Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 326–341

УДК 517.54

А.Л. Таргонський

Житомирський Державний університет ім. І. Франка
targonsk@zu.edu.ua

Одна екстремальна задача на $(2n, 2m)$-променевій системі точок

Знайдено максимум функціоналу, що складається із добутків внутрішніх радіусів для довільної степені внутрішніх радіусів областей.

Maximum the find for functional, which the consist with product inner radius for arbitrary degrees of inner radius domains.

Вступ.

У геометричний теорії функцій комплексного змінного екстремальні задачі для функціоналів складених із добутків внутрішніх радіусів областей представляють добре відомий класичний напрям. Виникнення цього напряму пов'язано з роботою академіка М.А. Лаврентьєва [1], де вперше поставлена та розв'язана задача про добуток конформних радіусів двох неперетинних однозв'язних областей. У подальшому цю задачу узагальнили та посилили у багатьох роботах (див., напр. [2 – 13]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних та дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація або сфера Рімана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 2n},\ p = \overline{1, 2m}\},$$

назвемо $(2n, 2m)$-променевою системою точок, якщо при всіх $k = \overline{1, 2n}$ виконуються співвідношення:

$$\begin{array}{l} 0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,2m}| < \infty; \\ \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,2m} =: \theta_k; \\ 0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi. \end{array} \tag{1}$$

Для таких систем точок введемо у розгляд наступні величини:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right], \ k = \overline{1, 2n}, \ \alpha_{n+1} := \alpha_1, \ \alpha_0 := \alpha_n, \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 2.$$

При виконанні умов $\alpha_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1, 2n}$ систему точок $A_{2n,2m}$ будемо називати рівнокутовою.

Розглянемо систему кутових областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи точок розглянемо наступні "керуючи" функціонали

$$M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k-1,2p-1}|,$$

$$M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k-1,2p}|,$$

$$M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k,2p}|,$$

$$M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k,2p-1}|,$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Нехай D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – довільна відкрита множина та $w = a \in D$, тоді через $D(a)$ позначимо зв'язну компоненту D, яка містить точку a. Для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи $A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 2n}, \ p = \overline{1, 2m}\}$ та відкритої множини D, $A_{2n,2m} \subset D$ позначимо через $D_k\left(a_{s,p}\right)$ зв'язну компоненту множини $D\left(a_{s,p}\right) \bigcap \overline{P_k}$, яка містить точку $a_{s,p}$, $k = \overline{1, 2n}$, $s = k, k+1$, $p = \overline{1, 2m}$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$.

Будемо вважати, що відкрита множина D, $A_{2n,2m} \subset D$ задовольняє умові неналягання відносно $(2n,2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, якщо виконується умова

$$D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,p}) = \varnothing, \tag{2}$$

$k = \overline{1,2n}$, $p,s = \overline{1,2m}$ по всім кутам $\overline{P_k}$.

Позначимо через $r(B;a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [4 – 6, 14]).

Предметом вивчення нашої роботи є наступні задачі.

Задача 1. Нехай $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$J = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p}\right) r\left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1}\right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n,2m)$-променева система точок виду (1), а $\{B_{k,p}\}$ – довільний набір попарно неперетинних областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$).

Задача 2. Нехай $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$I = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(D, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{D,2p}, a_{2k-1,2p}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(D, a_{2k,2p}\right) r\left(D, a_{2k,2p-1}\right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n,2m)$-променева система точок виду (1), а D – довільна відкрита множина, яка задовольняє умові неналягання (2), $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$).

Теорема 1. *Нехай $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тоді для довільної $(2n,2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, та довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$ справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq\left(\frac{2}{mn}\right)^{2nm(\alpha+1)}\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}$$

$$\times M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2=w^{2n-2}\left(1+w^{2n}\right)^{2m-2}\times$$

$$\times\frac{i(\alpha-1)\left((w^n+i)^{4m}-(w^n-i)^{4m}\right)-2(1+\alpha)\left(w^{2n}+1\right)^{2m}}{\left((w^n+i)^{4m}+(w^n-i)^{4m}\right)^2}dw^2. \quad (3)$$

.

Теорема 2. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$. Тоді для довільної $(2n,2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, та довільної відкритої множини D, яка задовольняє умові неналягання (2), $a_{k,p}\in D\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$ справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(D,a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(D,a_{2k-1,2p}\right)r^{\alpha}\left(D,a_{2k,2p}\right)r\left(D,a_{2k,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{2}{mn}\right)^{2nm(\alpha+1)}\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)$$

$$\times M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли

$$D=\bigcup_{k,p}B_{k,p},$$

а точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (3).

Доведення теореми 1. Доведення теореми спирається на метод кусково-поділяючого перетворення (див. [4 – 6]).

Розглянемо однозначну гілку багатозначної аналітичної функції

$$z_k(w)=-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \quad (4)$$

яка, при кожному $k = \overline{1,2n}$, реалізує однолистне та конформне відображення області P_k на праву півплощину $\mathrm{Re}z > 0$, при цьому промінь $\arg w = \frac{1}{2}\left(\theta_k + \theta_{k+1}\right)$ перетворюється у додатну дійсну вісь.

Тоді функція

$$\zeta_k(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)} \tag{5}$$

однолистно та конфорно відображає область P_k на одиничний круг $U = \{z : |z| \leq 1\}$, $k = \overline{1,2n}$.

Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)} := \zeta_k\left(a_{k,p}\right)$, $\omega_{k-1,p}^{(2)} := \zeta_{k-1}\left(a_{k,p}\right)$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)} := \omega_{n,p}^{(2)}$, $\zeta_0 := \zeta_n$ $(k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m})$.

Сімейство функцій $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{2n}$, заданих рівністю (5), є допустимим для кусково-поділяючого перетворення (див. напр., [6, 8, 9]) областей $\left\{B_{k,p} : k = \overline{1,2n}, \quad p = \overline{1,2m}\right\}$ відносно системи кутів $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$. Для довільної множини $\Delta \in \mathbb{C}$ позначимо $(\Delta)^* := \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\overline{w}} \in \Delta\right\}$. Нехай $\Omega_{k,p}^{(1)}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right) \bigcup \left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\Omega_{0,p}^{(2)} := \Omega_{n,p}^{(2)}$. Зрозуміло, що $\Omega_{k,p}^{(s)}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$, $s = 1,2$. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ та $\Omega_{k,p}^{(1)}$ є результатом поділяючого перетворення області $B_{k,p}$ відносно сімейств $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$.

З формули (5) отримаємо наступні вирази

$$\left|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_k \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w - a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_k.$$

$$\left|\zeta_{k-1}(w) - \zeta_{k-1}(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_{k-1} \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w - a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k = \overline{1,2n}, p = \overline{1,2m}. \tag{6}$$

З теореми 1.9 [6] (див. також [4, 5]) та формул (6) отримаємо нерівності

$$r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\left\{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right)r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)}\right)\left[\alpha_k\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\alpha_{k-1}\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,2n},p=\overline{1,2m}. \tag{7}$$

На основі співвідношень (7), отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\alpha_{2k-2}^{\alpha+1}\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\right.$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}|a_{2k-1,2p-1}|^{2\alpha}\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)|a_{2k-1,2p}|^{2}\alpha_{2k}^{\alpha+1}\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)|a_{2k,2p}|^{2\alpha}$$

$$\left.\times|a_{2k,2p-1}|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(1)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-2,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-2,2p-1}^{(2)}\right)r\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(1)},\omega_{2k-1,2p}^{(1)}\right)\times$$

$$\times r\left(\Omega_{2k-2,2p}^{(2)},\omega_{2k-2,2p}^{(2)}\right)r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(2)},\omega_{2k-1,2p}^{(2)}\right)\times$$

$$\left.\times\ r\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(1)},\omega_{2k,2p-1}^{(1)}\right)r\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Відмітимо, що

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(1)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(1)}\right)r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-2,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-2,2p-1}^{(2)}\right)\times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(1)},\omega_{2k-1,2p}^{(1)}\right)r\left(\Omega_{2k-2,2p}^{(2)},\omega_{2k-2,2p}^{(2)}\right)r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)\times$$

$$r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(2)},\omega_{2k-1,2p}^{(2)}\right)r\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(1)},\omega_{2k,2p-1}^{(1)}\right)\times$$

$$\times r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\Big]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)$$

$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right) r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left(\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\alpha^{\alpha+1}_{2k-2}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k}\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)}, \tag{10}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}\times\right.$$

$$\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)|a_{2k-1,2p-1}|^{2\alpha}\times$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}|a_{2k-1,2p}|^{2}\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\left.\times\,\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)|a_{2k,2p}|^{2\alpha}|a_{2k,2p-1}|^{2}\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha} M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right). \tag{11}$$

Із (8) враховуючи (9), (10), (11), отримаємо наступні співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right) r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)}\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha} M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right) r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{2n},$$

з попереднього співвідношення, маємо

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right) r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)}\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha} M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right) r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

З теоремы 4.2.2 [7] отримаємо нерівності

$$\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right) r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right) r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\prod_{p=1}^{2m} r^{\alpha}\left(G^{(1)}_{2p-1},g^{(1)}_{2p-1}\right) r\left(G^{(1)}_{2p},g^{(1)}_{2p}\right),$$

$$\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)}, \omega_{2k,2p}^{(1)}\right) r\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(1)}, \omega_{2k,2p-1}^{(1)}\right) r\left(\Omega_{2k,2p}^{(2)}, \omega_{2k,2p}^{(2)}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(2)}, \omega_{2k,2p-1}^{(2)}\right) \leq \prod_{p=1}^{2m} r\left(G_{2p-1}^{(2)}, g_{2p-1}^{(2)}\right) r^{\alpha}\left(G_{2p}^{(2)}, g_{2p}^{(2)}\right), \quad (14)$$

де $G_{2p-1}^{(1)}$, $G_{2p}^{(1)}$, $G_{2p-1}^{(2)}$, $G_{2p}^{(2)}$ – кругові області, а $g_{2p-1}^{(1)}$, $g_{2p}^{(1)}$, $g_{2p-1}^{(2)}$, $g_{2p}^{(2)}$ – полюси квадратичного диференціалу

$$Q\left(\zeta_k\right) d\zeta_k^2 = \zeta_k^{2m-2} \frac{i(1-\alpha)\zeta_k^{4m} + 2(1+\alpha)\zeta_k^{2m} + i(\alpha-1)}{\left(\zeta_k^{4m}+1\right)^2} d\zeta_k^2, \quad k = \overline{1, 2n} \quad (15)$$

Користуючись нерівностями (14) з (13) отримаємо

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p}\right) r\left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1}\right) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)} \times$$

$$\times \left(M\left(A_{2n,2m}^{(1)}\right) M\left(A_{2n,2m}^{(3)}\right)\right)^{\alpha} M\left(A_{2n,2m}^{(2)}\right) M\left(A_{2n,2m}^{(4)}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{p=1}^{2m} r\left(G_{2p-1}, g_{2p-1}\right) r^{\alpha}\left(G_{2p}, g_{2p}\right)\right)^{n}, \quad (16)$$

де G_{2p-1}, G_{2p} – кругові області, а g_{2p-1}, g_{2p} – полюси квадратичного диференціалу (15).

Із останнього співвідношення, використовуючи теорему 4.1.2 [7], отримаємо твердження теореми. **Теорема 1 доведена**.

Доведення теореми 2. Зразу відмітимо, що з умови неналягання випливає, що cap $\overline{\mathbb{C}}\backslash D > 0$ та множина D має узагальнену функцію Гріна $g_D(z,a)$, де $g_D(z,a) = \begin{cases} g_{D(a)}(z,a), \ z \in D(a), \\ 0, \ z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta\to z} g_{D(a)}(\zeta,a), \ \zeta \in D(a), z \in \partial D(a) \end{cases}$ – узагальнена функція Гріна відкритої множини D відносно точки $a \in D$, а $g_{D(a)}(z,a)$ – функція Гріна області $D(a)$ відносно точки $a \in D(a)$.

У подальшому будемо користуватися методами робіт [6, 7]. Розглянемо множини $E_0 = \overline{\mathbb{C}}\backslash D$; $E(a_{k,p},t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant t\}$,

$k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$, $n \geqslant 2$, $n, m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Для достатньо малих $t > 0$ введемо у розгляд конденсатор

$$C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m}) = \left\{E_0,\, E_1,\, E_2\right\},$$

де $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{p=1}^{m} \left(E(a_{2k-1,2p-1}, t) \cup E(a_{2k,2p}, t)\right)$, $E_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{p=1}^{m} (E(a_{2k,2p-1}, t) \cup E(a_{2k-1,2p}, t))$. Ємністю конденсатора $C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m})$ називається величина (див. [5])

$$\mathrm{cap} C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m}) = \inf \int\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\, dxdy,$$

де нижня грань береться по всім дійсним, неперервним та ліпшицевим в $\overline{\mathbb{C}}$ функціям $G = G(z)$, таким, що $G\Big|_{E_0} = 0$, $G\Big|_{E_1} = \sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{E_2} = 1$

Величина, обернена ємності конденсатора C, називається модулем цього конденсатора

$$|C| = \left[\mathrm{cap} C\right]^{-1}$$

З теореми 1 [6] отримаємо

$$|C\,(t, D, A_{2n,2m})\,| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2nm\,(\alpha+1)} \log \frac{1}{t} + M(D, A_{2n,2m}) + o(1),\ t \to 0, \tag{17}$$

де

$$M(D, A_{2n,2m}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4n^2 m^2\,(\alpha+1)^2} \times$$

$$\times \Big[\alpha \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} (\log r(D, a_{2k,2p}) + \log r(D, a_{2k-1,2p-1})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} (\log r(D, a_{2k,2p-1}) + \log r(D, a_{2k-1,2p})) +$$

$$+\alpha \sum_{(k,p) \neq (q,s)} (g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q-1,2s-1})) +$$

$$+2\sqrt{\alpha} \sum_{(k,p) \neq (q,s)} (g_D(a_{2k,2p}, a_{2q-1,2s}) + g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s-1}) +$$

$$+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q,2s-1}))+$$

$$+2\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s-1})+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q-1,2s})+$$

$$+g_D(a_{2k,2p-1},a_{2q,2s-1}))+2\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q,2s-1})\Big]. \quad (18)$$

Надалі, будемо використовувати функцію (5) та позначення $\omega^{(1)}_{k,p}$, $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $a_{n+1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введені нами при доведенні теореми 1. Нехай, також, $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(1)}_{k,p}$, а $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $\overline{P}_0:=\overline{P}_{2n}$, $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{0,p}:=\mathbf{\Omega}^{(2)}_{n,p}$. Ясно, що $\mathbf{\Omega}^{(s)}_{k,p}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $s=1,2$. Пара областей $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ и $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ є результатом поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$.

Розглянемо конденсатори

$$C_k\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)=\left(E^{(k)}_0,\,E^{(k)}_1,\,E^{(k)}_2\right),$$

де

$$E^{(k)}_s=\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left[\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k\right)\right]^*,$$

$k=\overline{1,2n}$, $s=0,1,2$, $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ – система кутів, яка відповідає системі точок $A_{2n,2m}$, операція $[A]^*$ ставить у відповідність будь-якій множині $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ множину, симетричну множині A відносно кола $|w|=1$. Звідси випливає, що конденсатору $C\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)$, при поділяючому перетворенні відносно $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ та $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$, відповідає набір конденсаторів $\{C_k\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)\}_{k=1}^{2n}$, симетричних відносно $\{z:\,|z|=1\}$. У відповідності з роботами [6, 7] отримаємо

$$\mathrm{cap}C\left(t,D,A_{2n,2m}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{cap}C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right). \quad (19)$$

Звідси випливає

$$|C\left(t,D,A_{2n,2m}\right)| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{2n}|C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{20}$$

Формула (17) визначає асимптотику модуля $C\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)$ при $t\to 0$, а величина $M\left(D,A_{2n,2m}\right)$ є зведений модуль множини D відносно $A_{2n,2m}$. Використовуючи формули (6) та той факт, що D задовольняє умові неналягання відносно системи $A_{2n,2m}$, отримаємо аналогічні представлення для конденсаторів $C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)$, $k=\overline{1,2n}$

$$|C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)| = \frac{1}{4\pi m\left(\alpha+1\right)}\log\frac{1}{t}+M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o(1),\quad t\to 0, \tag{21}$$

де

$$M_{2k-1}\left(D,A_{2n,2m}\right)=\frac{1}{8\pi m^2\left(\alpha+1\right)^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k-1,2p-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2p-1}|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2t},\omega^{(1)}_{2k-1,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k-1,2t}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2t}|\right]^{-1}}\right],$$

$$M_{2k}\left(D,A_{2n,2m}\right)=\frac{1}{8\pi m^2\left(\alpha+1\right)^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k+1,2p-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2p-1}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2t},\omega^{(2)}_{2k,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k+1,2t}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2t-1},\omega^{(1)}_{2k,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}\right], \qquad k=\overline{1,n}.$$

З допомогою (21) отримаємо

$$|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1}=\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}M_k(D,A_{2n,2m})+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\right), \qquad t\to 0. \quad (22)$$

Далі, з (22) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{2n}|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1}=\frac{8\pi mn(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\right), \qquad t\to 0.$$

(23)

У свою чергу, (23) дозволяє отримати таке співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi mn(\alpha+1)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{2\pi m(\alpha+1)}{n\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$= \frac{\log \frac{1}{t}}{8\pi mn\,(\alpha+1)} + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} M_k\,(D, A_{2n,2m}) + o(1), \qquad t \to 0. \tag{24}$$

Нерівності (19) та (20), враховуючи (17) та (24), дозволяють помітити, що

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2nm\,(\alpha+1)}\log\frac{1}{t} + M(D, A_{2n,2m}) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\log \frac{1}{t}}{4\pi mn\,(\alpha+1)} + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{2n} M_k\,(D, A_{2n,2m}) + o(1). \tag{25}$$

З (25) при $t \to 0$ отримаємо, що

$$M(D, A_{2n,2m}) \leqslant \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{2n} M_k\,(D, A_{2n,2m})\,. \tag{26}$$

Формули (18), (21) та (26) приводять до наступного виразу

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4n^2m^2\,(\alpha+1)^2}\Big[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D, a_{2k,2p}) + \log r(D, a_{2k-1,2p-1})) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D, a_{2k,2p-1}) + \log r(D, a_{2k-1,2p})) +$$

$$+\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q-1,2s-1})) +$$

$$+2\sqrt{\alpha}\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k,2p}, a_{2q-1,2s}) + g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s-1}) +$$

$$+g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q-1,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q,2s-1})) +$$

$$+2\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{2k,2p}, a_{2q-1,2s-1}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k-1,2p}, a_{2q-1,2s}) +$$

$$+g_D(a_{2k,2p-1}, a_{2q,2s-1})) + 2\sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{2k-1,2p}, a_{2q,2s-1})\Big] \leq$$

$$\leq \frac{1}{16\pi n^2m^2\,(\alpha+1)^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k-1,2p-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2p-1}|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2t},\omega^{(1)}_{2k-1,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\chi\left(|a_{2k-1,2t}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k+1,2p-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2p-1}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2t},\omega^{(2)}_{2k,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k+1,2t}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2t-1},\omega^{(1)}_{2k,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}\right].$$

З останнього, отримаємо співвідношення (12). Закінчення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1. **Теорема 2 доведена**.

Під кінець, хочу виразити подяку Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задачі та ряд цінних вказівок.

Література

[1] М.А. Лаврентьев. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, **5**, 159 – 245.

[2] Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М: Наука, 1966.

[3] Г.П. Бахтина. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Киев, 1975, 11 с.

[4] В.Н. Дубинин *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1988, **168**, 48 – 66.

[5] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною.* Успехи мат. наук, 1994, **49**, № 1(295), 3 – 76.

[6] В.Н. Дубинин. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения.* Зап. науч. сем. ПОМИ, 1997, **237**, 56 – 73.

[7] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.*. Праці інту мат-ки НАН України, 2008, **73**.

[8] О.К. Бахтін. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин.* Укр. мат. журн. 2009, **61**, № 5, 596 – 610.

[9] В.Н. Дубинин *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена.* Мат. сборник, 2009, **200**, № 10, 25 – 38.

[10] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы.* Нелінійні коливання, 2005, **8**, № 3, 298 – 303.

[11] А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере.* Доп. НАН Украини, 2008, № 9, 31 – 36.

[12] Г.В. Кузьмина. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* Зап. науч. сем. ПОМИ, 2001, **276**, 253 – 275.

[13] Е.Г. Емельянов *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* Зап. науч. сем. ПОМИ, 2002, **286**, 103 – 114.

[14] В.К. Хейман. *Многолистные функции.* - М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[15] Дж.А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.