Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 316–325

УДК 517.9

Юлія Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
yusam@univ.kiev.ua

Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю

The paper deals with the problem of existing solution to the first order partial differential equation with quadratic nonlinearity. There are found conditions on existing solutions to Cauchy problem for the equation mentioned above in the space of quickly decreasing functions.

У даній статті розглядається задача про існування розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю. Отримано умови існування розв'язку задачі Коші для даного рівняння в просторі швидко спадних функцій.

1 Вступ

При побудові [1] асимптотичних багатофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами виникає задача про існування у просторі швидко спадних функцій розв'язків рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$a(x,t)u_t + uu_x + a(x,t)b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b(x,t)}\right)u + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t)}\right)u^2 = 0, \tag{1}$$

яке визначає головний член регулярної частини шуканої асимптотики.

Аналогічну задачу, що пов'язана з визначенням головного члена регулярної частини асимптотики однофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, розглянуто в [2, 3]. Зауважимо, що у цьому випадку головний член регулярної частини частини асимптотики визначався з рівняння Хопфа.

У даній статті вивчається питання про існування розв'язків задачі Коші для рівняння (1) у просторі швидко спадних функцій.

2 Основні позначення

У подальшому використовується простір швидко спадних функцій $S(\mathbf{R})$, тобто простір таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел $m, n \geq 0$ виконується умова [6]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^\infty(0, T; S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0; T]$ функцій $u(x, t)$, для яких при довільних цілих $m, k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty.$$

3 Існування розв'язку рівняння (1)

Для отримання умов існування розв'язку рівняння (1) в просторі швидко спадних функцій скористаємося методом характеристик.

У подальшому розглядаються випадки, коли $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$ та $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$.

У першому випадку система характеристик для рівняння (1) записується у вигляді

$$\frac{dt}{a_1(x)a_2(t)} = \frac{dx}{u} = \frac{b(x)du}{b'(x)\,u^2},$$

і має два перших інтеграли

$$\varphi(x,u) = c_1, \quad \psi(x,t,u) = c_2, \tag{2}$$

де

$$\varphi(x,u) = \frac{u}{b(x)}, \tag{3}$$

$$\psi(x,t,u) = \frac{u}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_0^x \frac{a_1(\xi)}{b(\xi)}\, d\xi. \tag{4}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Phi\left(\varphi(x,u), \psi(x,t,u)\right) = 0. \tag{5}$$

Тут $\Phi(\varphi,\psi) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (5), тобто вираз

$$\frac{1}{b(x)}\left(\Phi_\phi + \Phi_\psi \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}\right)$$

не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G_1 значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u) \to (\varphi,\psi)$, де $\varphi = \varphi(x,u)$, $\psi = \psi(x,t,u)$. Крім того, припускається, що для функції $\Phi(\varphi,\psi)$ існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0,\psi_0) = 0$.

Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1^0. *коефіцієнти рівняння (1) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову* $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$, $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$, *причому функція* $a_1(x)$ *обмежена для всіх* $x \in \mathbf{R}$, *а для функції* $b(x)$ *виконується нерівність* $b(x) \geq c_1$ *для деякого* $c_1 > 0$;
2^0. *існують такі сталі* K_n, $M_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, *що для всіх* $x \in \mathbf{R}$ *виконуються нерівності*

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\, b(x)\right| \leq K_n, \quad \left|\frac{d^n}{dx^n} a_1(x)\right| \leq M_n;$$

3^0. *існують такі сталі* $c_2 > 0$, $c_3 \geq 0$, *що для всіх* $x \in \mathbf{R}$ *виконується* *нерівність*

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta \right| \geq |c_2 x + c_3|\,;$$

4^0. *функція* $\Phi(\xi,\eta)$ *в (5) належить простору* $C^\infty(Pr_{O\xi}\Xi; S)$, *де* $Pr_{O\xi}\Xi$ *– проекція множини* $\Xi \subset \mathbf{R}^2$ *на вісь* $O\xi$;
5^0. *рівняння (5) має обмежений розв'язок* $u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbf{R} \times [0;T])$;
6^0. *існує така стала* $C > 0$, *що повна похідна за змінною* u *від функції в лівій частині (5) задовольняє для всіх* $(x,t,u) \in G_1$ *нерівність*

$$\left| \frac{d}{du}\, \Phi\left(\frac{u}{b(x)}, \frac{u}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_0^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta \right) \right| \geq C.$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.
Доведення. Продиференціювавши співвідношення (5) за змінними x, t, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\Phi_\varphi \frac{b'(x)}{b(x)}\, u + \Phi_\psi \left(a_1(x) + \frac{b'(x)}{b(x)}\, u \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right) \right) \times \tag{6}$$

$$\times \left(\Phi_\varphi + \Phi_\psi \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Phi_\psi \frac{u}{a_2(t)} \left(\Phi_\varphi + \Phi_\psi \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)^{-1}. \tag{7}$$

З умов теореми 1 та (6), (7) випливає, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Аналогічно безпосередніми обчисленнями похідних старшого порядку можна показати, що старші похідні за змінними x, t від функції $u(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій. Це означає, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Psi\left(\varphi(t,u), \psi(x,t,u)\right) = 0, \tag{8}$$

де

$$\varphi(t,u) = \frac{u}{b(t)}, \tag{9}$$

$$\psi(x,t,u) = \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)} d\eta - \int\limits_0^x a_1(\eta)\, d\eta, \tag{10}$$

функція $\Psi(\varphi,\psi) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (8), тобто вираз

$$\frac{1}{b(t)} \left(\Psi_\varphi + \Psi_\psi \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta \right)$$

не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G_2 значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u) \to (\varphi,\psi)$, де $\varphi = \varphi(t,u)$, $\psi = \psi(x,t,u)$ з (9), (10). Крім того, припускається, що для функції $\Psi(\varphi,\psi)$ існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0) \in \Xi$, для якої $\Psi(\varphi_0,\psi_0) = 0$.

Має місце твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1^0. *коефіцієнти рівняння (1) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, причому $b(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$* ;
2^0. *функція $a_1(x)$ обмежена для всіх $x \in \mathbf{R}$, задовольняє умову 2^0 теореми 1 та для неї існують такі сталі $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_0^x a_1(\eta)\, d\eta \right| \geq |c_1 x + c_2| \,;$$

3^0. *виконується умова 4^0 теореми 1* ;

4^0. *існує така стала* $C > 0$*, що повна похідна за змінною* u *від функції в лівій частині (8) задовольняє для всіх* $(x, t, u) \in G_2$ *нерівність*

$$\left| \frac{d}{du} \ \Psi\left(\frac{u}{b(t)}, \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - \int\limits_0^x a_1(\eta)\, d\eta \right) \right| \geq C.$$

Тоді похідні $u_t(x,t)$*,* $u_x(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Продиференціювавши співвідношення (8) за змінними x, t отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Psi_\psi\, a_1(x)\, b(t) \left(\Psi_\varphi + \Psi_\psi \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta \right)^{-1}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\Psi_\varphi \frac{b'(t)}{b(t)}\, u + \Psi_\psi \left(\frac{b'(t)}{b(t)}\, u \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - \frac{b(t)}{a_2(t)} \right) \right) \times \tag{12}$$

$$\times \left(\Psi_\varphi + \Psi_\psi \int\limits_0^t \frac{b(\xi)}{a_2(\xi)}\, d\xi \right)^{-1},$$

звідки, враховуючи умови теореми 2, отримуємо, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Аналогічно показується, що старші похідні за змінними x, t функції $u(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій, тобто $u_x(x,t)$, $u_t(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$.

4 Існування розв'язку задачі Коші для рівняння (1)

Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння (1) у випадку $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$ з початковою умовою

$$u(x,0) = g_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

де припускається, що функція $g_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$.

Розв'язок задачі Коші (1), (13) неявним чином визначається із співвідношення

$$u(x,t) = b(x)\, G\left(f\left(\frac{u(x,t)}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_0^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta \right)\right), \qquad (14)$$

де $G(\xi) = g_0(\xi)/b(\xi)$, а функція $f = f(y)$ є оберненою до функції

$$y = y(x) = -\int\limits_0^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta. \qquad (15)$$

Має місце твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення:*
1^0. *виконуються умови* 1^0 – 3^0 *теореми 1* ;
2^0. *функції* $b'(x), g_0(x)$ *належить простору* $S(\mathbf{R})$;
3^0. *функція* $f = f(y)$, *яка є оберненою до функції* $y = y(x)$, *що визначена формулою (15), для деяких дійсних сталих* c_1, c_2, *де* $c_1 \neq 0$, *задовольняє нерівність* $|f(y)| \geq |c_1 y + c_2|$;
4^0. *функція* $f = f(y)$ *є нескінченно диференційовною і її похідні при кожному* $y \in \mathbf{R}$ *задовольняють нерівності*

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \leq (M_k |y| + N_k)^{l_k},$$

де M_k, N_k – *деякі дійсні додатні сталі,* l_k – *натуральні числа,* $k \in \mathbf{N}$;
5^0. *існує така стала* $C > 0$, *що для всіх* $(x,t,u) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathcal{U}$ *має місце нерівність*

$$\left| \frac{dG(f(z))}{dz} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - 1 \right| \geq C,$$

де

$$z = z(x,t) = \frac{u}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_0^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta, \qquad (16)$$

множина $\mathcal{U} = \{u \in \mathbf{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]\}$.
Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Продиференціювавши співвідношення (14) за змінними x, t, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(a_1(x) \frac{dG(f(z))}{dz} - b'(x) G(f(z)) + \frac{b'(x)}{b(x)} \, u \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right) \times \tag{17}$$

$$\times \left(1 - \frac{dG(f(z))}{dz} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dG(f(z))}{dz} \, u \left(b(x) a_2(t) \left(1 - \frac{dG(f(z))}{dz} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right) \right)^{-1}, \tag{18}$$

де $z = z(x,t)$ з (16).

Враховуючи умови теореми 3, зокрема, властивості функцій $g_0(x)$, $f(y)$, з (17), (18) отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Аналогічно, записавши вирази для похідних вищих порядків, отримуємо, що функції $\partial^{n+m} u/(\partial x^n \, \partial t^m)$, де n, m – такі довільні цілі невід'ємні числа, що $n + m > 0$, при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння (1) у випадку $a(x,t) = a_1(x) a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$ з початковою умовою (13). Розв'язок задачі Коші (1), (13) визначається неявним чином із співвідношення

$$u = F\left(f\left(\frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)} \, d\eta - \int\limits_0^x a_1(\eta) \, d\eta \right), t \right), \tag{19}$$

де $F(\xi,t) = g_0(\xi)/b(t)$, а функція $f = f(y)$ є оберненою до функції

$$y = y(x) = -\int\limits_0^x a_1(\eta) d\eta. \tag{20}$$

Має місце твердження.

Теорема 4. *Нехай мають місце припущення:*

1^0. *виконуються умови* 1^0 – 4^0 *теореми 2*;

2^0. *функція* $g_0(x)$ *належить простору* $S(\mathbf{R})$;
3^0. *функція* $f = f(y)$, *яка є оберненою до функції* $y = y(x)$, *що визначена формулою (20), для деяких дійсних сталих* c_1, c_2, *де* $c_1 \neq 0$, *задовольняє нерівність* $|f(y)| \geq |c_1 y + c_2|$;
4^0. *функція* $f = f(y)$ *є нескінченно диференційовною і її похідні при кожному* $y \in \mathbf{R}$ *задовольняють нерівності*

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \leq (M_k |y| + N_k)^{l_k} \,,$$

де M_k, N_k *– деякі дійсні додатні сталі,* l_k *– натуральні числа,* $k \in \mathbf{N}$;
5^0. *існує така стала* $C > 0$, *що для всіх* $(x, t, u) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathcal{U}$ *має місце нерівність*

$$\left| \frac{1}{b(t)} \frac{\partial F(f(z), t)}{\partial z} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - 1 \right| \geq C,$$

де

$$z = z(x, t) = \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - \int\limits_0^x a_1(\eta) d\eta, \tag{21}$$

множина $\mathcal{U} = \{u \in \mathbf{R} : u = u(x, t), (x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]\}$.
Тоді похідні $u_x(x, t)$, $u_t(x, t)$ *належать простору* $C^\infty(0, T; S)$.
Доведення. Продиференціювавши співвідношення (19) за змінними x, t, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial\, x} = -a_1(x) \frac{\partial F(f(z), t)}{\partial z} \times \tag{22}$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{b(t)} \frac{\partial F(f(z), t)}{\partial z} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial\, t} = u \left(\frac{u}{a_2(t)} - \frac{b'(t)}{b^2(t)} \right) \frac{\partial F(f(z), t)}{\partial z} \times \tag{23}$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{b(t)} \frac{\partial F(f(z), t)}{\partial z} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta \right)^{-1},$$

де $z = z(x, t)$ з (21).

Враховуючи умови теореми 4, зокрема, властивості функцій $g_0(x)$, $f(y)$, з (22), (23) отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Аналогічно, записавши вирази для похідних вищих порядків, отримуємо, що функції $\partial^{n+m}u/(\partial x^n \partial t^m)$, де n, m – такі довільні цілі невід'ємні числа, що $n+m>0$, при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Теорему 4 доведено.

5 Висновки

У даній статті отримано умови існування в просторі швидко спадних функцій розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю.

Література

[1] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.I.* Укр. мат. журн., **64**, (2012), 970 – 987.

[2] Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок)* Математичний вісник НТШ, **7**, (2010), 227 – 242.

[3] Ю.І. Самойленко. *Існування розв'зку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій.* Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **9**, (2012), 293 – 300.

[4] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.* Укр. мат. журн., **57**, (2005), 111 – 124.

[5] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко.*Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.* Укр. мат. журн., **59**, (2007), 122 – 132.

[6] М.А. Шубин.*Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* М.: Наука, 1978..

[7] Ю.Д. Головатий, В.М. Кирилич, С.П. Лавренюк. *Диференціальні рівняння.* Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011.