\delta = |z_{q_s s} - z_{p_s s}| - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) \geq l(Z_s) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) > 0$. Таким чином, замкнені круги ω_1, ω_2 не мають спільних точок і знаходяться на відстані $\delta > 0$ один від одного. Оскільки $S_{p_1\ldots p_r} \subset S_{p_1\ldots p_s} \subset \omega_1$, $S_{q_1\ldots q_r} \subset S_{q_1\ldots q_s} \subset \omega_2$, то $\rho(S_{p_1\ldots p_r}, S_{q_1\ldots q_r}) \geq \rho(\omega_1,\omega_2) = \delta > 0$. Звідси випливає, що $S_{p_1\ldots p_r} \bigcap S_{q_1\ldots q_r} = \varnothing$. У свою чергу, з довільності вибору $r \in \mathbb{N}$ та наборів $(p_1,\ldots,p_r)$ і $(q_1,\ldots,q_r)$ випливає, що при виконанні умов теореми циліндри одного рангу попарно не перетинаються. Так само доводиться випадок, коли всі циліндри є центрально-симетричними. Лему доведено.

Теорема 1. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність* (7)*, то множина S є: 1) цілком незв'язною; 2) континуальною.*

Доведення. 1. Нагадаємо, що множина називається цілком незв'язною, якщо компонента кожної її точки складається з однієї цієї точки [1]. Нехай z – довільна точка множини S. Позначимо C_z компоненту точки z, тобто найбільшу зв'язну підмножину множини S, що містить точку z. Оскільки $z \in S$, то існує така послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, що $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{a_n n}$. Тоді $z \in S_{a_1\ldots a_k}$ для кожного натурального k. Нехай $I^k := \prod\limits_{m=1}^{k} I_m$, $I_a^k := I^k \setminus \{(a_1,\ldots,a_k)\}$. За властивістю

2 циліндрів $S = \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in I^k} S_{i_1\ldots i_k}$. Оскільки циліндри одного рангу попарно не перетинаються, то $S \setminus S_{a_1\ldots a_k} = \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_a^k} S_{i_1\ldots i_k}$ і, значить, множина $S \setminus S_{a_1\ldots a_k}$ є замкненою як об'єднання скінченного числа замкнених множин. Крім того $S_{a_1\ldots a_k} \bigcap (S \setminus S_{a_1\ldots_k}) = \varnothing$ і $S_{a_1\ldots a_k} \bigcup (S \setminus S_{a_1\ldots_k}) = S$. Таким чином, непорожня зв'язна множина C_z міститься в об'єднанні замкнених диз'юнктних множин $S_{a_1\ldots a_k}$ і $S \setminus S_{a_1\ldots a_k}$. Як відомо [1], з цього випливає, що вона міститься лише в одній з цих множин. Враховуючи, що $z \in S_{a_1\ldots a_k} \bigcap C_z$, робимо висновок, що $C_z \subset S_{a_1\ldots a_k}$. Останнє включення має місце для довільного натурального k, тому $C_z \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1\ldots a_k}$. За властивістю 6 циліндрів $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1\ldots a_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{a_k k}\} = \{z\}$, тобто $C_z \subset \{z\}$. З іншого боку, $\{z\} \subset C_z$, тому $C_z = \{z\}$, що і треба було довести.

2. Відповідність σ (5) є сюр'єктивним відображенням множини I на множину S. Покажемо, що якщо виконується нерівність (7), то відображення σ буде також і ін'єктивним, тобто для довільних $i, j \in I$ якщо $i \neq j$, то $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Дійсно, якщо $i = (i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, $j = (j_1, \ldots, j_k, \ldots)$, то нерівність $i \neq j$ означає, що існує такий номер p, що $i_p \neq j_p$. Тоді $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$ та $\sigma(j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{j_k k}$ належать різним циліндрам p-го рангу – $S_{i_1\ldots i_p}$ та $S_{j_1\ldots j_p}$ відповідно. З умови теореми та твердження леми 2 випливає, що $S_{i_1\ldots i_p} \cap S_{j_1\ldots j_p} = \varnothing$ і, значить, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Таким чином, при виконанні умови теореми відображення σ є бієктивним. Значить, множини I та S мають однакову потужність. Покажемо, що множина I континуальна. Для цього спочатку відмітимо, що з умови теореми випливає виконання для всіх натуральних k нерівності $d(Z_k) \geq l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Тобто $d(Z_k) > 0$ для всіх натуральних k. Звідки маємо, що кожна з множин Z_k містить принаймні два різних елемента. Тоді для множин індексів I_k маємо включення $\{1, 2\} \subset I_k \subset \mathbb{N}$, з якого, у свою чергу, випливає наступне:

$$\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \subset \prod_{k=1}^{\infty} I_k \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \tag{8}$$

Множина $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ складається з усіх можливих послідовностей чисел 1 і 2, а множина $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – з усіх можливих послідовностей натуральних чисел. Множини $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ є континуальними, оскільки, як відомо [4], вони рівнопотужні з множиною Кантора та з множиною всіх ірраціональних чисел інтервала $(0,1)$ відповідно, які, у свою чергу, є відомими прикладами множин потужності континууму. Тоді, враховуючи включення (8), з континуальності множин $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ випливає континуальність множини $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, а з нею і множини S. У випадку, коли циліндри є центрально-симетричними доведення аналогічне. Теорему доведено.

З означення Σ-множин та властивостей абсолютно збіжних рядів випливає, що для довільної Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} Z_j$ має місце формула:

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} Z_j = \bigoplus_{\alpha \in A} \left(\bigoplus_{j \in J_\alpha} Z_j \right), \tag{9}$$

де $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – довільне розбиття множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ на непорожні диз'юнктні підмножини, тобто $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} J_\alpha, \quad J_\alpha \bigcap J_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$. (Множина A скінченна або зліченна і кожна множина J_α зліченна або скінченна).

Теорема 2. *Кожна Σ-множина $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ є досконалою множиною потужності континууму.*

Доведення. Спочатку доведемо, що S є континуальною. Оскільки множина S є образом множини $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ при сюр'єктивному відображенні σ, що задається відповідністю (5), то потужність множини S не перевищує потужність множини I. Як було показано в ході доведення другої частини теореми 1, множина I є континуальною, тому потужність множини S не перевищує потужність континууму.

Покажемо тепер, що потужність множини S не менше ніж потужність континууму. Оскільки $0 \leq d(Z_k) \leq 2\mu_k$ і за означенням Σ-множини ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k$ збігається, то збіжним буде і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(Z_k). \tag{10}$$

Згідно з означенням Σ-множини існує така нескінченна множина $A \subset \mathbb{N}$, що при $a \in A$ множина Z_a містить принаймні два елемента. Разом зі скінченністю множин Z_k це означає, що $l(Z_a) > 0$ при $a \in A$. Занумеруємо елементи множини A у порядку їх зростання: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Оскільки додатний ряд (10) збіжний, то $r_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, де $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} d(Z_k)$ – n-й залишок ряду (10). Тому існує таке натуральне число n_1, що $l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} r_{n_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty} d(Z_k)$. У свою чергу, оскільки A є нескінченною підмножиною множини натуральних чисел, то існує таке натуральне число k_1, що $n_1 \leq a_{k_1}$. Очевидно, що $l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_1}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Так само існує натуральне число n_2 таке, що $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=n_2+1}^{\infty} d(Z_k)$ і, відповідно, натуральне число k_2 таке, що $n_2 \leq a_{k_2}$. При цьому $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_2}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Продовжуючи цей процес, отримаємо нескінченну, строго зростаючу послідовність натуральних чисел: $a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}, \dots$ Покладемо для зручності $k_0 = 1$ і розглянемо множину $A_1 = \{a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_m}, \dots\}$. Враховуючи правило, за яким відбирались елементи множини A_1, для множин Z_k при $k \in A_1$ маємо $l(Z_{a_{k_m}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_m}+1}^{\infty} d(Z_k) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_{m+1}}}^{\infty} d(Z_k) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} d(Z_{a_{k_j}})$, де $m = 0, 1, 2, \dots$ Таким чином, для послідовності множин $\{Z_k\}_{k \in A_1}$ виконуються умови теореми 1 і, значить, множина $S_{A_1} := \bigoplus\limits_{k \in A_1} Z_k = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} Z_{a_{k_m}}$ є континуальною. Якщо $A_1 = \mathbb{N}$, то $S_{A_1} = S$ і, значить, множина S є континуальною. Розглянемо тепер випадок, коли $A_1 \subset \mathbb{N}$, причому $A_1 \neq \mathbb{N}$. Позначимо $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1$ і, відповідно, $S_{A_2} := \bigoplus\limits_{k \in A_2} Z_k$ (сумування здійснюється за непорожньою множиною індексів A_2), тоді, згідно (9), маємо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} Z_k = \bigoplus\limits_{k \in \bigcup\limits_{t=1}^{2} A_t} Z_k = \bigoplus\limits_{t=1}^{2} \left(\bigoplus\limits_{k \in A_t} Z_k \right) = S_{A_1} \oplus S_{A_2}$. Звідси, враховуючи рівність (2), маємо $S = S_{A_1} \oplus S_{A_2} = \bigcup\limits_{c \in A_2} t_c(S_{A_1})$, де $t_c(S_{A_1})$

– образ множини S_{A_1} при паралельному перенесенні $t_c(z) = z + c$. Множини $t_c(S_{A_1})$ та S_{A_1} рівнопотужні і, значить, і в цьому випадку множина S є континуальною як об'єднання непорожньої сукупності континуальних множин. Відмітимо також, що аналогічними міркуваннями можна довести континуальність кожного циліндра довільного рангу.

Тепер доведемо, що множина S досконала. Оскільки вона замкнена (теорема 1), то нам треба показати, що вона не містить ізольованих точок. Розглянемо довільну точку $p \in S$. Згідно з означенням множини S, існує така послідовність $(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots) \in I$, що точка p має представлення виду $p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$, де $z_{i_k k} \in Z_k$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що в ε-околі U точки p (тобто у відкритому крузі радіуса ε з центром в точці p) міститься принаймні одна точка множини S, відмінна від p. Точка p належить циліндру $S_{i_1 \dots i_k}$ при довільному натуральному k. Згідно з властивістю 5 циліндрів, множина $S_{i_1 \dots i_k}$ повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Оскільки при виконанні умови теореми ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(Z_n)$ є збіжним, то існує такий номер M, що $R_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=M+1}^{\infty} d(Z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для циліндра $S_{i_1 \dots i_M}$ буде мати місце включення $S_{i_1 \dots i_M} \subset U$. Оскільки $S_{i_1 \dots i_M}$ є континуальною підмножиною множини S, то існує принаймні одна точка $p' \in S_{i_1 \dots i_M} \subset S$, яка відмінна від p і належить U (зрозуміло, що таких точок буде навіть континуальна множина). Тобто p не є ізольованою точкою множини S. З довільності вибору точки p випливає, що множина S не містить ізольованих точок. Теорему доведено.

3 Метричні властивості Σ-множин

Спочатку доведемо теорему, яка дає альтернативний спосіб подання Σ-множини S виду (4). При доведенні нами буде використана метрика Хаусдорфа, тому нагадаємо її означення та основні властивості [5, 12].

Нехай X, Y – дві непорожні замкнені та обмежені підмножини метричного простору (M, ρ). Тоді відстань за Хаусдорфом, $h(X, Y)$, між X і Y, що індукована метрикою ρ, визначається рівністю $h(X, Y) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : \ X \subseteq Y_\varepsilon, \ Y \subseteq X_\varepsilon\}$, де $X_\varepsilon := \{y : y \in M, \ \rho(y, X) \leq \varepsilon\}$,

$Y_\varepsilon := \{x : x \in M,\ \rho(x, Y) \le \varepsilon\}$.

Якщо простір M повний і 2^M – множина всіх компактних підмножин M, то хаусдорфова відстань між підмножинами є метрикою в 2^M. Властивості метрики Хаусдорфа: 1) $h(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \le \sup\limits_{i\in I} h(A_i, B_i)$, 2) якщо $A \subset B$, то $h(A, B) \le d(B)$, де $d(B)$ – діаметр множини B, 3) якщо $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, то $h(X, \bigcup\limits_{i\in I} A_i) \le \sup\limits_{i\in I} d(A_i)$.

Теорема 3. *Нехай задано сім'ю компактних множин* $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ $(i_k \in I_k,\ k \in \mathbb{N})$, *які володіють властивостями: 1)* $B_{i_1\ldots i_k} \supset S_{i_1\ldots i_k}$, *2)* $B_{i_1\ldots i_k i_{k+1}} \subset B_{i_1\ldots i_k}$, *3)* $\lim\limits_{k\to\infty} d(B_{i_1\ldots i_k}) = 0$. *Тоді множина* S *може бути подана наступним чином:*

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}. \tag{11}$$

Доведення. Множини $B^k := \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$, як це випливає з властивості 2 множин $B_{i_1\ldots i_k}$, утворюють монотонно спадну послідовність: $B^1 \supset B^2 \supset \ldots \supset B^k \supset \ldots$ Тому існує границя послідовності $\{B^k\}$, причому $\operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k$. Покажемо, що ця границя співпадає з множиною S. Відмітимо спочатку, що множини B^k $(k \in \mathbb{N})$ є компактними як скінченні об'єднання компактних множин. Згідно з теоремою (1) множина S також є компактною. У просторі всіх компактних підмножин комплексної площини топологічна збіжність послідовності $\{B^k\}$ до границі S рівносильна збіжності в метриці Хаусдорфа. Оскільки

$$h(B^k, S) = h\Big(\bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}, \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} S_{i_1\ldots i_k}\Big) \le \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} h(B_{i_1\ldots i_k}, S_{i_1\ldots i_k}) \le$$
$$\le \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} d(B_{i_1\ldots i_k}) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

то маємо $S = \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$. Теорему доведено.

Зауваження 1. У самій теоремі ми не доводили існування для Σ-множини S сім'ї множин $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ з відповідними властивостями. Очевидно, що такими, наприклад, є опуклі оболонки циліндрів $S_{i_1\ldots i_k}$.

Теорема 4. *Для двовимірної міри Лебега λ Σ-множини S виконується рівність*

$$\lambda(S) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda\Big(\bigcup_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}\Big), \tag{12}$$

де множини $B_{i_1\dots i_k}$ задовольняють умови попередньої теореми.

Доведення. Множина S, циліндри $S_{i_1\dots i_k}$ та множини $B_{i_1\dots i_k}$ є вимірними за Лебегом як компактні множини. Так само, вимірними є і множини $B^k = \bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Крім того, множини B^k утворюють спадну послідовність: $B^1 \supset B^2 \supset \dots \supset B^k \supset \dots$, причому, згідно теореми 3, виконується рівність $S = \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k$. З даної рівності, вимірності множин B^k та неперервності міри Лебега і випливає рівність (12).

Наслідок 1. *Якщо для Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ виконується рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} m_j \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} d(Z_n)\right)^2 = 0$, де m_j – кількість елементів множини Z_j, $d(Z_n)$ – діаметр множини Z_n ($j, n = 1, 2, \dots$), то множина S має нульову двовимірну міру Лебега.*

Лема 3. *Нехай Σ-множина $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ задовольняє наступним умовам: а) всі множини Z_k лежать на одній прямій $l \subset \mathbb{C}$, яка проходить через початок координат; б) для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$d(Z_k) \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m). \tag{13}$$

Тоді множина S є відрізком (на прямій l).

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що l є дійсною віссю комплексної площини. Для зручності занумеруємо елементи z_{ik} множин Z_k за першим індексом у порядку зростання: $z_{ik} < z_{i+1,k}$ ($i = 1, \dots, m_k - 1$). Як випливає з теореми 3 та зауваження 1, множину S

можна подати у вигляді $S = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} \mathrm{conv} S_{i_1\ldots i_k}$. Покажемо, що множина $H_k := \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} \mathrm{conv} S_{i_1\ldots i_k}$ при виконанні нерівності (13) є відрізком, причому одним і тим же для всіх k. Зафіксуємо довільний впорядкований набір $(j_1,\ldots,j_{k-1}) \in \prod\limits_{p=1}^{k-1} I_p$ (нагадаємо, що $I_p = \{1,\ldots,m_p\}$ – множина перших індексів елементів множини Z_p) і розглянемо сукупність опуклих оболонок циліндрів $S_{j_1\ldots j_{k-1}1},\ldots,S_{j_1\ldots j_{k-1}m_k}$. Оскільки в даному випадку циліндри є компактними підмножинами дійсної осі, то $\mathrm{conv} S_{i_1\ldots i_k}$ є відрізком $[\min S_{i_1\ldots i_k}, \max S_{i_1\ldots i_k}]$. З означення та властивостей циліндрів, а також нашої домовленості про нумерацію елементів множин Z_k випливають рівності

$$\min S_{i_1\ldots i_k} = \sum_{p=1}^{k} z_{i_p p} + \sum_{p=k+1}^{\infty} z_{1p}, \quad \max S_{i_1\ldots i_k} = \sum_{p=1}^{k} z_{i_p p} + \sum_{p=k+1}^{\infty} z_{m_p p}. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільні $s,t \in I_k$ та розглянемо відрізки $\mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}s}$ і $\mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}t}$. Якщо виконується нерівність (13), то, враховуючи (14), одержимо: $\max S_{j_1\ldots j_{k-1}s} - \min S_{j_1\ldots j_{k-1}t} \geq -d(Z_k) + \sum\limits_{p=k+1}^{\infty} d(Z_p) \geq 0$.

З останньої нерівності випливає, що $\mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}s} \bigcap \mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}t} \neq \varnothing$. Тоді, у свою чергу, множина $Q_{j_1\ldots j_{k-1}} := \bigcup\limits_{j_k=1}^{m_k} \mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}j_k}$ також буде відрізком (як об'єднання скінченного числа відрізків, кожні два з яких мають непорожній переріз). Очевидно, що $\min Q_{j_1\ldots j_{k-1}} = \min S_{j_1\ldots j_{k-1}}$, $\max Q_{j_1\ldots j_{k-1}} = \max S_{j_1\ldots j_{k-1}}$. Тоді $Q_{j_1\ldots j_{k-1}} = \mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}}$.

Отже, при виконанні умов леми виконується рівність $\bigcup\limits_{j_k=1}^{m_k} \mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}j_k} = \mathrm{conv} S_{j_1\ldots j_{k-1}}$. Використовуючи дану рівність, отримаємо $H_k = \mathrm{conv} S$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, звідки випливає, що $S = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_k = \mathrm{conv} S$. Оскільки S є компактною підмножиною числової прямої, то $\mathrm{conv} S$ є відрізком. Лему доведено.

Розглянемо довільну Σ-множину $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$. Нехай також задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини множини натуральних чисел $\mathbb{N}$: $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots\}$.

Теорема 5. *Якщо множини $Z_{a_{ik}}$ задовольняють умови:*

1) $Z_{a_{ik}} \subset l_i$, де $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ – прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат;

2) для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $d(Z_{a_{ik}}) \leq \sum\limits_{p=k+1}^{\infty} d(Z_{a_{ip}})$ $(i = 1, 2)$;

то множина S має додатну міру Лебега.

Доведення. Нехай $A_3 := \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$. Тоді, оскільки $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{3} A_j$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, згідно (9), маємо рівність

$$S = \bigoplus_{j=1}^{3} \left(\bigoplus_{k \in A_j} Z_k \right). \tag{15}$$

З умов теореми та леми 3 випливає, що множини $S_{A_j} := \bigoplus\limits_{k \in A_j} Z_k$ при $j = 1, 2$ є відрізками (розташованими на відповідних прямих l_j $(j = 1, 2)$). Оскільки прямі l_1 і l_2 непаралельні та не співпадають, то арифметична сума $S_{A_1} \oplus S_{A_2}$ є невиродженим паралелограмом. З (15) та геометричної інтерпретації векторної суми множин випливає рівність $S = \bigoplus\limits_{j=1}^{3} S_{A_j} = (S_{A_1} \oplus S_{A_2}) \oplus S_{A_3} = \bigcup\limits_{v \in S_{A_3}} t_v(P)$, де $P = S_{A_1} \oplus S_{A_2}$, $t_v(z) = z + v$ $(z \in \mathbb{C})$ – трансляція (паралельне перенесення) на вектор v.

Таким чином, множина S є або невиродженим паралелограмом (при $A_3 = \varnothing$), або об'єднанням конгруентних невироджених паралелограмів (при $A_3 \neq \varnothing$). Звідки випливає, що S має внутрішні точки і, відповідно, додатну двовимірну міру Лебега. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо ряд з комплексними членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\lambda^k$, де $\lambda = \alpha + i\beta$, $|\lambda| < 1$. Позначимо S_λ множину його неповних сум [2], тобто $S_\lambda := \{z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k k\lambda^k : \ \varepsilon_k \in \{0, 1\}\}$. Множина S_λ є Σ-множиною, оскільки може бути подана у вигляді нескінченної арифметичної суми двоелементних множин: $S_\lambda = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$, де $\Lambda_k = \{0, k\lambda^k\}$. У цьому випадку $l(\Lambda_k) = d(\Lambda_k) = k|\lambda|^k$. Нехай $r_k = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} k|\lambda|^k$. Можна показати, що $r_k = -\frac{|\lambda|^{k+1}(k(|\lambda|-1)-1)}{(|\lambda|-1)^2}$. Множини Λ_k є центрально-симетричними, тому такими будуть і всі циліндри. Різниця $l(\Lambda_k) - \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(\Lambda_m) = \frac{|\lambda|^k}{(|\lambda|-1)^2}\left((k-1)(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1)-|\lambda|\right)$ є додатною при $|\lambda| < \frac{1}{2}$ та $k > 1 + \frac{|\lambda|}{(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1)}$. Позначимо $k_0 = [1 + \frac{|\lambda|}{(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1)}]$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Тоді, згідно теореми 1, множина $\bigoplus\limits_{k=k_0+1}^{\infty} \Lambda_k$ є цілком незв'язною при $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Відповідно, множина $S_\lambda = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ є об'єднанням скінченного числа конгруентних цілком незв'язних множин.

2. Нехай $\lambda = \rho e^{\frac{2\pi i}{s}}$, де $0 < \rho < 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$. Згідно (9) множину S_λ можна подати у вигляді наступної арифметичної суми: $S_\lambda = S_{A_1} \oplus S_{A_2} \oplus \cdots \oplus S_{A_s}$, де $S_{A_t} = \bigoplus\limits_{k \in A_t} \Lambda_k$, $A_t = \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv t(\mathrm{mod} s)\}$, $t = \overline{1,s}$. Тоді $S_{A_t} = e^{\frac{2\pi t i}{s}} R_t$, де $R_t = \{\sum\limits_{k \in A_t} \varepsilon_k k \rho^k : \ \varepsilon_k \in \{0,1\}\}$, $t = \overline{1,s}$. Множина R_t є множиною неповних сум знакододатного ряду $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(t + js)\rho^{t+js}$. Як відомо [11] вона буде відрізком, якщо для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ виконується нерівність $(t+ns)\rho^{t+ns} \leq \sum\limits_{j=n+1}^{\infty}(t+js)\rho^{t+js}$, яка, в свою чергу, виконується при $\frac{1}{2} \leq \rho^s < 1$. Тоді, при $\sqrt[s]{\frac{1}{2}} \leq \rho < 1$ відрізком буде кожна з множин $S_{A_t} (t = \overline{1,s})$. При цьому, при $s \geq 3$ серед відрізків $S_{A_t} (t = \overline{1,s})$ буде принаймні два непаралельних, тому арифметична сума $\bigoplus\limits_{t=1}^{s} S_{A_t}$ є многокутником. Отже, при $\sqrt[s]{\frac{1}{2}} \leq |\lambda| < 1$ та $\arg(\lambda) = \frac{2\pi}{s}$, де $s \geq 3$ – фіксоване натуральне число, множина S_λ є многокутником.

Література

[1] П.С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М. : Наука, 1977.

[2] Я.В. Гончаренко, М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін. *Топологометричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній.* Науковий часопис НПУ

імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. № 6, (2005), 210–224.

[3] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1972.

[4] К. Куратовский. *Топология.* М.: Мир, 1966, **1**. с.

[5] К. Лейхтвейс. *Выпуклые множества.* М.: Главная редакция физ.-мат. лит., 1985.

[6] Е. Лукач. *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979.

[7] М.В. Працьовитий. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* . Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998.

[8] Ф. Хаусдорф. *Теория множеств.* М.: ОНТИ, 1937.

[9] Л. Шварц. *Анализ.* М.: Мир, 1972, **1**.

[10] О.В. Школьний, М.В. Працьовитий. *Один клас сингулярних комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера.* Укр. мат. журнал, **49**, $N^{\underline{o}}$ 12, (1997), 1653–1660.

[11] J.A. Guthrie, J.E. Nymann. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series* Colloq. Math. **55**, (1988), 323—327.

[12] J.E. Hutchinson. *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., **30**, (1981), 713–747.

[13] S. Kakeya. *On the partial sums of an infinite series* Science Reports Tôhoku Imp. Univ. **1**, № 3, (1914), 159–163.

[14] P. Mendes, F. Oliveira. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets*, Nonlinearity **7** , (1994), 329–343.

[15] B. Solomyak. *On the measure of arithmetic sums of Cantor sets*, Indagationes Math., N.S. **8**, (1997), 133–141.