Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 257–315

УДК 517.9+531.19+530.145

*О.Л. Ребенко, В.А. Болух*

*Інститут математики НАН України, Київ*

**rebenko@imath.kiev.ua**

# Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка

*Присв'ячується 80-річчю з дня народження*
*академіка Д.Я. Петрини*

This paper discusses the mathematical aspects of the description of infinite systems of statistical mechanics and their relation to the infinite-dimensional analysis on phase spaces of such systems.

В роботі розглядаються математичні аспекти опису нескінченних систем статистичної механіки та їх зв'язок з нескінченновимірним аналізом на фазових просторах таких систем.

## 1 Вступ

Статистична механіка виникла в кінці XIX – на початку XX століття в роботах Больцмана, Гіббса, Максвелла. Мета цієї, на той час нової, науки було створення математичного апарату для дослідження систем, що складаються з надзвичайно великої кількості елементів. Такі фізичні системи моделюють гази, рідини, кристали, а також можуть описувати взаємодії у великих біологічних, екологічних, економічних системах тощо.

Звичайно, на перший погляд, усі відомі системи, які ми намагаємося вивчити, є скінченними. Наприклад, газ у колбі має скінченне число атомів чи молекул. Але з елементарної фізики відомо, що в одному *молі* будь якої речовини міститься приблизно $6 \cdot 10^{23}$ молекул (закон Авогадро). Отже, навіть в невеликому об'ємі $1cm^3$ міститься $10^{23}$ – $10^{25}$ молекул. Тому здоровий глузд нам підкаже, що слідкувати за такою кількістю частинок це те саме, що слідкувати за нескінченною кількістю частинок.

*Отже, нескінченні системи є деякою математичною ідеалізацією великих скінченних систем, яку зручно застосувати при вивченні реальних великих систем.*

Реальна фізична чи біологічна система у кожний момент часу $t$ займає якусь конфігурацію $\widetilde{\gamma}(t)$ фазового простору $\widetilde{\Gamma}$. Під впливом внутрішніх або ще й зовнішніх взаємодій така система перебуває у постійному русі, тобто кожна частинка описує якусь неперервну траєкторію, а мікроскопічний стан усієї системи визначається усіма такими траєкторіями. Але для дослідження системи необхідно знати не мікроскопічну поведінку, а макроскопічні наслідки такої поведінки, тобто деякі макроскопічні характеристики: тиск, енергія, теплоємність тощо. Такі фізичні характеристики називають *спостережуваними величинами*. Спостережувані величини описують вимірними функціями на фазовому просторі, тобто для нескінченних систем це функції від нескінченної кількості змінних. Про те, яким чином будувати такі функції, ми будемо говорити пізніше. Нехай $F(\widetilde{\gamma}(t))$ є такою функцією, яка описує деяку спостережувану величину. Тоді макроскопічна характеристика, яка їй відповідає, і яку ми можемо спостерігати на експерименті, є середнє значення цієї величини. Воно обраховується за відомою формулою:

$$\overline{F} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\widetilde{\gamma}(t))dt. \tag{1}$$

Обрахувати такий інтеграл для реальної системи неможливо.

На початку XX століття американський фізик-теоретик Джозайя

Віллард Гіббс запропонував замість однієї системи ввести ансамбль тотожних систем, які кожної миті з якоюсь ймовірністю займають ту чи іншу конфігурацію. Такі однакові екземпляри систем отримали назву *ансамблів Гіббса.*

Основним постулатом Гіббса є існування деякої імовірнісної міри $\mu$ на фазовому просторі $\widetilde{\Gamma}$ :

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} \mu(d\widetilde{\gamma}) \;=\; 1, \tag{2}$$

такої, що

$$\overline{F} =< F(\cdot) >_{\mu}= \int_{\widetilde{\Gamma}} F(\widetilde{\gamma})\mu(d\widetilde{\gamma}). \tag{3}$$

Таким чином, замість детерміністичного опису однієї системи ми розглядаємо статистичний опис поведінки ансамблю ідентичних систем.

Фізичне обґрунтування вигляду такої міри в обмеженому об'ємі було запропоновано Гіббсом ще у 1902 році [1].

Перша половина XX століття була епохою народження квантової механіки. Дослідження із статистичної механіки були досить спонтанними і в більшій мірі відносились до практичних застосувань. Серед результатів, які можна віднести саме до розвитку фундаментальних досліджень статистичної механіки, варто відзначити появу у 1929 році монографії [2] та вивід BBGKY- ієрархії [3, 4, 5, 6]. Математичні обґрунтування існуючих на той час досліджень із статистичної механіки були висвітлені в монографії А. Я. Хінчіна [7].

Надзвичайно важливими для теорії гратчастих моделей були роботи Е. Ізінга [8], Р. Е. Пайерлса [9] та Л. Онзагера [10], які на декілька десятиліть наперед визначили напрямки досліджень у цій області і сприяли появі моделі *гратчастого газу* [11].

В 1946 р. в монографії М. М. Боголюбова [4] були намічені шляхи математичного обґрунтування термодинамічного граничного переходу в рамках формалізму канонічного ансамблю Гіббса, а також розроблений загальний метод знаходження граничних $m$-частинкових функцій розподілу ( *кореляційних функцій*) у вигляді формальних рядів за степенями густини частинок у системі. Строге обґрунтування збіжності таких рядів для випадку позитивного парного потенціалу взаємодії було опубліковане в роботі [12] (див. детальне доведення в [13]). Узагальнення цих результатів на випадок парних стійких потенціалів взаємодії були зроблені в роботі М. М. Боголюбова, Д. Я. Петрини і Б. І. Хацета [14]. В 1963 р. Д. Рюель [66] знову запропонував подібний метод, який спирався на дослідженні рівнянь Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю. Треба також згадати роботу [16], в якій проблема термодинамічної границі була вирішена для термодинамічних потенціалів і яка, фактично, узагальнювала дослідження Ван-Хова [17] і Янга-Лі [18] на випадок більш загальних потенціалів взаємодії. Ці роботи були значним поштовхом для математичних досліджень нескінченних розріджених систем статистичної механіки. Вони були детально викладені в монографії [19], де також можна знайти значну бібліографію робіт інших авторів (див. також лекції Мінлоса [20] та монографію [21] і посилання, що містяться в них).

Але побудова стану в розумінні ідеї Гіббса для нескінченної системи ще залишалась відкритою проблемою. Вперше цю проблему розглянули у 1967 році незалежно Р. А. Мінлос [22, 23] і Д. Рюель [24]. Якщо у Рюеля це був алгебраїчний підхід, що опирався на модні на той час ідеї Сігала, Хаага, Кастлера і тому був більш абстрактним, то Мінлос побудував сімейство гіббсових мір на циліндричних множинах нескінченновимірного конфігураційного простору і визначив гіббсовий стан (гіббсову міру) як граничну міру. Ця міра будувалась як продовження цього сімейства на всю $\sigma$-алгебру нескінченновимірного простору конфігурацій.

В серії робіт Добрушина [25, 26, 27, 28, 29, 30] було приведене більш загальне визначення гіббсової міри за допомогою умовних розподілів. Практично в той же час майже аналогічний підхід був також запропонований Ленфордом і Рюелем [31]. Критерієм гіббсовості міри на просторі нескінченних конфігурацій є умова, що вона задовольняє рівняння Добрушина-Ленфорда-Рюеля (ДЛР). Ключовою у цьому підході була робота Рюеля [32], в якій була визначена система з надстійкою взаємодією і встановлено, що граничні кореляційні функції такої системи задовольняють нерівності:

$$\rho_m(x_1, ..., x_m) \ \leq \xi^m \tag{4}$$

при довільних значеннях густини частинок в системі і довільній температурі. Це дає змогу довести, що нескінченна послідовність кореляційних функцій $\rho = (\rho_m)_{m\geq 1}$ задовольняє систему рівнянь Кірквуда-Зальцбурга при довільних значеннях густини частинок в системі і довільній температурі, а відповідна міра Гіббса задовольняє рівняння ДЛР. Для розріджених систем (тобто при малих значеннях густини частинок в системі) рівняння Кірквуда-Зальцбурга мають єдиний розв'язок, якому відповідає єдиний гіббсовий стан. Взагалі, умова (4) не є необхідною. В роботі [33] А. Ленард показав, що для існування відповідної міри достатньо виконання більш слабкої умови:

$$\rho_m(x_1, ..., x_m) \ \leq \xi^m m^{2m}. \tag{5}$$

В роботах [34, 35] Ленард детально проаналізував зв'язки довільної міри $\mu$ на просторі нескінченних конфігурацій з її кореляційною мірою $\rho$, яка визначається на просторі скінченних конфігурацій. Деякі аспекти цього аналізу та його узагальнення були продовжені в роботі [36].

Основна мета цього короткого огляду продемонструвати глибокий зв'язок математичного опису нескінченних систем статистичної механіки і методів нескінченновимірного аналізу на фазових просторах таких систем. Мабуть, вперше аналіз конфігураційних просторів та квазінваріантних мір (такими є міра Пуассона та міра Гіббса) на них розглянули А. М. Вершик, І. М. Гельфанд і М. І. Граєв [37] та Р. С. Ісмагілов [38]. В більш пізніх роботах С. Албаверіо, Ю. Г. Кондратьєва і М. Рьокнера [39, 40] був зроблений детальний теоретико-множинний аналіз цих просторів та введені структури диференціальної геометрії. Там же читач може знайти детальну бібліографію робіт за цією тематикою та її застосування в математичній фізиці.

Важливим кроком вперед була поява нових технічних інструментів для побудови кластерних та полімерних розкладів в статистичній механіці. Так, в роботі [41] було помічено, що використання властивості нескінченноподільності міри Пуассона в побудові кластерних розкладів для кореляційних функцій значно спрощує саму побудову і оцінки коефіцієнтів розкладу. Ця властивість була використана в роботах [42, 43, 44, 45, 46, 47]. В роботі [48] були запропоновані нові розклади за щільністю конфігурацій. Якщо розбити простір $\mathbb{R}^d$ на маленькі гіперкуби, то для кожної конфігурації весь простір розіб'ється на області, в яких у кожному кубику міститься дві і більше точок конфігурації (*щільні конфігурації*) і області, в яких є тільки одна точка в кожному кубику, або їх зовсім немає(*розріджені конфігурації*). Звичайно, це досить умовне розбиття, бо якщо розміри кубиків є досить маленькі, то навіть області з розрідженими конфігураціями будуть мати щільну множину точок. Тепер, якщо потенціал взаємодії має сильну позитивну сингулярність в нулі, то ймовірність щільних конфігурацій є малою. Цей елементарний факт був використаний для побудови розкладів. За допомогою таких розкладів вдалося значно спростити доведення суперстійкої оцінки Рюеля (4) і навіть трохи її покращити (див. роботи [48, 49, 50, 51]). Виявилося також, що для розрахунків основних термодинамічних потенціалів та кореляційних функцій нескінченних систем достатньо розглядати ці функції тільки на розріджених конфігураціях (див. [52, 53, 54]), розглядаючи їх як апроксимацію відповідних функцій неперервних нескінченних систем класичної статистичної механіки з посилено надстійкою взаємодією [55]. Це, в свою чергу, дає можливість розглядати нескінченну систему частинок, конфігураційний простір якої складається з розріджених конфігурацій, як самостійну модель *коміркового газу* [56]. Ця модель є проміжною між моделями *гратчастих газів* і неперервними системами статистичної механіки.

# 2 Простори конфігурацій систем статистичної механіки

В роботі буде розглядатися нескінченна система тотожних точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, взаємодію яких будемо описувати парним потенціалом $V_2(x,y) = \phi(|x - y|)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Ми не будемо детально розглядати теоретико-множинну та топологічну структуру просторів конфігурації, відсилаючи читача до вже згаданих робіт [20, 34, 35, 36, 37, 39, 40], а лише наведемо необхідні визначення та деякі основні властивості цих просторів.

## 2.1 Простори нескінченних конфігурацій

Нехай $\sigma$ – це міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, борелівську $\sigma$-алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ усі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \, |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{6}$$

де $|A|$ є число, що означає кількість точок в $A$. Це досить природне визначення з точки зору застосувань, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченна кількість частинок. З визначення (6) видно, що $\Gamma$ не є лінійним простором. Але $\Gamma$ можна зробити топологічним нелінійним простором: кожний елемент $\gamma \in \Gamma$ можна ототожнити з невід'ємною мірою Радона:

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \sum_{x\in\gamma} \delta_x \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d), \tag{7}$$

де $\delta_x$–міра Дірака:

$$\delta_x(f) = f(x), \quad f \in C_0(\mathbb{R}^d), \tag{8}$$

де $C_0(\mathbb{R}^d)$–простір неперервних функцій з компактним носієм, а $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$–простір невід'ємних мір Радона на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Відповідна диференціальна міра

$$\gamma(d\sigma) \ = \ \sum_{x\in\gamma}\delta_x d\sigma, \ \ d\sigma = \sigma(dx) = dx. \tag{9}$$

Простір $\Gamma$ можна наділити топологією, яка індукована грубою (*vague*) топологією в $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, що визначається як найслабша топологія, по відношенню до якої відображення

$$\Gamma \ \ni \ \gamma \mapsto <\gamma, f> = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(d\sigma) \ = \ \sum_{x\in\gamma} f(x) \tag{10}$$

є неперервним для кожної $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Нехай $\mathcal{B}(\Gamma)$ відповідна борелівська $\sigma$-алгебра на $\Gamma$.

Можна навести еквівалентний ( може більш прозорий) опис цієї топології на мові збіжності послідовності конфігурацій $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ до конфігурації $\gamma \in \Gamma$.

**Означення 2.1.** Послідовність $\gamma_n$ збігається до $\gamma \in \Gamma$ тоді і тільки тоді, коли для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, такої, що $\gamma \cap \partial\Lambda = \emptyset$ ($\partial\Lambda$ – це межа $\Lambda$) має місце

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n \cap \Lambda| \ = \ |\gamma \cap \Lambda|. \tag{11}$$

Передбазою в цій топології є множини вигляду:

$$\{\gamma \in \Gamma \ | \ \ |\gamma_\Lambda| = N, \ \gamma_{\partial\Lambda} = \emptyset, \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \ N \in \mathbb{N}_0\}. \tag{12}$$

$\mathcal{B}(\Gamma)$ є найменша $\sigma$-алгебра на $\Gamma$, по відношенню до якої усі відображення

$$N_\Lambda \ : \ \Gamma \mapsto \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \ ; \ \gamma \mapsto |\gamma \cap \Lambda| \tag{13}$$

є вимірними для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, тобто

$$\mathcal{B}(\Gamma) \ = \ \sigma\left(\{N_\Lambda \ : \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}\right) \tag{14}$$

Для довільної підмножини $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, але $Y \notin \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, визначимо простір нескінченних конфігурацій $\Gamma_Y$:

$$\Gamma_Y \ = \ \{\gamma \in \Gamma \ | \ \gamma \cap Y^c = \varnothing, \ Y^c := \mathbb{R}^d \setminus Y. \tag{15}$$

На завершення цього підрозділу зауважимо, що якщо частинки системи не мають інших характеристик (крім координат, в яких вони зосереджені), то *фазовий простір* системи збігається з конфігураційним простором Γ. Якщо ж кожна частинка системи має ще інші характеристики, такі як імпульс, спін, заряд, тощо, тоді фазовим простором є так званий *маркований конфігураційний простір* $\widetilde{\Gamma}$ (див., наприклад, [57, 58, 59]). Ми розглянемо найбільш простий фазовий простір класичного точкового газу, кожна частинка якого в довільній точці $x \in \gamma \subset \mathbb{R}^d$ має імпульс $p_x = mv_x \in \mathbb{R}^d$. Кожна точка $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ – це нескінченна множина пар $(x, p_x)$, в яких $x \in \gamma \in \Gamma$, а $p_x \in \mathbb{R}^d$:

$$\widetilde{\Gamma} := \left\{\widetilde{\gamma} = \{(x, p_x)\} \mid x \in \gamma,\ p_x \in \mathbb{R}^d\right\}. \tag{16}$$

## 2.2 Простори скінченних конфігурацій

Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через $\Gamma_0$. Насправді $\Gamma_0$ є підмножиною Γ, але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію. Визначимо спершу конфігураційний простір з фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n,\ n \in \mathbb{N}\},\ \Gamma^{(0)} := \varnothing. \tag{17}$$

Якщо усі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір буде:

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \left\{\gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda\right\}. \tag{18}$$

Тоді простори скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ і в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна представити у вигляді диз'юнктивних об'єднань:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \text{ і } \Gamma_\Lambda := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}. \tag{19}$$

Топологічну структуру в просторах $\Gamma_X^{(n)}(X \in \{\mathbb{R}^d, \Lambda\})$ можна ввести за допомогою відображення множин

$$\widetilde{X}^n := \{(x_1, ..., x_n) \in X^n \mid x_i \in X,\ x_i \neq x_j, \text{ якщо } i \neq j\} \tag{20}$$

в простори $\Gamma_X^{(n)}$:

$$\begin{aligned} sym_X^n : \widetilde{X}^n &\to \Gamma_X^{(n)} \ (n \in \mathbb{N}), \\ (x_1, ..., x_n) &\mapsto \{x_1, ..., x_n\}. \end{aligned} \tag{21}$$

$\sigma$-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ можна ввести аналогічно (14):

$$\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda) = \sigma\left(\{N_{\Lambda'} \restriction \Gamma_\Lambda : \Lambda' \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}\right). \tag{22}$$

Ця $\sigma$-алгебра ізоморфна $\sigma$-алгебрі $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$, яка визначається формулою:

$$\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma) = \sigma\left(\{N_{\Lambda'} : \Lambda' \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \ \Lambda' \subset \Lambda\}\right). \tag{23}$$

Щоб зрозуміти ізоморфізм $\sigma$-алгебр $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ і $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$, визначимо проектор:

$$p_\Lambda : \Gamma \mapsto \Gamma_\Lambda \ ; \ \gamma \mapsto \gamma \cap \Lambda := \gamma_\Lambda. \tag{24}$$

Отже, кожному $\gamma_\Lambda \in \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ співставляється цілий клас $\widetilde{\gamma} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cap \Lambda = \gamma_\Lambda\}$.

Відповідні простори $\widetilde{\Gamma}_0$ і $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ визначаються аналогічно (16), але кількість точок конфігурації $\gamma$ є скінченна і у випадку $\widetilde{x} \in \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_0$ – координатна складова $x \in \mathbb{R}^d$, а у випаду $\widetilde{x} \in \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_\Lambda$ – координатна складова $x \in \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$.

## 2.3 Простори щільних та розріджених конфігурацій

В дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкубики з довжиною ребер $a > 0$, і центри яких розташовані в точках $r \in a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (r^i - a/2) \le x^i < (r^i + a/2), \ i = 1, ..., d\}. \tag{25}$$

Будемо писати $\Delta$ замість $\Delta_a(r)$, якщо не має потреби вказувати, де знаходиться центр гіперкубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$.

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ позначимо через $\overline{\Delta}_{a,\Lambda} := \{\Delta \in \overline{\Delta}_a \mid \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset\}$ мінімальне покриття $\Lambda$ гіперкубиками $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ таким чином, що

$$\Lambda \subseteq \Lambda_a \quad \text{i} \quad \lim_{a \to 0} \Lambda_a \ = \ \Lambda. \tag{26}$$

Розбиття (25) було застосовано Рюелем [32] для доведення нерівності (4). У цьому огляді ми приведемо ідею більш прозорого і простішого доведення нерівності (4) за допомогою кластерних розкладів, які були запропоновані в роботі [48]. Для побудови таких кластерних розкладів введемо два типи конфігурацій. Для довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ введемо простір *розріджених* конфігурацій:

$$\Gamma^{(dil)} = \Gamma^{(dil)}(\Delta) := \left\{ \gamma \in \Gamma | \ |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \text{для всіх } \Delta \in \overline{\Delta} \ \right\} \tag{27}$$

і простір *щільних* конфігурацій:

$$\Gamma^{(den)} = \Gamma^{(den)}(\Delta) := \left\{ \gamma \in \Gamma | \ |\gamma_\Delta| \geq 2, \text{для всіх } \Delta \in \overline{\Delta} \ \right\}. \tag{28}$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ простори $\Gamma_\Lambda^{(dil)}$ і $\Gamma_\Lambda^{(den)}$ визначаються аналогічно згідно формул (18), (19) та (27), (28).

Зрозуміло, що для довільного $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ простір $\Gamma_\Delta \ = \ \Gamma_\Delta^{(dil)} \cup \Gamma_\Delta^{(den)}$, але $\Gamma_\Lambda \ \neq \ \Gamma_\Lambda^{(dil)} \cup \Gamma_\Lambda^{(den)}$ для $\Lambda \neq \Delta$.

Щоб не складалося враження, що розріджені конфігурації описують фізичні системи розріджених газів, наведемо наступне зауваження.

**Зауваження 2.1.** Однією з найважливіших характеристик фізичного стану системи взаємодіючих частинок є густина, тобто кількість частинок в одиниці об'єму. Скільки завгодно велике значення цієї характеристики можна отримати і в рамках опису системи у просторі розріджених конфігурацій, вибираючи розмір $a$ ребер гіперкубиків достатньо малим.

# 3 Міри на просторах конфігурацій неперервних систем

Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спершу в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

## 3.1 Міра Пуассона

Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою *Пуассона* $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі $\Gamma$, де $z > 0$ – це активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок в системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спершу введемо так звану міру *Лебега-Пуассона* (див., наприклад, [39]) $\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$ на просторі скінченних конфігурацій $\Gamma_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або $\Gamma_0$ ) за формулою:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \cdots \int_\Lambda F(\{x_1, ..., x_n\})\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n) = $$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \cdots \int_\Lambda F_n(x_1, ..., x_n)dx_1\cdots dx_n, \tag{29}$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n\geq 0},\ F_n \in L^\infty(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi_{z\sigma}^{\Lambda} := e^{-z\sigma(\Lambda)}\lambda_{z\sigma}^{\Lambda},\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \tag{30}$$

Легко переконатись, використовуючи визначення (29), що сім'я (30) є попарно узгоджена і за теоремою Колмогорова (див., наприклад,

[60]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі $\Gamma$.

Важливою характеристикою міри $\pi_{z\sigma}$ є її перетворення Лапласа. Нехай функція $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ є такою, що існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ таке, що $\operatorname{supp} f \subset \Lambda$. Тоді

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad <\gamma, f> = <p_\Lambda \gamma, f> . \tag{31}$$

За означенням перетворення Лапласа міри $\pi_\sigma$ визначається інтегралом:

$$\begin{aligned} l_{\pi_\sigma}(f) := \int_\Gamma e^{<\gamma,f>}\pi_\sigma(d\gamma) = \int_\Gamma e^{<p_\Lambda\gamma,f>}\pi_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{<\gamma,f>}\pi_\sigma^\Lambda(d\gamma) = \\ = e^{-\sigma(\Lambda)}\int_{\Gamma_\Lambda} e^{<\gamma,f>}\lambda_\sigma^\Lambda(d\gamma) = e^{-\sigma(\Lambda)}e^{\int_\Lambda e^{f(x)}\sigma(dx)} = \\ = e^{\int_{\mathbb{R}^d}(e^{f(x)}-1)\sigma(dx)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Іншою важливою властивістю міри Пуассона є так звана тотожність Мекке:

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} H(x;\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} H(x;\gamma\cup\{x\})\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma) \tag{33}$$

для довільної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції $H$. Цю формулу встановив Н. Р. Кемпбелл [61, 62], а Дж. Мекке [63] показав, що тотожність (33) є необхідною і достатньою умовою того, що $\pi_\sigma$ є пуассонівською мірою з мірою інтенсивності $\sigma$. Формулу (33) легко довести для функції $H$ вигляду:

$$H(x;\gamma) \;=\; h(x)e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}, \quad h,g\in C_0(\mathbb{R}^d). \tag{34}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} h(x)e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma <\gamma,h>e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) = \\ = \frac{d}{d\alpha}\int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) = \frac{d}{d\alpha}e^{\int_{\mathbb{R}^d}(e^{\alpha h(x)+\beta g(x)}-1)\sigma(dx)} = \end{aligned}$$

$$\int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{\alpha h(x)+\beta g(x)}\sigma(dx) =$$
$$= \int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{<\gamma\cup\{x\},(\alpha h+\beta g)>}\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma).$$

Лінійна оболонка множини експоненціальних векторів $\{e^{i<\gamma,f>} \mid f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$ є всюди щільною в $L^2(\Gamma,\pi_\sigma)$ ([64], теорема 3), тому формулу (33) можна розширити на всі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірні функції $H$.

Найбільш важливою характеристикою мір $\pi_{z\sigma}$ та $\lambda_{z\sigma}$, яку ми інтенсивно використовуємо, є властивість нескінченно-подільності (див., наприклад, [65], Розділ 4.4). На мові інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$ цю властивість можна сформулювати у вигляді наступної леми.

**Лема 3.1.** Нехай $X_1\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, $X_2\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і $X_1\cap X_2=\emptyset$, $X_1\cup X_2=\Lambda$. Функції $F_i,\ (i=1,2)$ є $\mathcal{B}(\Gamma_{X_i})$-вимірні. Тоді

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (35)$$

*Доведення.* За означенням (29)

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) =$$
$$=\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_\Lambda \sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n\cap X_1)F_2(\{x\}_1^n\cap X_2) =$$
$$=\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_{X_1} \sigma(dx)+\int_{X_2}\sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n\cap X_1)F_2(\{x\}_1^n\cap X_2) =$$
$$=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\int_{X_1} \sigma(dx)\right)^k\left(\int_{X_2}\sigma(dx')\right)^{n-k} F_1(\{x\}_1^k)F_2(\{x'\}_1^{n-k}) =$$
$$=\int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_\sigma^{X_2}(d\gamma).$$

Для скорочення запису ми використали дещо нестандартне позначення для кратних інтегралів. ■

Наведемо ще одну важливу технічну лему, яка буде використана нижче.

**Лема 3.2.** Для всіх позитивних вимірних функцій $G : \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ і $H : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ на просторі $\Gamma_X$, де $\Gamma_X \in \{\Gamma_0, \Gamma_\Lambda\}$(відповідно $X \in \{\mathbb{R}^d, \Lambda\}$), справедлива наступна рівність:

$$\int_{\Gamma_X} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_X} \int_{\Gamma_X} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\eta). \tag{36}$$

*Доведення.* Нехай $\eta \upharpoonright \Gamma_X^{(k)} = \{x_1, ..., x_k\} := \{x\}_1^k$, $\gamma \upharpoonright \Gamma_X^{(m)} = \{x_{k+1}, ..., x_{k+m}\} := \{x\}_{k+1}^{k+m}$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_X} \int_{\Gamma_X} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\eta) = \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} \int_{X^k} \int_{X^m} G(\{x\}_1^{k+m}) H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^{k+m}) \sigma(dx)^{k+m} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_{X^n} G(\{x\}_1^n) H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^n) \sigma(dx)^n = \\
&= \int_{\Gamma_X} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma).
\end{aligned}$$

■

## 3.2 Міра Гіббса

Визначення міри Гіббса для системи взаємодіючих частинок потребує введення необхідних та достатніх умов на енергію взаємодії між частинками. Наведемо спершу приклади взаємодій, про які піде мова у наступних розділах. У випадку двочастинкового потенціалу взаємодії $V_2(x, y) = \phi(|x - y|)$, де $|x - y|$ – евклідова відстань між частинками $x, y \in \mathbb{R}^d$, а потенціальна енергія взаємодії:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \phi(|x_i - y_j|). \tag{37}$$

### 3.2.1 Основні класи взаємодій

Основними фундаментальними характеристиками системи взаємодіючих частинок є властивості стійкої, надстійкої та посилено надстійкої взаємодії. Умова стійкості є необхідною для коректного термодинамічного опису статистичних систем з нескінченною кількістю частинок, існування граничних кореляційних функцій. Така умова може бути сформульована з допомогою системи нескінченного числа нерівностей, кожна з яких відповідає певній скінченній підсистемі, що складається з $N$ частинок, які розташовані у точках $x_1, ..., x_N$ простору $\mathbb{R}^d$ (див. також [19])наступним чином:

**Означення 3.1.** Взаємодія називається стійкою, якщо для будь-якої підсистеми з кількістю частинок $N \geq 2$ та набором координат $\{x_1, ..., x_N\} \in \mathbb{R}^d$ існує константа $B \geq 0$ така, що

$$U(x_1, ..., x_N) \geq -B\, N. \tag{38}$$

Однією з найважливіших умов, що накладається на потенціал взаємодії між частинками, є умова інтегровності на нескінченності. Це означає, що для будь-яких $R > 0$

$$\int_{|x| \geq R} \phi(|x|)\, dx < +\infty. \tag{39}$$

Умови (38), (39) є достатніми для побудови міри Гіббса системи нескінченного числа частинок в області малих значень параметрів $\beta = (k_B T)^{-1}$ та $z$, де $T$ — температура системи, $z$ — активність, яка безпосередньо пов'язана з густиною системи частинок (див. [19], глава 4), $k_B$ — константа Больцмана, що забезпечує перехід від температурної до енергетичної шкали.

Але для того, щоб побудувати міру Гіббса у випадку системи нескінченного числа частинок для будь-яких додатних значень параметрів $\beta$ та $z$, необхідно накласти додаткові обмеження на взаємодію між частинками. Такою умовою є умова надстійкості, яку ввів Руель в роботі [32].

**Означення 3.2.** ([32]) Взаємодія називається надстійкою, якщо для будь-якого розбиття на куби $\overline{\Delta_a}$ та будь-якої конфігурації $\gamma = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Gamma_0$ існують такі константи $A > 0$, $B \geq 0$, що виконується умова:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \left[ A|\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma_\Delta| \right]. \tag{40}$$

У цьому огляді ми будемо використовувати так звану *посилено надстійку* взаємодію.

**Означення 3.3.** Взаємодія називається посилено надстійкою, якщо існує розбиття $\overline{\Delta}_{a_0}$ і константи $A(a) > 0$, $B(a) \geq 0$, $m \geq 2$ такі, що для довільних $0 < a \leq a_0$ і $\gamma \in \Gamma_0$ виконується наступна умова:

$$U(\gamma) \geq A(a) \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a : |\gamma_\Delta| \geq 2} |\gamma_\Delta|^m - B(a)|\gamma|. \tag{41}$$

**Зауваження 3.1.** Надстійкі взаємодії були введені Д. Рюелем (див. [66] або [19], Гл.3, § 3.2.9 і [32]). Я. М. Парк (див. [67]) вперше використав умову посиленої надстійкості з $m > 2$, щоб довести обмеженість експоненти від оператора локальної кількості частинок для квантової системи взаємодіючого Бозе газу. Означення 3.3 було вперше запропоновано в [56]. На відміну від означення Парка в нерівність (41) включає випадок $m = 2$, але з константами, які залежать від параметра $a$. Посилено надстійкі взаємодії включають потенціали, які не є інтегровні в нулі $0 \in \mathbb{R}^d$.

Умови стійкості, надстійкості та посиленої надстійкості, сформульовані в (38), (40) і (41), накладають загальні умови на характер енергії взаємодії. В рамках наближення таких взаємодій двохчастинковими (парними) потенціалами треба знайти найбільш оптимальні достатні умови їх виконання. Такі умови досліджувалися багатьма авторами. Ми радимо читачу звернутись до найбільш пізнього огляду [55], в якому детально обговорені попередні результати цієї проблеми та отримані деякі нові результати.

### 3.2.2 Умови на потенціал взаємодії

Умови, які забезпечують посилену надстійкість, можна сформулювати таким чином.

**(A): Умови на потенціал взаємодії.** *Нехай* $\phi$ *є неперервним на* $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, *для якого існують константи* $r_0 > 0$, $R > r_0, \varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$, *and* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що:*

$$1)\, \phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для} \quad |x| \geq R, ; \tag{42}$$

$$2)\, \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s},\, s \geq d \quad \text{для} \quad |x| \leq r_0, \tag{43}$$

*де*

$$\phi^+(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\},\, \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}. \tag{44}$$

З умови (42) слідує, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\upsilon_\varepsilon = \upsilon_\varepsilon(a) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \sup_{y \in \Delta} \phi^-(|x-y|)|x-y|^\varepsilon < \infty. \tag{45}$$

Справедлива наступна лема.

**Лема 3.3.** Нехай потенціал взаємодії задовольняє **(A)**. Тоді для довільних $\gamma \in \Gamma_0$ і $a < r_0$ нерівність (41) виконується з

$$A(a) = C_{s,d} - \frac{\upsilon_0}{2^{s/d}},\, B(a) = \frac{\upsilon_0}{2},\, m = 1 + \frac{s}{d},\, C_{s,d} = \frac{1}{2^{2s+1}} \left( \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\, \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \right)^{\frac{s}{d}} \frac{\varphi_0}{a^s}. \tag{46}$$

*Доведення.* Доведення в [55], але нами далі буде використовуватись лише випадок, коли

$$A(a) = \frac{\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^s} - \frac{\upsilon_0}{2},\, B(a) = \frac{\upsilon_0}{2},\, m = 2. \tag{47}$$

У цьому випадку доведення значно спрощується. Для довільного $\gamma \in \Gamma_0$ та довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$:

$$U(\gamma) = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \phi(|x-y|) = \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}_\lambda:|\gamma_\Delta|\geq 2} U(\gamma_\Delta) + \sum_{\{\Delta,\Delta'\}\subset\overline{\Delta}_\lambda} \sum_{\substack{x\in\gamma_\Delta \\ y\in\gamma_{\Delta'}}} \phi(|x-y|). \tag{48}$$

Враховуючи умови **(A)** на потенціал взаємодії, визначення (4) і нерівність $|\gamma_\Delta|\,|\gamma_{\Delta'}| \leq \frac{1}{2}\left(|\gamma_\Delta|^2 + |\gamma_{\Delta'}|^2\right)$, отримаємо:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta\in\overline{\Delta_\lambda}:|\gamma_\Delta|\geq 2} \left[\frac{\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^s} - \frac{\upsilon_0}{2}\right] |\gamma_\Delta|^2 - \frac{\upsilon_0}{2}|\gamma|. \tag{49}$$

**Зауваження 3.2.** З означення (4) і нерівності (42) зрозуміло, що $\upsilon_0 \sim \frac{c}{a^d}$. Тоді, для достатньо малих $a$ константа $A(a) > 0$ для $s > d$ і для достатньо великих $\varphi_0$ у випадку $s = d$.

□

### 3.2.3 Визначення міри Гіббса нескінченних систем

В рамках великого канонічного ансамблю система, що знаходиться в обмеженому об'ємі $\Lambda$, характеризується фіксованою температурою $T$ і параметром $\mu$, який називається *хімічним потенціалом.* Параметр $\mu$ відповідає за розподіл кількості частинок $N$ в $\Lambda$ (див., наприклад, [68]). Міра Гіббса $\mu_\Lambda$ є абсолютно неперервна відносно міри Лебега в $(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)^N$. Вираз для щільності буде мати вигляд:

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}, N) = \frac{1}{Z_\Lambda}\frac{1}{N!}e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad N = |\widetilde{\gamma}|, \tag{50}$$

де постійна нормування $Z_\Lambda$ має назву *великої статистичної суми* і виражається формулою:

$$Z_\Lambda = \sum_{N\geq 0} \frac{1}{N!} \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)}} d\widetilde{\gamma} e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})},\ d\widetilde{\gamma} \ :=\ (d\widetilde{\sigma})^N \ :=\ (d\sigma \otimes dp)^N. \tag{51}$$

Для рівноважних систем усі спостережувані величини є функціями координат. Тому у виразах для середніх та у виразі для великої статистичної суми можна виконати інтегрування за імпульсними змінними

$p_i \in \mathbb{R}^d,\ i = \overline{1,N}$ і переписати вираз для міри Гіббса для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій $\Gamma_\Lambda$ у такому вигляді:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{52}$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{53}$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега-Пуассона (29), (29), а постійна

$$z \ = \ \frac{e^{\beta\mu}}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{p^2}{2m}} dp \ = \ e^{\beta\mu} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{d/2} \tag{54}$$

і називається *активністю* системи.

У випадку нескінченної системи в $\mathbb{R}^d$ у підході Добрушина-Ленфорда-Рюеля (див. [25],[31]) міра Гіббса $\mu$ визначається на $\Gamma$ за допомогою сім'ї умовних ймовірнісних розподілів, щільність яких визначається похідною Радона-Нікодима

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}}(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) \ = \ \frac{\exp\{-\beta U(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c})}, \tag{55}$$

де

$$\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda,\ \eta \in \Gamma_\Lambda,\ \bar{\gamma} \in \Gamma.$$

Відповідні ймовірності визначаються за формулою:

$$\Pi_\Lambda(A, \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \int_{\Gamma_\Lambda} 1\!\!1_A(\bar{\gamma}_{\Lambda^c} \cup \eta) \mu_\Lambda(d\eta|\bar{\gamma}_{\Lambda^c}),\ A \in \mathcal{B}(\Gamma), \tag{56}$$

де

$$U(\eta|\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) := U(\eta) + W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c}),\ W(\eta;\gamma) \ := \sum_{\substack{x\in\eta,\\ y\in\gamma}} \phi(|x-y|). \tag{57}$$

$U(\eta)$ – це енергія взаємодії усіх частинок конфігурації $\eta \subset \Lambda$, а $W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c})$ – це енергія взаємодії між частинками конфігурації $\eta$ і частинками конфігурації $\bar{\gamma}_{\Lambda^c}$, а

$$Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \int_{\Gamma_\Lambda} \exp\{-U(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\} \lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{58}$$

Тоді $\mu$ будемо називати мірою Гіббса, якщо

$$\mu(\Pi_\Lambda(A,\cdot)) \;=\; \int_\Gamma \Pi_\Lambda(A \mid \gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \mu(A) \tag{59}$$

для довільного $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Множину усіх мір Гіббса, які відповідають потенціалу $\phi$, активності $z$ і оберненій температурі $\beta$ позначимо через $\mathcal{G}(\phi, z, \beta)$. Формулу (59) називають рівнянням Добрушина-Ленарда-Рюеля (ДЛР). Якщо міра $\mu$ задовольняє рівняння ДЛР, тоді це є необхідною і достатньою умовою того, що $\mu$ є мірою Гіббса.

Більш прозорим з аналітичної точки зору є рівняння, яке запропонував Рюель (РРЮ) в роботі [32]. Для будь-якої позитивної $\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції $F$ і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ має місце рівність:

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta\cup\gamma)e^{-\beta U(\eta|\gamma)}\mu(d\gamma)\right]\lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{60}$$

Необхідно також навести ще одне рівняння, яке було запропоноване в роботах [69, 70], це рівняння Георгіі-Нгуєна-Цессіна (ГНЦ). Для довільної позитивної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції $H$ справедлива формула:

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} H(x;\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; z\int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} H(x;\gamma\cup\{x\})e^{-\beta W(\{x\};\gamma)}\sigma(dx)\mu(d\gamma). \tag{61}$$

На завершення цього розділу наведемо теорему, яка підсумовує результати вищенаведених робіт.

**Теорема 1.** Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$ . Тоді рівняння ДЛР (59), рівняння РРЮ (60) і рівняння ГНЦ (61) є еквівалентними.

Більш ґрунтовний опис мір Гіббса, як для великого канонічного ансамблю, так і для канонічного ансамблю, можна знайти, наприклад, в монографіях [71, 69, 72].

# 4 Кореляційні функції мір Гіббса

З точки зору фізичних міркувань кореляційні функції були вперше введені ще на початку XX століття Орштейном і Церніке при дослідженні критичних флуктуацій. Математичні дослідження кореляційних функцій, мабуть, почалися з роботи Івона [3] і незалежних досліджень Боголюбова [4], Кірквуда [5] та Борна-Гріна [6]. З точки зору теорії міри кореляційні функції є в певному сенсі аналогом моментів міри. Розглянемо аналог моментів на просторі конфігурацій Γ.

## 4.1 Кореляційні міри та кореляційні функції

Перш за все треба зауважити, що кожну конфігурацію $\gamma$ можна ототожнити з узагальненою функцією (див. (7), (8), (10)). Але у просторі узагальнених функцій операція множення (зведення у степінь)не є визначеною. У гауссівському аналізі (тобто на просторах функцій, які інтегровні за мірою Гаусса) вводять так звану віківську регуляризацію. Так само можна зробити і у випадку пуассонівського аналізу. Більш детально ми обговоримо це питання у наступному підрозділі з точки зору узагальнених пуассонівських функціоналів [73, 64, 74]. Наведені нижче конструкції можна знайти, наприклад, в більш детальному описі в роботі [75].

Перша степінь визначається звичайним чином за визначенням узагальненої функції. Нехай $G$ є функцією на просторі конфігурацій $\Gamma_0$ ($G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$), такою, що

$$G \upharpoonright \Gamma_0^{(n)} \;=\; G^{(n)}(\{x_1, ..., x_n\}) \;:=\; G_n(x_1, ..., x_n), \;\; G_n \in C_0(\mathbb{R}^{dn}). \quad (62)$$

Тоді

$$< G^{(1)}, \gamma > := \sum_{x_1 \in \gamma} < G^{(1)}, \varepsilon_{x_1} > = \sum_{x_1 \in \gamma} G_1(x_1). \quad (63)$$

$n$-у ступінь визначимо формулою

$$< G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> := \sum_{\{x_1, ..., x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n). \quad (64)$$

Тоді аналогом формули моментів є формула

$$\int_\Gamma < G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> \mu(d\gamma) \ := \ \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n)\rho^{(n)}\left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)\right). \tag{65}$$

Функцію $\rho^{(n)}$ будемо називати кореляційною мірою міри $\mu$ на $\Gamma^{(n)}$. Якщо кореляційна міра $\rho^{(n)}$ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{dn}$, тоді її щільність визначає відповідну кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}\left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)\right) \ &:= \ \frac{1}{n!}\rho_n(x_1, ..., x_n)\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n), \\ \rho_n(x_1, ..., x_n) \ &:= \ \rho(\eta) \restriction \Gamma^{(n)}, \ \eta \ = \ \{x_1, ..., x_n\}. \end{aligned} \tag{66}$$

З урахуванням (64) формулу (65) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \sum_{\{x_1,\dots,x_n\}\subset\gamma} G_n(x_1, ..., x_n)\mu(d\gamma) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n)\rho^{(n)}\left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Кореляційну міру тепер можна визначити на просторі усіх скінченних конфігурацій $\Gamma_0$, просумувавши рівність (67) за всіма $n \geq 0$. Тоді з (67) отримуємо формулу:

$$\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{x_1,\dots,x_n\}\subset\gamma} G_n(x_1, ..., x_n)\mu(d\gamma) := \int_\Gamma \sum_{\eta\Subset\gamma} G(\eta)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta)\rho(d\eta), \tag{68}$$

а у випадку (66)

$$\int_\Gamma \sum_{\eta\Subset\gamma} G(\eta)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta), \tag{69}$$

де значок $\eta \Subset \gamma$ означає сумування за усіми скінченними підмножинами $\eta$ нескінченної конфігурації $\gamma$. Підставимо в (68) $G = 1\!\!1_A, \ \ A \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, тоді отримуємо означення кореляційної міри на $\mathcal{B}(\Gamma_0)$:

$$\rho_\mu(A) = \rho(A) \ = \ \int_\Gamma \sum_{\eta\Subset\gamma} 1\!\!1_A(\eta)\mu(d\gamma), \tag{70}$$

або, використовуючи праву частину (69) та визначення міри $\lambda_\sigma$, отримуємо:

$$\rho(A) \;=\; \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta) = \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta) z^{-|\eta|}\rho(\eta)\lambda_{z\sigma}(d\eta). \qquad (71)$$

**Означення 4.1.** Міра $\mu$ називається локально абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, якщо для будь-якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ міра $\mu^\Lambda = \mu \circ p_\Lambda^{-1}$ є абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}^\Lambda$, тобто існує похідна Радона-Нікодима:

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\gamma). \qquad (72)$$

Наступна лема дає можливість визначити цю похідну для $\mu \in \mathcal{G}_V$:

**Лема 4.1.** Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$. Тоді вона є локально абсолютно-неперервна відносно $\lambda_{z\sigma}$, і

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta) \;=\; \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)}\mu(d\gamma). \qquad (73)$$

*Доведення.* Нехай $F$ є позитивною $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірною функцією. Тоді існує $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірна функція $f$ така, що $F = f \circ p_\Lambda$ $(F(\gamma) = f(\gamma_\Lambda))$. Тоді за означенням проекції міри:

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta). \qquad (74)$$

Скористаємося тим, що міра $\mu$ є гіббсовою і задовольняє рівняння Рюеля (60). Тоді

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) &= \int_{\Gamma_\Lambda}\left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta\cup\gamma)e^{-\beta U(\eta|\gamma)}\mu(d\gamma)\right]\lambda_{z\sigma}(d\eta) = \\ &= \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta)-\beta W(\eta;\gamma)}\mu(d\gamma)\right]\lambda_{z\sigma}(d\eta). \qquad (75)\end{aligned}$$

Враховуючи, що за визначенням похідної Радона-Нікодима

$$\int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta)\lambda_{z\sigma}(d\eta), \qquad (76)$$

і порівнюючи (76) з (75) отримуємо (73).

■

**Лема 4.2.** Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$ і для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ існує постійна $C_\Lambda > 0$ така, що

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta) \ = \leq C_\Lambda^{|\eta|}. \tag{77}$$

Тоді кореляційна міра (70) є абсолютно неперервною відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, а її щільність виражається кореляційним функціоналом, який має такий вигляд:

$$\rho(\eta) \ = \ z^{|\eta|} \int_\Gamma e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma). \tag{78}$$

*Доведення.* Перш за все зауважимо, що для будь-якого $A \in \mathcal{B}_c(\Gamma_0)$ існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ таке, що функція $\sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta)$ є $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma_0)$-вимірною, а

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta) \mu^\Lambda(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta) \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\gamma) \lambda^\Lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{79}$$

Застосуємо до правої частини (79) Лему 3.2 (рівність (36)) з

$$G(\gamma) = \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\gamma), \ H(\eta, \gamma \setminus \eta)) = 1\!\!1_A(\eta) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \eta). \tag{80}$$

Отримуємо, що

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} 1\!\!1_A(\eta) \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta \cup \gamma) \lambda^\Lambda_{z\sigma}(d\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{81}$$

Тоді, порівнюючи з (71), отримаємо:

$$\rho(\eta) = z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{82}$$

Підставимо в (82) вираз (73). Тоді маємо

$$\begin{aligned} \rho(\eta) &= z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma) - \beta W(\eta \cup \gamma; \xi)} \mu(d\xi) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \qquad (83) \\ &= z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta; \gamma \cup \xi)} e^{-\beta U(\gamma) - \beta W(\gamma; \xi)} \mu(d\xi) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \end{aligned}$$

Застосовуючи в останньому виразі (83) рівняння Рюеля (60), отримуємо (78). ■

На завершення цього підрозділу наведемо вираз для кореляційних функцій, що відповідають умовному розподілу Гіббса в обмеженому об'ємі $\Lambda$ і при фіксованих граничних конфігураціях $\bar{\gamma} \in \Gamma_{\Lambda^c}$:

$$\rho_\Lambda(\eta \mid \bar{\gamma}) \;=\; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma})} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma|\bar{\gamma})} \lambda_{z\sigma}(d\gamma),\; \rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\eta \mid \{\emptyset\}). \quad (84)$$

## 4.2 Пуассонівські поля та їх регуляризація

В теорії евклідових квантованих полів (див., наприклад, [76], розд. 29.2) поля визначаються операторно-значними узагальненими функціями на просторі Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Вільне евклідове скалярне поле можна також визначити як узагальнений гауссівський процес, індексований функціями $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ [77]. Віківську регуляризацію розглядають як процедуру ортогоналізації мономів вільного евклідового (або гауссівського) поля [78] (див. також [79]).

За аналогією з гауссівським полем можна ввести поняття *пуассонівського* поля як лінійного неперервного функціоналу на просторі $C_0(\mathbb{R}^d)$. Запишемо відображення (7) у вигляді:

$$\gamma \;=\; \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \;\mapsto\; \gamma(x) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i). \quad (85)$$

Тоді формула (10) має вигляд:

$$< \gamma, f > :=\; \gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)dx \;=\; \sum_{x\in\gamma} f(x) \quad (86)$$

Відповідно роботі [73] введемо перетворення функцій $F \in L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ за формулою:

$$\left(UF(\cdot)\right)(f) \;:=\; l_{\pi_\sigma}(f)^{-1} \int_\Gamma e^{i<\gamma,f>} F(\gamma)\pi_\sigma(d\gamma),\; f \in C_0(\mathbb{R}^d), \quad (87)$$

де $l_{\pi_\sigma}(f)$ визначено формулою (32), а точка означає місце аргумента функції $F$, по якому у правій частині виконується інтегрування за мірою $\pi_\sigma$. Наприклад, для функції $F(\gamma) = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]$, яка визначена для довільних функцій $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ з $|g| < 1$ функцію $UF$ легко порахувати, використовуючи формулу (32):

$$(U \exp[<\cdot, \log(1+g)>])(f) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{if(x)} g(x) dx\right]. \tag{88}$$

Внаслідок щільності лінійної оболонки експоненціальних векторів $\{e^{i<\gamma,f>} \mid f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$ в $L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ ([64], теорема 3) з рівності $UF = 0$ виходить, що $U \equiv 0$, тобто існування оберненого перетворення $U^{-1}$, яке на функціоналах вигляду $G[f] = \exp[\int_{\mathbb{R}^d} e^{if(x)} g(x) dx]$, де $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, а $|g| < 1$ задається формулою:

$$\left(U^{-1} G[\cdot]\right)(\gamma) = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]. \tag{89}$$

Якщо тепер визначити функцію $F$ таким чином, що $G[f] = F(e^f)$, тоді віківську регуляризацію визначають [73] за формулою:

$$: F(\gamma) : := \left(U^{-1} F(e^{i\cdot}\right)(\gamma). \tag{90}$$

З формул (89) і (90) та визначень функцій $G$ і $F$ виходить, що

$$: e^{<\gamma, g>} : = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]. \tag{91}$$

З цієї формули можна отримати вираз для віківських мономів. Виберемо для цього функцію $g$ у вигляді $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j$ і $g_j \in C_0(\mathbb{R}^d)$ та достатньо малими $\alpha_j$, $j = 1, \ldots, k$ для того, щоб $|g| < 1$. Тоді:

$$: \prod_{j=1}^k < \gamma, g_j >: = \frac{\partial^k}{\partial \alpha_1 \cdots \partial \alpha_k} \exp[<\gamma, \log(1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j)>]|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0}. \tag{92}$$

Легко перевірити, що таке визначення віківських мономів збігається з визначенням формулою (64), в якій треба вибрати функцію $G$ у вигляді:

$$G_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} g_1(x_{\pi(1)}) \cdots g_n(x_{\pi(n)}). \tag{93}$$

Формулу Мекке (33) для функцій $F,\ G \in L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ можна записати у такому вигляді:

$$\int_\Gamma :<\gamma, \varphi> G(\gamma) : F(\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) \ = \tag{94}$$
$$= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) :G(\gamma) : F(\gamma \cup \{x\})\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma),\ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

*Доведення* для функцій вигляду $F(\gamma) = e^{i<\gamma,f>}, f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ і $G(\gamma) = e^{i<\gamma,g>}, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ виконується аналогічно, використовуючи формули (91), (32). Скористаємося формулою (94), зробивши заміни: $\pi_\sigma \to \lambda_{z\sigma}$, $\Gamma \to \Gamma_\Lambda$, $:<\gamma, \varphi>G(\gamma) : F(\gamma) \to: \prod_{j=1}^m <\gamma, g_j>: Z_\Lambda^{-1}\exp[-\beta U(\gamma)]$. Тоді кореляційну функцію $\rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\{x_1, \ldots, x_m\}) := \rho_m^\Lambda(x_1, \ldots, x_m)$ (див. (84)) можна записати у вигляді віківських моментів пуассонівських полів (85):

$$\rho_m^\Lambda(x_1, \ldots, x_m) \ = \ \frac{1}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda} : \gamma(x_1)\cdots\gamma(x_m) : e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{95}$$

## 4.3 Локальні спостережувані та кореляційні функції

Спостережувані величини є функціями конфігураційних змінних. Природно, що ця залежність повинна бути тільки від деякої локальної кількості змінних, бо ми можемо спостерігати тільки обмежену область системи. Тому математично визначити локальну спостережувану величину можна наступним чином.

**Означення 4.2.** Будь-яка вимірна функція $F_B$, визначена на конфігураційному просторі $\Gamma$, називається локальною спостережуваною, якщо вона залежить тільки від частини конфігурації частинок, що міститься у області $B \Subset \mathbb{R}^d$, тобто

$$F_B(\gamma) = f(\gamma \cap B) = f(\gamma_B) \tag{96}$$

є циліндричною функцією.

Її середнє значення визначається з допомогою ймовірнісного розподілу $\mu$ за формулою

$$< F_B >_\mu = \int\limits_\Gamma F_B(\gamma) d\mu(\gamma). \tag{97}$$

З усіх фізичних величин (тобто функцій, що введені на множині конфігурацій $\Gamma$ фізичної системи) частіше всього зустрічаються так звані *суматорні величини*.

**Означення 4.3.** Величина $F(\cdot)$ називається суматорною величиною $k$-го порядку, якщо її можна подати у вигляді

$$F_B(\gamma) = \sum_{\{x_1,\ldots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\ldots,x_k), \tag{98}$$

де $f_{B;k}(x_1,\ldots,x_k)$ — деяка симетрична функція своїх змінних.

В загальному випадку локальну спостережувану величину можна записати у вигляді:

$$F_B(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{x_1,\ldots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\ldots,x_k) \ = \ \sum_{\eta\Subset\gamma} f_B(\eta). \tag{99}$$

Тоді, враховуючи формули (68), (69), вираз (97) для середніх від функцій (99) можна записати у вигляді:

$$< F_B >_\mu = \int_\Gamma F_B(\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} f_B(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta). \tag{100}$$

Отже, знаючи вираз для кореляційної функції, можна обчислити середні спостережуваних величин, обраховуючи інтеграли за мірою Лебега-Пуассона.

**Зауваження 4.1.** Визначення кореляційних функцій, яке приведене вище формулами (65), (66), належить Ленарду [33, 34, 35]. Таке визначення в значній мірі мотивоване виглядом спостережуваних величин

(99). Ленард також визначив оператор $S$ як відображення функцій $G$ (див. (62)) на $\Gamma_0$ у функції $SG$ на $\Gamma$:

$$(SG)(\gamma) \ = \ \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta). \tag{101}$$

Таке відображення дало поштовх до створення гармонійного аналізу на просторах локально скінченних конфігурацій [36] (див. також [75]) за аналогією співвідношення гільбертового простору квадратично інтегровних функцій на $\mathbb{R}^1$ та простору $l_2$ квадратично сумовних послідовностей, який можна розглядати як відповідний простір коефіцієнтів Фур'є.

## 4.4 Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій

Запишемо вираз для кореляційних функцій $\rho_\Lambda$, які відповідають системі, що знаходиться в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Покладаючи у виразі (84) $\bar{\gamma} = \emptyset$, отримаємо вираз:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{102}$$

Достатньою умовою існування кореляційних функцій на $\Gamma_\Lambda$ є умова стійкості (див. ф-лу (38)). Ця умова дозволяє отримати оцінки:

$$1 \ \leq \ Z_\Lambda \ \leq \ e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)} \tag{103}$$

та

$$0 \ \leq \ \rho_\Lambda(\eta) \ \leq \ Z_\Lambda^{-1} e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)}. \tag{104}$$

Ці оцінки є наслідком умови (38) і визначення інтегралу за мірою Лебега-Пуассона (29). Але оцінка (104) не дає підстав зробити висновок, що послідовність функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ має термодинамічну границю при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

Одним із методів побудови кореляційних функцій при нескінченному об'ємі є метод рівнянь. Треба отримати рівняння для функцій $\rho$

і знайти їх розв'язок. Отримаємо спершу такі рівняння для функцій $\rho_\Lambda$, тобто у скінченному об'ємі. Виділимо для цього в конфігурації $\eta$ деяку точку $x \in \eta$ і введемо позначення $\eta^{(\hat{x})} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді вираз (102) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|}\frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta W(x;\gamma)}e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \qquad (105)$$

Скористаємося тим, що у випадку парного потенціалу взаємодії енергія взаємодії двох конфігурацій задається формулою (57). Тоді експоненту в (105) можна записати у вигляді:

$$e^{-\beta W(x;\gamma)} = \prod_{y\in\gamma}\left[(e^{-\beta\phi(|x-y|)}-1)+1\right]. \qquad (106)$$

Далі для довільної неперервної функції $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ і довільного $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ справедлива проста комбінаторна формула:

$$\prod_{y\in\gamma}[1+\varphi(y)] = \sum_{\xi\subseteq\gamma}\prod_{y\in\xi}\varphi(y). \qquad (107)$$

Введемо наступне позначення:

$$K(x;\xi) \;:=\; \begin{cases} \prod_{y\in\xi}(e^{-\beta\phi(|x-y|)}-1), |\xi| \ge 1, \\ 1,\ \xi = \emptyset. \end{cases} \qquad (108)$$

Тоді вираз (105) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|}\frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}\sum_{\xi\subseteq\gamma}K(x;\xi)e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \qquad (109)$$

Застосуємо до правої частини (109) Лему 3.2 (рівність (36)) з $\Gamma_\Lambda$ замість $\Gamma_0$ і

$$G(\gamma) = e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma)}, \qquad (110)$$
$$H(\xi, \gamma\setminus\xi)) = K(x;\xi) \equiv K(x;\xi)1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\gamma\setminus\xi).$$

Тоді

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|}\frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}K(x;\xi)e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi\cup\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\xi). \tag{111}$$

Використовуючи означення кореляційного функціоналу (102), отримаємо остаточне співвідношення:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_\Lambda}K(x;\xi)\rho_\Lambda(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi). \tag{112}$$

В останньому інтегралі була використана рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda}z^{-|\xi|}f(\xi)\lambda_{z\sigma}(d\xi) = \int_{\Gamma_\Lambda}f(\xi)\lambda_\sigma(d\xi), \tag{113}$$

яка випливає з означення інтеграла за мірою Лебега-Пуассона.

Формально таке саме рівняння можна записати і для нескінченної системи в усьому просторі $\mathbb{R}^d$:

$$\rho(\eta) \;=\; ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_0}K(x;\xi)\rho(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi),\ \eta\in\Gamma_0. \tag{114}$$

Якщо існують розв'язки обох рівнянь (112), (114), і розв'язок рівняння (112) в деякому сенсі прямує до розв'язку рівняння (114) при $\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d$, то він відповідає сім'ї кореляційних функцій міри Гіббса. Якщо такий розв'язок є єдиним при певних значеннях термодинамічних параметрів $z,\beta$, то відповідна міра Гіббса буде відповідати єдиному гіббсівському стану. Якщо ж є декілька розв'язків при певних значеннях термодинамічних параметрів $z,\beta$, тоді ці розв'язки будуть відповідати різним гіббсівським станам і тоді кажуть, що в системі в околі цих термодинамічних параметрів відбувається *фазовий перехід*.

Значення параметрів $z,\beta$, при яких існує єдиний гіббсівський стан, називають *регулярними*. Дослідження рівнянь Кірквуда-Зальцбурга в області регулярних значень параметрів $z,\beta$ добре висвітлене в літературі і читач може знайти їх, наприклад, в монографіях [19, 21] та відповідних в них посиланнях. Аналогічні дослідження при довільних

$z, \beta$ пов'язані з вивченням спектру оператора Кірквуда-Зальцбурга, який визначається у деякому банаховому просторі правою частиною рівняння (112)( або рівняння (114) для необмеженої системи). Л. А. Пастур [19, 21] (див., також, [81, 82, 83]) вперше розглянув оператор Кірквуда-Зальцбурга для обмеженої системи і показав, що його спектр збігається з нулями великої статистичної суми. В роботі [84] була встановлена структура спектру оператора Кірквуда-Зальцбурга для обмеженої системи та його фредгольмів характер.

**Зауваження 4.2.** Крім рівнянь Кірквуда-Зальцбурга існують інші рівняння, яким задовольняє кореляційний функціонал $\rho(\eta)$, $\eta \in \Gamma_0$ рівноважних систем статистичної механіки. Це рівняння Майєра-Монтролла (див. [19], розд. 4.2.5) та рівняння Боголюбова, на якому ми зупинимося в наступному підрозділі. Нестандартний підхід запропонував М. С. Гончар. В роботі [85] (див., також, [86]) виведені рівняння, права частина яких задається оператором, що зберігає інваріантним конус позитивних функцій. Для позитивних парних потенціалів взаємодії побудовані розв'язки у вигляді розкладів, які збігаються при довільних значеннях параметрів $z, \beta$.

## 4.5 Рівняння BBGKY

Для того, щоб записати рівняння для кореляційних функцій нерівноважної системи взаємодіючих частинок, треба розглянути їх в конфігураційному просторі маркованих конфігурацій $\widetilde{\Gamma}$, визначеному в (16). Для довільної конфігурації $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ з $\gamma \in \Gamma_0$ гамільтоніан складається з кінетичної енергії частинок конфігурації і потенціальної енергії їх взаємодії:

$$H(\widetilde{\gamma}) = E_k(\widetilde{\gamma}) + U(\gamma), \ \ E_k(\widetilde{\gamma}) = \sum_{x \in \gamma} \frac{p_x^2}{2m}. \tag{115}$$

Розглянемо спершу систему в деякій обмеженій області $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Важливою характеристикою системи є поведінка частинок поблизу границі $\partial\Lambda$ посудини $\Lambda$. Задамо такі граничні умови за допомогою деякого зовнішнього поля $u^\Lambda(x),\ x\in\Lambda$:

$$u^\Lambda(x) \ := \begin{cases} +\infty, \text{ якщо, } x\in\partial\Lambda, \\ 0, \text{ якщо, } x\in\Lambda_\delta, \end{cases} \tag{116}$$

де область $\Lambda_\delta$ містить точки $x\in\Lambda$, які знаходяться на відстані $d\geq\delta>0$ від $\partial\Lambda$. В області $\Lambda\setminus\Lambda_\delta$ функція $u^\Lambda(x)$ є гладкою позитивною функцією. Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$H^\Lambda(\widetilde{\gamma}) \ = \ E_k(\widetilde{\gamma}) \ + \ U^\Lambda(\gamma),\ U^\Lambda(\gamma):=U(\gamma) \ + \ \sum_{x\in\gamma}u^\Lambda(x),\ \gamma\in\Gamma_\Lambda. \tag{117}$$

### 4.5.1 Вивід рівнянь BBGKY

Еволюція щільності міри Гіббса (див. (50), (51)) описується рівнянням Ліувіля:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}) &= \left\{H^\Lambda\widetilde{\gamma}, D(t;\widetilde{\gamma})\right\}_P = \\ &= \sum_{x\in\gamma}\left[\nabla_x H^\Lambda(\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_{p_x}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}) - \nabla_{p_x}H^\Lambda(\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_x D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})\right],\end{aligned} \tag{118}$$

де $\{\cdot,\cdot\}_P$ – це дужки Пуассона, які визначаються другою стрічкою рівняння (118), а $\nabla_x$ ($\nabla_{p_x}$) – градієнт за змінною $x$ ($p_x$). Треба також задати початковий розподіл:

$$D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})|_{t=0} = D^0_\Lambda(\widetilde{\gamma}). \tag{119}$$

Виходячи з вигляду гамільтоніану (див. (115)-(117)), граничні умови для функцій $D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})$ можна записати у такому вигляді:

$$D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})|_{\forall x\in\gamma, x\in\partial\Lambda} = D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})|_{\forall x\in\gamma, p_x^{(\alpha)}=\pm\infty, \alpha=\overline{1,d}} = 0. \tag{120}$$

Еволюція початкової функції розподілу $D^0_\Lambda(\widetilde{\gamma})$ описується рівнянням Ліувіля (118) і визначається еволюцією початкової конфігурації $\gamma=\{\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_N\},\ N=|\gamma|$, або на мові пуассонівських полів:

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) \ = \ \sum_{i=1}^N\delta(\widetilde{x} \ - \ \widetilde{x}_i) \ = \ \delta(x-x_i)\delta(p_x-p_{x_i}). \tag{121}$$

Стан системи частинок в момент часу $t$ буде визначатись конфігурацією

$$\widetilde{\gamma}_t = \{x_1(t), \ldots, x_N(t)\},\ \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\widetilde{x} - \widetilde{x}_i(t),\ \widetilde{x}_i(t) = \widetilde{x}_i(t, \widetilde{\gamma}), \tag{122}$$

де точки конфігурації $\widetilde{x}_i(t)$ задовольняють систему рівнянь Гамільтона:

$$\frac{dp_{x_i}(t)}{dt} = -\frac{\partial H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}_t)}{\partial x_i(t)},\ \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}_t)}{\partial p_{x_i}(t)}. \tag{123}$$

Позначимо через $T_t$ оператор зсуву вздовж траєкторій частинок. Тоді

$$T_t \widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_t. \tag{124}$$

**Пропозиція 4.1.** Нехай $\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}$ з $\Lambda \in \mathcal{B}_c$ є фазовим простором системи частинок, еволюція фазових точок $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_{\Lambda}$ яких описує система рівнянь Гамільтона (123) з Гамільтоніаном (117). Тоді міра

$$\mu^t_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) := D_{\Lambda}(t; \widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \quad t \geq 0 \tag{125}$$

є інваріантною відносно зсувів $T_t$ у сенсі (див. [87]):

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} F(\widetilde{\gamma})\mu^t_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} F(T_t\widetilde{\gamma})\mu^0_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) \tag{126}$$

для функцій $F$, для яких інтеграли в (126) приймають скінченне значення.

*Доведення* є наслідком відомої теореми Ліувіля (див., наприклад, [21]) та визначення міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$.

Кореляційні функції, які відповідають нерівноважній динаміці, визначаються аналогічно рівноважному випадку (84):

$$\rho_{\Lambda}(t; \widetilde{\eta}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} D_{\Lambda}(t; \widetilde{\eta} \cup \widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \tag{127}$$

де $\widetilde{\sigma}$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, тобто $d\widetilde{\sigma} = dxdp_x$. Продиференціюємо рівняння (127). Враховуючи рівняння Ліувіля та співвідношення:

$$\nabla_x H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) \;:=\; \begin{cases} \nabla_x U^{\Lambda}(\eta) \;+\; \nabla_x W(\eta;\gamma), \text{ якщо, } x \in \eta, \\ \nabla_x U^{\Lambda}(\gamma) \;+\; \nabla_x W(\eta;\gamma),, \text{ якщо, } x \in \gamma, \end{cases} \tag{128}$$

$$\nabla_{p_x} H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) \;=\; \frac{1}{m}\mathbf{p}_x,\; x \in \eta \cup \gamma, \tag{129}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}) \;=\; & \sum_{x\in\eta}\left[\nabla_x U^{\Lambda}(\eta)\cdot\nabla_{p_x}\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}) - \frac{1}{m}\mathbf{p}_x\cdot\nabla_x\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta})\right] + \\ & + \sum_{x\in\eta}\int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}}\sum_{y\in\gamma}\nabla_x\phi(|x-y|)\cdot\nabla_{p_x}D_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) + \\ & + \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}}\sum_{x\in\gamma}\nabla_x H^{\Lambda}(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_{p_x}D_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) - \\ & - \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}}\sum_{x\in\gamma}\nabla_{p_x} H^{\Lambda}(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_x D_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}). \end{aligned} \tag{130}$$

Застосуємо до 2-го, 3-го і 4-го доданків рівняння (130) формулу Мекке (33), яка має місце також на просторі $\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}$ для міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$. Враховуючи означення (127) та граничні умови (120), отримуємо рівняння Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}) \;=\; & \sum_{x\in\eta}\left[\nabla_x U^{\Lambda}(\eta)\cdot\nabla_{p_x}\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}) - \frac{1}{m}\mathbf{p}_x\cdot\nabla_x\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta})\right] + \\ & + \sum_{x\in\eta}\int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x\phi(|x-y|)\cdot\nabla_{p_x}\rho_{\Lambda}(t;\widetilde{\eta}\cup\{(y,p_y)\})dydp_y. \end{aligned} \tag{131}$$

### 4.5.2 Представлення розв'язку рівнянь BBGKY

Щоб отримати формулу, подібну до формули (102), запишемо спершу твірний функціонал для послідовності функцій $\rho_n^\Lambda(t;\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)$:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n}\int_{\mathbb{R}^{dn}}(d\widetilde{x})^n\rho_n^\Lambda(t;\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)j(\widetilde{x}_1)\cdots j(\widetilde{x}_n) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta})\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\eta}). \end{aligned} \tag{132}$$

Підставимо у цю формулу визначення (127) і застосуємо рівність (36), яка справедлива і для міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$ на просторі $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ маркованих конфігурацій $\widetilde{\gamma}$ з $X=\Lambda\otimes\mathbb{R}^d$, $G(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})=D_\Lambda(t,\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})$ і $H(\widetilde{\eta},\widetilde{\gamma})=(\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x}))1\!\!1_\Lambda(\gamma)$. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})\sum_{\widetilde{\eta}\subseteq\widetilde{\gamma}}\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})e^{<\widetilde{\gamma},\log(1+j)>}\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}) : e^{<\widetilde{\gamma},j>} : \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \end{aligned} \tag{133}$$

де ми скористалися формулою (91). Скористаємося формулою (126). Тоді остаточно отримуємо наступне представлення для твірного функціоналу:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} : e^{<\widetilde{\gamma}_t,j>} : D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \qquad (134) \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\exp[<\gamma_t,\log(1+j)>]D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) \end{aligned}$$

і автоматично для кореляційних функцій:

$$\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} : \prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) : D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \tag{135}$$

де віківський добуток треба обраховувати за допомогою формули (92). Залишається з'ясувати, яким чином визначити еволюцію пуассонівського поля, тобто функцію $\widetilde{\gamma}_t$ (див. (122)).

Для цього виконаємо диференціювання по змінній $t$ функціоналу $F_\Lambda(t;j)$ у формулі (133), вставляючи праву частину рівняння Ліувіля (118). Застосуємо знову формулу Мекке (33) і скористаємося формулами (128), (129), (57):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\Lambda(t;j)}{\partial t} = \\
&= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x W_x^\Lambda(\gamma) \cdot \nabla_{p_x} D_\Lambda(t; \widetilde{\gamma} \cup \{x\})\right] : e^{<\widetilde{\gamma}\cup\{x\},j>} : d\widetilde{x} \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) - \\
&- \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{m}\mathbf{p}_x \cdot \nabla_x D_\Lambda(t; \widetilde{\gamma} \cup \{x\})\right] : e^{<\widetilde{\gamma}\cup\{x\},j>} : d\widetilde{x} \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \quad (136)
\end{aligned}
$$

де $W_x^\Lambda(\gamma) := W(x;\gamma) + u^\Lambda(x)$. Враховуючи граничні умови (120), виконаємо інтегрування за частинами по змінній $p_x$ у першому доданку і по змінній $x$ – у другому доданку, діючи відповідними операторами $\nabla_{p_x}$ і $\nabla_x$ на фактор $: \exp[< \widetilde{\gamma} \cup \{x\}, j >] :$. Далі знову застосуємо формулу (33), повертаючись до сумування по точках конфігурації $\widetilde{\gamma}$ і заміняючи це сумування введенням інтегралу від пуассонівського поля $\widetilde{\gamma}(\widetilde{x})$ подібно до формул (85), (86). Після цього виконаємо ще раз інтегрування за частинами в цих інтегралах в сенсі узагальнених функцій, тобто перекидаючи оператори $\nabla_{p_x}$ і $\nabla_x$ на пуассонівські поля. Тоді остаточно отримаємо таке представлення:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\Lambda(t;j)}{\partial t} = -\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\widetilde{x} \Big(\frac{1}{m}\mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) - \\
&- : \nabla_{p_x} \widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\widetilde{x'} \widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) : \cdot (\nabla_x \phi(|x-x'|) + \nabla_x u^\Lambda(x))\Big) \frac{\delta}{\widetilde{\gamma}(x)} : e^{<\widetilde{\gamma},j>} :,
\end{aligned}
\quad (137)
$$

де

$$
: \widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) \widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) : = \ \widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) \widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) \ - \ \delta(\widetilde{x} - \widetilde{x'}),
$$

що усуває доданок $\nabla_x \phi(|x-x'|)$ при $x - x' = 0$. Аналогічно, диференціюючи $F_\Lambda(t;j)$ у формулі (136), отримаємо вираз, який після застосування рівності (126) буде збігатись з правою частиною (137), якщо функція $\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})$, буде задовольняти рівняння Власова

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})}{\partial t} &= -\frac{1}{m}\mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) + \\ &+ : \nabla_{p_x} \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\widetilde{x'} \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x'}) : \cdot (\nabla_x \phi(|x - x'|) + \nabla_x u^\Lambda(x))\end{aligned} \tag{138}$$

у сенсі узагальнених функцій. Використовуючи це рівняння, легко перевірити безпосередньо, що вираз (135) задовольняє рівняння (131) (див., також, [88]).

Зауважимо, що питання, які були розглянуті у цьому підрозділі, з дещо інших позицій висвітлені у роботі [89].

## 4.6 Проблеми термодинамічного граничного переходу

У розділі 4. 4 ми вже обговорили питання термодинамічного граничного переходу для кореляційних функцій в області регулярних значень параметрів $z, \beta$, для яких існує єдина міра Гіббса $\mu \in \mathcal{G}_V$. Для довільних значень $z, \beta$ вирішальною є оцінка (4), яка була отримана в роботі [32]. Доведення цієї рівності у роботі [32] є досить громіздким (див. детальніше [21]). У роботі [48] було запропоновано інше, більш прозоре, доведення, яке спирається на використанні властивостей інтегралів за мірою Пуассона. Це доведення дуже співзвучне темі цієї статті і тому ми в скороченому вигляді наведемо це доведення. Воно спирається на розкладі кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta)$, які визначаються інтегралом (84), в ряд, кожний член якого також представляється подібними інтегралами, але інтегрування в них виконується окремо по щільних конфігураціях (28) і окремо по розріджених конфігураціях (27).

### 4.6.1 Розклад кореляційних функцій за щільностями конфігурацій

Нехай $X \subseteq \Lambda$ є об'єднання кубиків $\Delta$, в яких знаходиться дві або більше частинок. Внесок щільності міри Гіббса $\exp\{-\beta U(\gamma)\}$ з $\gamma \in \Gamma_X^{(den)}$

грає роль малого параметру, бо $\exp\{-\beta\phi(|x-y|)\} \simeq \exp\{-\beta\frac{c}{a^s}\}, c > 0, s \geq d$, якщо $x, y \in \Delta \subset X$ і достатньо малих $a$. Основна ідея полягає в тому, щоб відокремити інтегрування по щільних конфігураціях від інтегрувань по розріджених конфігураціях. Щоб це зробити, введемо функцію-індикатор для розріджених та щільних конфігурацій. Для розріджених конфігурацій таку функцію визначимо формулою:

$$\chi_-^{\Delta}(\gamma) \ = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \tag{139}$$

а для *щільних* конфігурацій формулою:

$$\chi_+^{\Delta}(\gamma) \ = \ 1 - \chi_-^{\Delta}(\gamma). \tag{140}$$

Щоб побудувати такий розклад, запишемо наступний розклад одиниці для $\gamma \in \Gamma_\Lambda$:

$$1 \ = \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \left[\chi_-^{\Delta}(\gamma) + \chi_+^{\Delta}(\gamma)\right] \ = \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{\overline{X}_n \subseteq \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \prod_{\Delta \in \overline{X}_n} \chi_+^{\Delta}(\gamma) \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus \overline{X}_n} \chi_-^{\Delta}(\gamma)$$

$$:= \sum_{\emptyset \subseteq \overline{X} \subseteq \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma) \widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus \overline{X}}(\gamma), \tag{141}$$

де $N_\Lambda$ – це кількість кубів $\Delta$ у покритті $\Lambda_a$ (див. (26)), $\overline{X}_n := \{\Delta_1, ..., \Delta_n\}$ і

$$\widetilde{\chi}_\pm^{\overline{X}}(\gamma) \ = \ \prod_{\Delta \in \overline{X}} \chi_\pm^{\Delta}(\gamma).$$

Підставляючи (141) в (84) при $\overline{\gamma} = \emptyset$, отримаємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{\emptyset \subseteq \overline{X} \subseteq \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \int_{\Gamma_\Lambda} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma) \widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus \overline{X}}(\gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{142}$$

Визначимо потенціал "твердих"кубиків:

$$\chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n) \;=\begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \text{ для всіх } i \neq j \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{143}$$

Тоді (142) можна записати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(\Delta_1,...,\Delta_n)\subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n)\times$$
$$\times \int_{\Gamma_\Lambda} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda}\setminus \overline{X}}(\gamma) e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{144}$$

де $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ це послідовність кубиків на відміну від множини кубиків у формулі (142). Сумування по кожному $\Delta_i$ в (144) виконується незалежно по кожному кубику.

Наступним кроком є представлення експоненти в (144):

$$e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \;=\; e^{-\beta U(\eta)} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}) - \beta W(\eta;\gamma_{\Delta_i})} \prod_{1\leq i<j\leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i};\gamma_{\Delta_j})}\times$$
$$\times e^{-\beta W(\eta;\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i};\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}, \tag{145}$$

де $X_n := \cup_{i=1}^n \Delta_i$, а $\Lambda_a$ визначене в (26). Тоді, використовуючи розклад (145) і властивість (35), отримуємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \widetilde{\rho}_n^\Lambda(\eta), \tag{146}$$

де

$$\widetilde{\rho}_n^\Lambda(\eta) \;=\; \sum_{(\Delta_1,...,\Delta_n)\subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n) e^{-\beta U(\eta)}\times \tag{147}$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \left( \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}|\eta)} \right) \prod_{1\leq i<j\leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta_j})}\times$$
$$\times \int_{\Gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}^{(dil)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}|\eta)} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})},$$

де $U(\gamma|\eta)$ визначено в (57). Розіб'ємо простір конфігурацій $\Gamma_{\Delta}^{(den)}$ на два підпростори $\Gamma_{\Delta}^{(>)} = \Gamma_{\Delta}^{(>)}(\eta)$ і $\Gamma_{\Delta}^{(<)} = \Gamma_{\Delta}^{(<)}(\eta)$, які визначаються формулами:

$$\Gamma_{\Delta}^{(>)}(\eta) = \Gamma_{\Delta}^{(>)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_{\Delta}^{den} \middle| \; |\gamma| > d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta), \;\; |\gamma| \geq 2 \right\} \tag{148}$$

і

$$\Gamma_{\Delta}^{(<)}(\eta) = \Gamma_{\Delta}^{(<)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_{\Delta}^{den} \middle| \; |\gamma| \leq d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta), \;\; |\gamma| \geq 2 \right\}, \tag{149}$$

де $\Delta \in \overline{\Delta}_a$, $0 < \varepsilon \leq 1$ і $d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta) = (dist(\eta, \Delta))^{\varepsilon}$.

Очевидно, що $\Gamma_{\Delta}^{(den)} = \Gamma_{\Delta}^{(>)} \cup \Gamma_{\Delta}^{(<)}$. Для довільних $X_a = \cup_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,X}} \Delta$, де $\overline{\Delta}_{a,X} = \{\Delta \in \overline{\Delta}_a \mid \Delta \cap X \neq \emptyset\}$, $X, X_a \subset \mathbb{R}^d$ позначимо

$$\Gamma_{X_a}^{(sign)} := \bigsqcup_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,X}} \Gamma_{\Delta}^{(sign)}, \;\; sign \in \{dil, >, <\}. \tag{150}$$

Тоді кожний інтеграл у першому добутку формули (147) можна розбити на два інтеграли

$$\int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...) \; = \; \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(>)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...) + \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(<)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...). \tag{151}$$

З формули (151) випливає, що суму по всіх можливих положеннях $(\Delta_1, ..., \Delta_n) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$ можна розбити на $2^n$ члени, у кожному з яких сума по $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ розбивається на суму по $(\Delta_1, ..., \Delta_k) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$, і суму по $(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta_i^{'}} \in \Gamma_{\Delta_i^{'}}^{(>)}$, а $k$ змінюється від $k = 0$ до $k = n$.

Тоді вираз (146) можна записати у вигляді:

$$\rho_{\Lambda}(\eta) \; = \; \frac{z^{|\eta|}}{Z_{\Lambda}} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \, (n-k)!} \, \widetilde{\rho}_{n;k}^{\Lambda}(\eta), \tag{152}$$

де

$$\widetilde{\rho}_{n;k}^{\Lambda}(\eta) \; = \sum_{(\Delta_1, ..., \Delta_k) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \; \sum_{(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_k, \Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k}\left(\int_{\Gamma^{(<)}_{\Delta_i}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}|\eta)}\right) \prod_{1\le i<j\le k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta_j})}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-k}\left(\int_{\Gamma^{(>)}_{\Delta'_i}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta'_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta'_i}|\eta)}\right) e^{-\beta U(\eta)} \prod_{1\le i<j\le n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta'_i}|\gamma_{\Delta'_j})}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta'_j})} \int_{\Gamma^{(dil)}_{\Lambda_a\setminus X_n}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}) e^{-\beta W(\eta|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta'_j}|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\right)\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\right) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})} \tag{153}$$

а $X_n = (\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{n-k}\Delta'_j)$.

**Зауваження 4.3.** В тих кубиках, які перетинають межу області $\Lambda$ (i.e.$\Delta\cap\Lambda\ne\Delta$ але $\Delta\cap\Lambda\ne\emptyset$), інтегрування в (153) виконується по конфігураціях $\Gamma^{(sign)}_{\Delta\cap\Lambda}$, $sign\in\{dil,>,<\}$.

### 4.6.2 Існування станів Гіббса

**Теорема 2.** Нехай потенціал взаємодії $\phi$ задовольняє умовам $\mathbf{A}$(див. (42)-(44)). Тоді для довільного $\Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільних $\beta,z\ge 0$ існує константа $\xi=\xi(\beta,z)$ (що не залежить від $\Lambda$) така, що кореляційні функції $\rho^\Lambda(\eta)=\rho^\Lambda(\eta\mid\emptyset)$ задовольняють наступну нерівність:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;\le\; \xi^{|\eta|}e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \tag{154}$$

для довільного $0<\delta<1$.

*Доведення.* Щоб довести теорему використаємо розклад (153). Це дозволяє інтеграл (84) по усіх можливих конфігураціях $\Gamma_\Lambda$ представити у вигляді розкладу, кожний член якого містить інтеграли, у яких інтегрування виконується в окремих кубиках в одному з просторів $\Gamma^{(<)}_{\Delta}$,

$\Gamma_{\Delta}^{(>)}$ або $\Gamma_{\Delta}^{(dil)}$. Враховуючи визначення (45), отримуємо оцінку:

$$-\beta\sum_{i=1}^{k}W(\eta|\gamma_{\Delta_i})\;\le\;\beta\,|\eta|\sup_{x\in\eta}\sum_{i=1}^{k}\sup_{y\in\gamma_{\Delta_i}}\;\phi^{-}(|x-y|)|\gamma_{\Delta_i}|\;\le\;\beta\,|\eta|\,\upsilon_{\varepsilon}. \tag{155}$$

Остання нерівність справедлива тому, що $\gamma_{\Delta_i}\in\Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$; таким чином

$$|\gamma_{\Delta_i}|\;\le\;d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta_i)\;\le\;|x-y|^{\varepsilon}, \tag{156}$$

де ми вибираємо $\varepsilon<\varepsilon_0$. Враховуючи (45) і (156), легко отримати:

$$-\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}W_{\phi^-}(\gamma_{\Delta'_j}|\gamma_{\Delta_i})\;\le\;\beta\sum_{j=1}^{n-k}|\gamma_{\Delta'_j}|(\upsilon_{\varepsilon}+(|\gamma_{\Delta'_j}|+1)\upsilon_0). \tag{157}$$

Деталі доведення в [49] (Лема 3.1).

Враховуючи, що $\gamma_{\Delta}\in\Gamma_{\Delta}^{(dil)}$, $|\gamma_{\Delta_i}|\le 1$, $\forall\,\Delta\in\Lambda_a\setminus X_n$, отримаємо оцінки:

$$-\beta W(\eta\,|\,\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})\le\beta\,|\eta|\,\upsilon_0 \tag{158}$$

і

$$-\beta W(\gamma_{\Delta'_j}\,|\,\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})\le\beta|\gamma_{\Delta'_j}|\upsilon_0. \tag{159}$$

Умови **A**(див. (42)-(44)) дозволяють розбити потенціал $\phi$ на дві частини:

$$\phi\;=\;\delta\phi^{+}+\phi_{\delta}^{st},\;\;\phi_{\delta}^{st}:=(1-\delta)\phi^{+}+\phi^{-}, \tag{160}$$

і так само, як ми отримали оцінку (48) за допомогою (49), маємо

$$U_{\phi_{\delta}^{st}}(\gamma)\ge\sum_{\Delta\in\overline{\Delta}_{\lambda}:|\gamma_{\Delta}|\ge 2}\left[\frac{(1-\delta)\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^{s}}-\frac{\upsilon_0}{2}\right]|\gamma_{\Delta}|^{2}-\frac{\upsilon_0}{2}|\gamma|. \tag{161}$$

Для того, щоб мати позитивне значення виразу у квадратних дужках, треба вибрати достатньо мале значення параметра $a$. Виберемо деяке максимальне значення $a=a_*(\delta)$, для якого зберігається умова стійкості:

$$U_{\phi_\delta^{st}}(\gamma) \;\geq\; -B_\delta|\gamma|,\; B_\delta = \frac{\upsilon_0(a_*)}{2}. \tag{162}$$

Ця нерівність дозволяє записати наступну оцінку:

$$\sum_{i=1}^{n-k}\Big(U_{\phi_\delta^{st}}(\gamma_{\Delta_i'}) + W_{\phi_\delta^{st}}(\eta|\gamma_{\Delta_i'})\Big) + U_{\phi_\delta^{st}}(\eta) + \tag{163}$$
$$\sum_{1\leq i<j\leq n-k} W_{\phi_\delta^{st}}(\gamma_{\Delta_i'}|\gamma_{\Delta_j'}) \;\geq\; -B_\delta\,(\,|\eta| + \sum_{i=1}^{n-k}|\gamma_{\Delta_j'}|).$$

Для того, щоб проконтролювати збіжність інтегралів по просторах $\Gamma^{(>)}_{\Delta_i'}, i = 1,...,n-k$ і сум по кубиках $(\Delta_1^{'},...,\Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, розіб'ємо енергію $U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta_i'}) = \delta U_{\phi^+}(\gamma_{\Delta_i'})$ на дві частини, вибравши $\delta \;=\; \delta^{'} \;+\; \delta^{''}$ з деякими позитивними малими константами $\delta^{'}, \delta^{''}$. Використовуючи умову (43) і те, що для $\gamma_{\Delta'} \in \Gamma^{(>)}_{\Delta'}$ кількість точок $|\gamma_{\Delta'}| > d_\eta^\varepsilon(\Delta')$ (див. (148)), можна записати наступну нерівність:

$$U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta_i'}) \geq \frac{1}{2}\delta'\,\frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,|\gamma_{\Delta_i'}|\,(|\gamma_{\Delta_i'}| \,-\, 1) \,+\, \delta''\,\frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,d_\eta^\varepsilon(\Delta_i^{'}). \tag{164}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралу

$$\int_{\Gamma^{(>)}_\Delta}\lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta)\,e^{-\frac{1}{2}\beta\delta'\,\frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,|\gamma_{\Delta_i'}|\,(|\gamma_{\Delta_i'}|\,-\,1)+\beta\,(B_\delta+\upsilon_0\,(2+|\gamma_\Delta|)+\upsilon_\varepsilon)|\gamma_\Delta|} =$$
$$= \; K_1(a,z,\beta,\phi) \tag{165}$$

для достатньо малого $a$ і це допомагає оцінити наступні суми:

$$\sum_{(\Delta_1^{'},...,\Delta_{n-k}^{'})\subset\overline{\Delta}_{a,\Lambda}}\;\prod_{\Delta'\in\overline{\Delta}_{a,\Lambda}} e^{-\delta''\,\frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,d_\eta^\varepsilon(\Delta_i^{'})} \leq \big(|\eta|K_2(a,\beta,\varepsilon)\big)^{n-k}. \tag{166}$$

Деталі доведення в [49] (Лема 3.3). Позначимо через $X_{n-k}^{(max)}$ об'єднання усіх кубів $\Delta_1^{'}\cup...\cup\Delta_{n-k}^{'} \;=\; X_{n-k}^{'}$, в яких інтеграл (153) по конфігураціях в $\Lambda_a\setminus X_n$ приймає максимальне значення. Тоді, враховуючи елементарну оцінку $\chi^{cor}(\Delta_1,...,\Delta_k,\Delta_1^{'},...,\Delta_{n-k}^{'}) \;\leq\; \chi^{cor}(\Delta_1,...,\Delta_k)$ (див.

(143)) і в такій самій формі як (146), (147) для $\eta = \emptyset$ розклад для $Z_{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}$, отримаємо наступну оцінку

$$\rho_\Lambda(\eta) \leq \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{(|\eta|K)^{n-k}}{k!(n-k)!} \widetilde{\rho}_k^{\Lambda_a \setminus X_{n-k}^{(max)}}(\emptyset) =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_\Lambda} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \sum_{k=0}^{N_\Lambda - l} \frac{1}{k!} \widetilde{\rho}_k^{\Lambda_a \setminus X_l^{(max)}}(\emptyset) =$$

$$= e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_\Lambda} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \frac{Z_{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}}{Z_\Lambda}, \tag{167}$$

де $K = K_1 K_2$ (див. (165), (166)), $\bar{\xi} := z e^{\beta(B_\delta + \upsilon_0 + \upsilon_\varepsilon)}$, і $\widetilde{\rho}_k^{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}(\emptyset)$ і визначається формулою (147). З того факту, що $Z_{\Lambda_1} \leq Z_{\Lambda_2}$ для $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, слідує нерівність (154) з $\xi = \bar{\xi} e^K$.

**Зауваження 4.4.** В нерівностях (162)-(166) константи $\upsilon_\varepsilon, \upsilon_0, B_\delta, K_1, K_2$ залежать від параметра $a$, тому $\xi$ залежить від $a$, який є фіксованим. Але $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ повинні бути такими, щоб взаємодія двох частинок в одному кубику була позитивною, тобто $a < r_0$ (див. (43)). Це забезпечує виконання нерівності (161).

$\square$

З нерівностей (4) і (154) слідує, що для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ і довільної послідовності $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ $(\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1})$, яка прямує до $\mathbb{R}^d$ у сенсі Фішера (див. [19], Гл.2, § 2.1), такої, що $\eta \subset \Lambda_1$, існує підпослідовність $(\Lambda_{n_k})$ послідовності $(\Lambda_n)$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} \rho_{\Lambda_{n_k}}(\eta) = \rho(\eta) < \infty \tag{168}$$

для довільних позитивних $z, \beta$.

Як наслідок послідовностей (4) і (154) справедливою є наступна теорема.

**Теорема 3.** Нехай потенціал взаємодії $\phi$ задовольняє умовам **(A)**. Тоді для довільних $z \geq 0$ і $\beta \geq 0$

$$\mathcal{G}(\phi, z, \beta) \neq \emptyset.$$

*Доведення* слідує з роботи [32] (див. також інші аргументи в роботі [50], яка базується на (154) і Теоремі Прохорова).

Проблема граничного термодинамічного переходу для нерівноважних систем є значно складнішою і до цього часу повністю не вирішеною. Дослідження у цьому напрямку почалися, мабуть, ще з робіт Ленфорда [90, 91] (див. також інший підхід [92]). Надзвичайно важливим і плідним виявився операторно-функціональний підхід, запропонований Петриною [93], який розвивався в його власних роботах і в його учнів (див. детальніше [21, 94, 95]).

В підході, який розвивається в даній роботі, треба виконати граничний перехід у виразі (135). Безпосередньо міру початкового розподілу, яка в обмеженому об'ємі є $\mu^0_{D_\Lambda}(d\widetilde{\gamma}) = D_\Lambda(0; \widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma})$, можна побудувати для взаємодій типу (42)-(43), як це було зроблено у випадку рівноважних розподілів. Але для повного вирішення цієї проблеми потрібно знайти слабкі розв'язки рівняння (138) і дослідити питання їх інтегрування за мірою $\mu^0$, яка є граничною мірою міри $\mu^0_{D_\Lambda}$. Це питання є досить нетривіальним. Коротке обговорення питання існування таких розв'язків і деякі посилання на роботи, де приведені класи початкових умов, що забезпечують їх існування, приводиться в роботі [89].

# 5 Модель коміркового газу

Оцінки щільності міри Гіббса для обмеженої системи $e^{-\beta U(\gamma)}$ для конфігурацій $\gamma \in \Gamma^{(den)}_X$ вказують на те, що для посилено надстійких взаємодій роль щільних конфігурацій (28) є дуже малою, не дивлячись на ту обставину, що з точки зору міри Пуассона на повному просторі нескінченних конфігурацій $\Gamma$ простір $\Gamma^{(dil)}$ є множиною міри нуль (див. [56], пропозиція 3.1). Тому виникає природна ідея описати фізичні властивості нескінченної неперервної системи з посилено надстійкою взаємодією модельною системою, у якої конфігураційний простір є $\Gamma^{(dil)}$. Таку модель ми будемо називати *комірковим газом*.

## 5.1 Конфігураційний простір

**Означення 5.1.** Для заданого розбиття $\overline{\Delta}_a$ простору $\mathbb{R}^d$ система *коміркового газу* (КГ) визначається наступним конфігураційним простором

$$\widetilde{\Gamma}^{(a)} = \widetilde{\Gamma}_{\overline{\Delta}_a} := \left\{ \gamma \in \Gamma | \, |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ для всіх } \Delta \in \overline{\Delta}_a \ \right\}, \tag{169}$$

Для того, щоб описати множини простору $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$, перевизначимо простір $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$ як простір *маркованих конфігурацій*:

$$\widetilde{\Gamma}^{(a)} := \{ \widetilde{\gamma} = \{ (\Delta_1, x_1), ..., (\Delta_n, x_n), ... \} | \, \Delta_i \neq \Delta_j, \ i \neq j \}, \tag{170}$$

де $x_i \in \Delta_i \subset \mathbb{R}^d, \ \Delta_i \in \overline{\Delta}_a$. Тобто, $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$ можна представити як дискретну множину обмежених неперервних "спінів"( див., наприклад, [57], [58]).

Так само, як і в підрозділі 2.2, позначимо через $\widetilde{\Gamma}^{(a)}_0$ множину скінченних конфігурацій $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$ :

$$\widetilde{\Gamma}^{(a)}_0 \ = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \widetilde{\Gamma}^{(a;n)}, \tag{171}$$

де $\widetilde{\Gamma}^{(a;n)}$ – це простір конфігурацій в $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}^{(a)}_0$, який складається з $n$ кубів $\{\Delta_1, ..., \Delta_n\} \subset \overline{\Delta}_a$ і відповідних положень $\{x_1 \in \Delta_1, ..., x_n \in \Delta_n\}$.

Позначимо через $\overline{X}_n$ множину кубів $\Delta_j \in \overline{\Delta}_a$, а через $X_n \subset \mathbb{R}^d$ об'єднання цих кубів. Нехай також $\mathfrak{X}_{\Delta_j}$ борелівські множини в $\mathcal{B}(\Delta_j) := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \restriction \Delta_j, \ \Delta_j \in \overline{\Delta}_a$. Тоді циліндричну множину $\widetilde{X}^{(n)}_N = \widetilde{X}^{(n)}_N(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)$ в $\widetilde{\Gamma}^{(a;n)}$ і в $\widetilde{\Gamma}^{(a)}_0$ можна визначити за допомогою фіксованої множини $\Lambda_N$ і послідовності множин $\mathfrak{X}_{\Delta_j} \in \mathcal{B}(\Delta_j), \ j = \overline{1, N}$ наступним чином

$(n \leq N)$:

$$\widetilde{X}_N^{(n)} = \Big\{\{(\Delta_1, x_1), ..., (\Delta_n, x_n)\} \in \widetilde{\Gamma}^{(a;n)} \ \mid \ \overline{\Lambda}_n \subseteqq \overline{\Lambda}_N, \ \ x_j \in \mathfrak{X}_{\Delta_j}, \ j = \overline{1, n}\Big\} \tag{172}$$

і

$$\widetilde{X} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \ \bigcup_{\overline{\Lambda}_N \subset \overline{\Delta}_a} \ \bigcup_{\overline{\mathfrak{X}}_N} \ \bigsqcup_{n=0}^{N} \widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N) \in \mathcal{B}(\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}), \tag{173}$$

де $\overline{\mathfrak{X}}_N = \{\mathfrak{X}_{\Delta_1}, ..., \mathfrak{X}_{\Delta_N}\}$.

## 5.2 Міри на конфігураційному просторі системи КГ

Визначимо аналог міри *Лебега-Пуассона* на $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$. Визначимо спершу міру $\widetilde{\sigma}^{(n)}$ на множині (172):

$$\sigma^{(n)}(\widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)) \ = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0, \\ \sum\limits_{\overline{\Lambda}_n \subseteqq \overline{\Lambda}_N} \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_1}) \cdots \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_n}) & \text{for } 1 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{for } n \ > \ N. \end{cases} \tag{174}$$

Легко побачити, що використовуючи функцію $\chi_-^{\Delta}$ в (139), можна підрахувати, що для $1 \leq n \leq N$

$$\sigma^{(n)}(\widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)) \ = \ \frac{1}{n!}\int_{\mathfrak{X}_N} dx_1 \cdots \int_{\mathfrak{X}_N} dx_n \prod_{i=1}^{N} \chi_-^{\Delta_i}(\{x_1, ..., x_n\}), \tag{175}$$

де $\mathfrak{X}_N \ := \ \cup_{i=1}^{N} \mathfrak{X}_{\Delta_i}$ і $dx_i = \sigma(dx_i)$. Тоді міру Лебега-Пуассона на $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$ і $\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}_N}^{(a)}$ можна визначити наступною формулою:

$$\lambda_\sigma^{(a)} \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}. \tag{176}$$

Враховуючи (175), легко побачити, що для довільної $F \in L^1(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}} F(\widetilde{\gamma})\lambda_\sigma^{(a)}(d\widetilde{\gamma}) \ = \ \int_{\Gamma_0} F(\gamma) \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \chi_-^{\Delta}(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma). \tag{177}$$

## 5.3 Кореляційні функції та тиск системи КГ

Сім'я кореляційних функцій КГ визначається аналогічно (84):

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\widetilde{\eta}) = \frac{z^{|\widetilde{\eta}|}}{Z_{\Lambda}^{(a)}} \int_{\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\widetilde{\gamma}), \quad \widetilde{\eta} \in \widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}},\ \overline{\Lambda} \in \mathcal{B}_c(\overline{\Delta}_a), \tag{178}$$

$$Z_{\Lambda}^{(a)} \ = \ \int_{\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U(\widetilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\widetilde{\gamma}). \tag{179}$$

Використовуючи (177), праву частину (178) можна переписати за допомогою інтегралу за мірою $\lambda_{z\sigma}$ на $\Gamma_{\Lambda}$:

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\widetilde{\eta}) = \rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_{\Lambda}^{(a)}} \int_{\Gamma_{\Lambda\setminus\Lambda_\eta}} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}_a} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma_{\Delta})\lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{180}$$

де $\Lambda_\eta \ := \bigcup_{\Delta:\Delta\cap\eta\neq\emptyset} \Delta$ і $\eta \in \Gamma_0^{(dil)}$.

Оцінка типу нерівності (154) та існування границі (168) може бути отримана аналогічно (див. деталі в [54]). Але основним результатом є те, що ці граничні функції як завгодно точно апроксимують граничні кореляційні функції $\rho(\eta)$ неперервної нескінченної системи взаємодіючих частинок при прямуванні параметра $a$ до нуля. Такий самий результат був доведений і для тиску. На завершення цього розділу ми наводимо дві теореми, доведення яких можна знайти в роботах [52, 53, 54].

**Теорема 4.** Нехай потенціал взаємодії $\phi$ задовольняє умовам **(A)**. Тоді існують граничні значення термодинамічного потенціалу тиску

$$p(z,\beta) \ = \ \frac{1}{\beta}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_l|}\log Z_{\Lambda_l}(z,\beta), \tag{181}$$

і

$$p^{(a)}(z,\beta) \ = \ \frac{1}{\beta}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_l|}\log Z_{\Lambda_l}^{(a)}(z,\beta) \tag{182}$$

і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a_1 = a_1(z,\beta,\varepsilon) > 0$ таке, що:

$$|p(z,\beta) - p^{(a)}(z,\beta)| < \varepsilon \tag{183}$$

для всіх позитивних значень $z,\ \beta$ і $a \in (0, a_1(z,\beta,\varepsilon))$.

**Теорема 5.** Нехай потенціал взаємодії $\phi$ задовольняє умовам **(A)**. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$, довільних значень активності і температури $z$, $\beta$ і довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ існує $a = a(z, \beta, \varepsilon) > 0$ така, що:

$$|\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(a)}(\eta; z, \beta)| < \varepsilon, \tag{184}$$

де $\rho(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ це граничні значення $\rho_{\Lambda_{n'_k}}(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}_{\Lambda_{n'_k}}(\eta; z, \beta)$ відповідно з тими самими підпослідовностями послідовності $(\Lambda_n)$ (див. (168)).

# 6 Висновки і перспективи

Підсумовуючи вищеприведений опис фундаментальних результатів, підкреслимо, що методи нескінченновимірного аналізу були базовим інструментом математичного обґрунтування статистичної механіки. Ми тут не торкалися проблем квантової статистичної механіки і пропонуємо читачу звернутись до монографій [96, 79, 97, 98]. З точки зору підходу, який був висвітлений у цій роботі при дослідженні конфігураційних просторів, мір Лебега-Пуассона, Пуассона, Гіббса та побудови кластерних розкладів, звертаємо увагу на роботи [42, 46, 47], в яких були запропоновані елементи такого аналізу і конструкції кластерних розкладів.

Ще один дуже важливий напрямок фундаментальних досліджень, який не обговорювався у цьому огляді, стосується критичної поведінки нескінченних систем при великих значеннях параметрів $z, \beta$. Критична поведінка добре досліджена для гратчастих систем, які моделюють спінові системи магнетиків та ангармонічних кристалів. Математично строге обґрунтування фазових переходів для неперервних систем, взаємодія яких описується потенціалами типу Ленарда-Джонсона, є відкритою математичною проблемою. У цьому відношенні автори покладають велику надію на модель коміркового газу, описану у 4-му розділі.

# Література

[1] W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics.* Yale Univ. Press, 1902.

[2] R.H. Fowler. *Statistical mechanics. The theory of the properties of matter in equilibrium.* Cambridge: Univ. Press, 1929.

[3] J. Yvon. *La theorie, statistique des fluids et l'equation d'etat.* Paris: Hermann, 1935. – 270p.

[4] Н.Н. Боголюбов. *Проблемы динамической теории в статистической физике.* М.: Гостехиздат, 1946.

[5] J.G. Kirkwood *The statistical mechanical theory of transport processes.* – J. Chem. Phys, 1946, **14**, p. 180; 1947, **15**, p. 72.

[6] M. Born, H.S. Green. *A general kinetic theory of liquids.* – Proc. Roy. Soc. London A, 1947, **188**, p. 168–201.

[7] А.Я. Хинчин. *Математические основания статистической механики.* М.–Л.: Гостехиздат, 1943.

[8] E. Ising. *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus.* – Zs. Phys., 1925, **31**, p. 253.

[9] R.E. Peierls. *On model Ising's ferromagnetic.* – Proc. Camb. Phil., 1936, **32**, p. 477.

[10] L. Onsager. *Cristal statistical, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition.* – Phys. Rev., 1944, **65**, p. 117.

[11] T.D. Lee, C.N. Yang. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model.* – Phys. Rev., 1952, **87**, p. 410.

[12] Н.Н. Боголюбов, Б.И. Хацет. *О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия.* – ДАН СССР, 1949, **66**, №3, с. 321–324.

[13] Б.И. Хацет. *Асимптотичні розклади за степенями густини функції розподілу систем в стані статистичної рівноваги.* – Наукові записки Житомирського педагогічного інституту, фіз.-мат. серія, 1956, **3**, с. 113–139.

[14] Н.Н. Боголюбов, Д.Я. Петрина, Б.И. Хацет. *Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля.* – Теорет. и мат. физика, 1969, **1**, №2, с. 251–274.

[15] D. Ruelle. *Correlation functions of classical gases.*– Ann. Phys., 1963, **25**, №1, p. 109–120.

[16] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles.* – Helv. Phys. Acta, 1963. **36**, №2, p. 183–197.

[17] L. van Hove. *Quelques proprietes generales de l'integrale de configuration d'un systeme de particules avec interaction* . – Physica, 1949, **15**, №5, p. 951–961.

[18] T.D. Lee, C.N. Yang. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions, I, Theory of Condensation.* – Phys. Rev., 1952, **87**, p. 404.

[19] Д. Рюэль. *Статистическая механика. Строгие результаты.* М.: Мир, 1971.– 368 с.

[20] Р.А. Минлос. *Лекции по статистической физике* . – Успехи математических наук, 1968, **23**, №1, с. 133–190.

[21] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев. *Математические основы классической статистической механики.* – Наукова думка, Київ, 1985. (Переклад: Petrina, D., Gerasimenko, V., Malyshev, P. *Mathematical foundations of classical statistical mechanics.* N.Y.: Gordon and Breach, 1995.

[22] Р.А. Минлос. *Предельное распределение Гиббса* . – Функциональный анализ и приложения, 1967, **1**, вып. 2., с. 60–73.

[23] Р.А. Минлос. *Регулярность предельного распределения Гиббса* . – Функциональный анализ и приложения, 1967, **1**, вып. 3., с. 40–53.

[24] D. Ruelle. *States of classsical statistical mechanics.* – J. Math. Phys., 1967. **8**, № 6, p. 1657–1668.

[25] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием* . – Функ. анал. и приложения, 1968, **2**, вып. 4. с. 31–43.

[26] Р.Л. Добрушин. *Задачи единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов.* – Функ. анал. и приложения, 1968, **2**, вып. 4, с. 44–57.

[27] Р.Л. Добрушин. *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.* – Теор. вер. и её применения, 1968, **13**, вып. 2, с. 201–229.

[28] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские поля. Общий случай* . – Функ. анал. и приложения, 1969, **3**, вып. 1, с. 27–35.

[29] Р.Л. Добрушин. *Задание системы случайных величин при помощи условных распределений.* – Теор. вер. и её применения, 1970, **15**, вып. 3, с. 469–497.

[30] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины.* – Теор. и мат. физ., 1970, **4**, № 1, с. 101–118.

[31] O.E. Lanford, D. Ruelle. *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics* – Commun. in Math. Phys., 1969, **13**, № 3, p. 194–215.

[32] D. Ruelle. *Superstable interactions in classical statistical mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1970, **18**, № 2, p. 127–159.

[33] A. Lenard. *Correlation Functions and the Uniqueness of the State in Classical Statistical Mechanics.* – Commun. math. Phys., 1973, **30**, p. 35–44.

[34] A. Lenard. *States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I* . – Arch. Rational Mech. Anal., 1975, **59**, p. 219–239.

[35] A. Lenard. *States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II* . – Arch. Rational Mech. Anal., 1975, **59**, p. 241–256.

[36] Yu.G. Kondratiev, T. Kuna. *Harmonic analysis on configuration spaces. I. General theory.* – Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probal. Relat. Top., 2002, **5**, № 2, p. 201–233.

[37] А.М. Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев. *Представления группы диффеоморфизмов.* – Успехи Матем. наук, 1975, **30**, вып. 6(186), с. 3–50.

[38] Р.С. Исмагилов. *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. – Матем. сборник, 1975, **98**, вып. 1, с. 55–71.

[39] S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner. *Analysis and geometry on configuration spaces.* – J. Funct. Anal., 1998, **154**, № 2, p. 444–500.

[40] S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner. *Analysis and geometry on configuration spaces: The Gibbsian case* . – J. Funct. Anal., 1998, **157**, № 1, p. 242–291.

[41] A.L. Rebenko. *Poisson Measure Representations and Cluster Expansion in Classical Statistical Mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1993, **151**, p. 427–435.

[42] R. Gielerak, A.L. Rebenko. *Poisson Field Representation in the Statistical Mechanics of Continuous Systems.* – Jour. Operator Theory: Advances and Applications, 1994, **70**, p. 219–226.

[43] R. Gielerak, A.L. Rebenko. *Poisson Integrals Representation in the Classical Statistical Mechanics of Continuous Systems.* – J. Math. Phys., 1996, **37**, № 7, p. 3354–3374.

[44] A.L. Rebenko, G.V. Shchepan'uk. *The Convergence of Cluster Expansions for Continuous Systems with Many-Body Interactions.* – J. Stat. Phys., 1997, **88**, No.3/4, p. 665–689.

[45] A.L. Rebenko. *Polymer expansions for continuous classical systems with many-body interaction.* – Methods of Functional Analysys and Topology, 2005, **11**, No.1, p. 73–87.

[46] Yu.G. Kondratiev, E.W. Lytvynov, A.L. Rebenko, M. Röckner and G.V. Shchepan'uk. *Euclidean Gibbs states for quantum continuous systems with Boltzmann statistics via cluster expansion.*– Methods of Functional Analysys and Topology, 1997, **3**, No.1, p. 62–81.

[47] A.L. Rebenko. *Euclidean Gibbs states for quantum continuous systems via cluster expansion. II. Bose and Fermi statistics.* – Methods of Functional Analysys and Topology, 1999, **5**, No.2, p. 86–100.

[48] A.L. Rebenko. *New Proof of Ruelle's Superstability Bounds.* – J. Stat. Phys., 1998, **91**, № 3/4, p. 815–826.

[49] S.N. Petrenko, A.L. Rebenko. *Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials.* – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2007, **13**, №1, p. 50–61.

[50] O.V. Kutoviy, A.L. Rebenko. *Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection* . – J. Math. Phys., 2004, **45**, No.4, p. 1593–1605.

[51] S.N. Petrenko, A.L. Rebenko. *Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction II: many-body potentials* . – Збірник праць Інституту математики НАН України, 2009, **6**, №1, p. 191–208.

[52] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *Quasi-continuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions* . – Збірник праць Інституту математики НАН України, 2007, **4**, №3, p. 172–182.

[53] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi, *Quasi-lattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions. Correlation functions.* – Jour. Math. Phys., 2009, **50**, №3, p.1–16.

[54] С.М. Петренко, О.Л. Ребенко, М.В. Тертичний. *Про квазінеперервну апроксимацію в класичній статистичній механіці.*- - Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 3, с. 369–384.

[55] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *On stability, superstability and strong superstability of classical systems of Statistical Mechanics* . – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2008, **14**, № 3, p. 287–296.

[56] A.L. Rebenko. *Cell gas model of classical statistical systems.* – Reviews in Math. Phys., 2013, **25**, № 4, p. 1330006-1–28.

[57] H-O. Georgii, H. Zessin. *Large deviations and the maximum entropy principle for marked point Random fields.* – Probab. Theor. Relat. Fields, 1993, **96**, 177–204.

[58] H-O. Georgii, V.A. Zagrebnov. *On the interplay of magnetic and molecular forces in Curie-Weiss ferrofluid models.* – J. Stat. Phys., 1998., **93**, № 1/2, p. 79–107.

[59] Ch. Gruber, H. Tamura, V.A. Zagrebnov. *Berezinskii–Kosterlitz-Thouless Order in Two-Dimensional O(2)-Ferrofluid.* – J. Stat. Phys., 2002, **106**, № 5/6, p. 875–893

[60] K.R. Parthasarathy. *Probability Measure on Metric Spaces. Probability and Mathematical Statistics.* – Academic Press, New York and London, 1967.

[61] N.R. Campbell. *The study of discontinuous problem.* – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1909, **15**, p. 117–136.

[62] N.R. Campbell. *Discontinuities in light emission.* – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1909, **15**, p. 310–328.

[63] J. Mecke. *Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse.* – Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, **11**, p. 74–81.

[64] Y. Ito. *Generalized Poisson functionals.* – Probab. Theor. and Related Fields, 1988, **77**, p. 1–28.

[65] И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин. *Обобщённые функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы прстранства.* – Физматгиз, М., 1961. – 471 с.

[66] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles.* – Helv. Phys. Acta., 1963, **36**, №2, p. 183–197.

[67] Y.M. Park. *Bounds on Exponentials of Local Number Operators in Quantum Statistical Mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1984, **94**, №1, p. 1–33.

[68] Дж. Майер, М. Гепперт-Майер. *Статистическая механика.* – Издательство "Мир Москва, 1980.

[69] H.O. Georgii. *Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems.* – Commun. Math. Phys., 1976, **48**, p. 31–51.

[70] X.X. Nguyen and H. Zessin. *Integral and differential characterization of the Gibbs process.* – Math. Nachr., 1979, **88**, p. 105–115.

[71] К. Престон. *Гиббсовские состояния на счетных можествах* . – М.:Мир, 1977, 126с.

[72] H.O. Georgii. *Canonical Gibbs measure.* – Lecture Notes in Math. Phys., 1979, **760**, Springer Verlag, 190p.

[73] Y. Ito. *On a generalization of non-linear Poisson functionals.* – Math. Rep. Toyoma Univ., 1980, **3**, p. 111–122.

[74] Y. Ito, I. Kubo. *Calculus on Gaussian and Poisson white noise.* – Nagoya Math. Journ., 1988, **111**, p. 41–84.

[75] T. Kuna. *Studies in configuration space analysis and applications.* – PhD thesis, Bonner Mathematische Schriften Nr. 324, University of Bonn, 1999.

[76] О.Л. Ребенко. *Основи сучасної теорії взаємодіючих квантованих полів* . – Київ: Наукова думка, 2007, 539с.

[77] E. Nelson. *Construction of quantum fields from Markoff fields.* – Jour. Funct. Anal., 1973, **12**(1), p. 97–112.

[78] E. Nelson. *Probability Theory and Euclidean field theory.* – In: Constructive Quantum Field Theory, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[79] Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* – Київ: Наукова думка, 1988, 680с.

[80] Л.А. Пастур. *Спектральная теория уравнений Кирквуда–Зальцбурга в конечном объёме.* – Теорет. и мат. физика, 1974, **18**, №2, с. 233–242.

[81] W. Klein. *Spectrum of the Kirkwood-Salsburg operator and phase transition.* – J. Math. Phys., 1975, **16**, No.7, p. 1482–1487.

[82] H. Moraal. *Derivation and spectrum of generalized Kirkwood-Salsburg operator.* – Physica A, 1975, **81**, No.3, p. 469–474.

[83] H. Moraal. *Spectral properties of Kirkwood-Salsburg operator.* – Physica A, 1977, **87**, No.2, p. 331–343.

[84] V.A. Zagrebnov. *Spectral properties of Kirkwood-Salsburg and Kirkwood-Ruelle operators.* – J. Stat. Phys., 1982, **27**, No.3, p. 577–591.

[85] Н.С. Гончар. *Об уравнениях для приведенных функций распределения Н.Н. Боголюбова и их решении при произвольных значениях плотности частиц.* – Теорет. и мат. физика, 1983, **57**, №1, с. 85–96.

[86] N.S. Gonchar. *Correlation Functions of Some Contonuous Model Systems and Description of Phase Transitions.* – Phys. Reports, 1989, **172**, No.5, p. 175–337.

[87] H. Spohn. *On the Vlasov Hierarchy.* – Math. Meth. in Appl. Sci., 1981, **3**, p. 445–454.

[88] A.L. Rebenko. *Poisson Analysys and Statistical Mechanics.* – Condensed Matter Physics, 1996, №8, p. 119–127.

[89] В.П. Маслов, А.М. Чебатарев. *О случайних полях, отвечающих цепочкам Боголюбова, Власова, Больцмана.* – Теор. и мат. физ., 1983, **54**, №1, с. 78–88.

[90] O.E. Lanford III. *The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. Existance theorem.* – Commun. Math. Phys., 1968, **9**, p. 169–180.

[91] O.E. Lanford III. *Time evolution of large classical systems.* – Lect. Notes Phys., 1975, **38**, p. 1–111.

[92] Я.Г. Синай. *Построение динамики в одномерных системах статистической механики.* – Теор. и мат. физ., 1972, **11**, №2, с. 248–258.

[93] D.Ya. Petrina. *Mathematical description of the evolution of infinite systems of classical statistical physics.* – K., 1978 (Preprint ITP, № 37E).

[94] D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko. *Mathematical problems of the statistical mechanics of a hard-sphere system.* – Russ. Math. Surv. (Uspekhi Mat. Nauk), **45**, (3), (1990), 135–182.

[95] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* – Kluwer Acad. Publ., 1997.

[96] У. Брателли, Д. Робинсон. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* – М.: Мир, 1976, 424с.

[97] Д.Я. Петрина. *Математические основы квантовой статистической механикию Непрерывные системы.* – Киев: Институт математики, 1995. Изд.2-е, М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ 2013.

[98] V.I. Gerasimenko. *Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations.* – In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications, N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2012, p. 233–288.