Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 342–352

УДК 517.9+531.19

Ю.Ю. Федчун

Київський національний університет імені Т.Г. Шевченка
fedchun_yu@ukr.net

Скейлінґові властивості нерівноважних станів активної м'якої речовини

The mean field limit asymptotic behavior of solutions of hierarchy of evolution equations for active soft matter states is considered. The Vlasov kinetic equation is constructed and the propagation of initial chaos property in soft active matter is established.

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку ієрархії еволюційних рівнянь для станів активної м'якої речовини в границі самоузгодженого поля. Обгрунтовано кінетичне рівняння типу Власова і встановлено властивість поширення початкового хаосу для активної м'якої речовини.

1 Вступ

Однією з відкритих проблем сучасної математичної фізики є строгий опис нерівноважних станів активної м'якої речовини [1], [2], зокрема таких систем як популяції клітин (бактерій); розчини клітин, наприклад, кров і т.п. Деякі підходи до побудови теорії таких систем розглянуто в роботах [1] - [4].

В роботі [5] для математичного моделювання колективної поведінки активної м'якої речовини запропоновано динамічну систему багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марківського типу. Така мікроскопічна модель динаміки дає можливість описати характерні властивості активної м'якої речовини, які відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, складовими якої є взаємодіючі частинки, що рухаються за інерцією.

Зазначимо, що еволюцію активної м'якої речовини на мікроскопічному рівні природно описувати в термінах маргінальних спостережуваних величин [6]. В роботі [7] за допомогою ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних було виведена ієрархія рівнянь, якою описується кінетична еволюція спостережуваних в скейлінговій границі самоузгодженного поля [8] і обґрунтовано кінетичне рівняння типу рівняння Власова для активної м'якої речовини.

Мета даної роботи полягає в строгому обґрунтованні кінетичного рівняння для активної м'якої речовини в наближенні самоузгодженного поля на основі непертурбативного роз'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних функцій розподілу [9].

2 Динаміка систем активних частинок

Розглянемо систему не фіксованої, але скінченої середньої кількості частинок (складових) M різних субпопуляцій з яких складається активна речовина. Кожна i-та частинка характеризується змінними $\mathbf{u}_i = (j_i, u_i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$, де $j_i \in \mathcal{J} \equiv (1, \dots, M)$ – номер субпопуляції частинки. $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ – величини, якими характеризується мікроскопічний стан i-тої частинки [5].

Розглянемо простір $L^1_\alpha = \oplus_{n=0}^\infty \alpha^n L^1_n = \oplus_{n=0}^\infty \alpha^n L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n)$ послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ інтегрованих функцій $f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ визначених на $(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n$ з нормою:

$$\|f\|_{L^1_\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \alpha^n \|f_n\|_{L^1_n} = \sum_{n=0}^\infty \alpha^n \sum_{j_1, \dots, j_n} \int_{\mathcal{U}^n} du_1 \dots du_n \big|f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)\big|,$$

де $\alpha > 1$ – параметр.

Динаміка частинок, з яких складається активна речовина, описується півгрупою $e^{t\Lambda^*} = \oplus_{n=0}^\infty e^{t\Lambda^*_n}$ марківських стрибкоподібних процесів визначеною на просторі L^1_α, де інфінітезимальний генератор $\Lambda^*_n \equiv \Lambda^*_n(1, \dots, n)$ півгрупи операторів $e^{t\Lambda^*_n}$ визначено на просторі $L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n)$:

$$(\Lambda^*_n f_n)(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \doteq \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \Lambda^{*[m]}_n f_n \doteq \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_m = 1}^n \Big(\int_{\mathcal{J} \times \mathcal{U}} A^{[m]}(\mathbf{u}_{i_1}; \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}) a^{[m]}(\mathbf{v},$$

$$\mathbf{u}_{i_2},\ldots,\mathbf{u}_{i_m})f_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{i_1-1},\mathbf{v},\mathbf{u}_{i_1+1},\ldots\mathbf{u}_n)d\mathbf{v}-$$
$$-a^{[m]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_m})f_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\big),$$

де $\varepsilon > 0$ – скейлінговий параметр та $\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_n \equiv \sum_{j_1\in\mathcal{J}}\cdots\sum_{j_n\in\mathcal{J}}\int_{\mathcal{U}^n} du_1\ldots du_n$. Функції $a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, характеризують взаємодію між активними частинками, зокрема, у випадку $k=1$ – взаємодію частинок з оточенням, і є вимірними позитивними обмеженими функціями визначеними на $(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n$ такими, що $0\leq a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})\leq a^{[k]}_*$, де $a^{[k]}_*$ – деяка стала. Вимірні інтегровані позитивні функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, описують ймовірність переходу i_1-ої активної частинки з мікроскопічного стану u_{i_1} в стан v в результаті взаємодії з активними частинками, які знаходяться в станах $u_{i_2},\ldots,u_{i_k}$. Функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, задовольняють таким умовам: $\int_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})d\mathbf{v} = 1$, $k\geq 1$. В роботі [5] наведено приклади функцій $a^{[k]}$ і $A^{[k]}$, які мають відповідну інтерпретацію для систем математичної біології. У випадку $k=1$ генератор (1) має таку структуру: $\sum_{i_1=1}^n \Lambda^{[1]}_n(i_1)$, і він описує еволюцію невзаємодіючих складових (стохастичних процесів) системи. Випадок $k\geq 2$ відповідає системі стохастичних процесів з k-арною взаємодією. Такий тип взаємодії є характерним для біологічних систем в порівнянні з системами багатьох частинок кінетичної теорії, наприклад, газів атомів з парним потенціалом взаємодії.

В просторі $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n)$ однопараметрична сім'я відображень $e^{t\Lambda^*_n}$ є сильно неперервною обмеженою півгрупою операторів, для якої справедлива така оцінка:

$$\big\| e^{t\Lambda^*_n}\big\|_{L^1_n}\leq e^{tcn}, \tag{2}$$

де $c = 2M\max_m a^{[m]}_*$.

Всі можливі стани системи багатьох марківських стрибкоподібних процесів визначених вище описуються в в термінах маргінальних функцій розподілу $F(t) = (1, F_1(t,\mathbf{u}_1),\ \ldots, F_s(t,\mathbf{u}_1,\ \ldots,\mathbf{u}_s),\ldots)$. Еволюція маргінальних функцій розподілу $F(t)$ визначається задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь типу ББГКІ (ієрархії рівнянь типу Боголюбова – Борна – Гріна – Кірквуда – Івона) [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = \big(\Lambda^*_s F_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{M-k}\frac{\varepsilon^{k+n-1}}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\big(\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\ldots,i_k,s+1,\ldots,s+n)F_{s+n}(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}),\quad s\geq 1.$$

Якщо послідовність початкових маргінальних функцій розподілу $F(0)=(1,F_1^{0,\varepsilon},\ldots,F_s^{0,\varepsilon},\ldots)\in L_0^1\subset\oplus_{n=0}^{\infty}\alpha^nL^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n)$, тоді при $\alpha>2e$ існує $\forall t>0$ єдиний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь (3), який зображується такими розкладами [9]:

$$F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\big(\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},\,X\setminus Y)F_{s+n}^{0,\varepsilon}\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}),\quad s\geq 1. \tag{4}$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)\equiv\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},\,X\setminus Y)$ розкладу (4) непертурбативного розв'язку є кумулянтом $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda_k^*}\}_{t\geq 0}$, $k\geq 1$, який визначається формулою:

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)=\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}e^{t\Lambda^*_{|\theta(X_i)|}(|\theta(X_i)|)},\quad n\geq 0, \tag{5}$$

де множини індексів позначено відповідними символами: $Y\equiv(1,\ldots,s)$, $X\setminus Y\equiv(s+1,\ldots,s+n)$; множина $\{Y\}$ складається з одного елементу; символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума за всіма можливими розбиттям P множини $(\{Y\},\,X\setminus Y)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in(\{Y\},\,X\setminus Y)$, які взаємно не перетинаються, та відображення $\theta(\cdot)$ є оператором декластерізації елементів множини: $\theta(\{Y\},\,X\setminus Y)=X$.

3 Асимптотична поведінка розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ в границі самоузгодженого поля

В цьому розділі побудовано асимптотику розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (3) в границі самоузгодженого поля [8]. Для наглядності доведення будемо розглядати випадок двох субпопуляцій в системі, тобто випадок $M=2$.

Теорема 1 *Нехай послідовність функцій розподілу $f^0 \in L^1_\alpha$ є граничною для початкових даних $F(0)$, тобто існує така границя:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s F^{0,\varepsilon}_s - f^0_s\big\|_{L^1_s} = 0.$$

Тоді для довільного скінченого проміжку часу в такому ж сенсі існує границя непертурбативного розв'язку (4) задачі Коші для ієрархії рівнянь (3):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s F_s(t) - f_s(t)\big\|_{L^1_s} = 0, \tag{6}$$

яка зображується розкладом в такий ряд:

$$\begin{aligned} &f_s(t,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s) = \qquad (7)\\ &\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\boldsymbol{u}_{s+1}\ldots d\boldsymbol{u}_{s+n}\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n\Big(e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)}\times\\ &\sum_{i=1}^{s}\Lambda^{*[2]}(i,s+1)e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)}\ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)}\times\\ &\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\Lambda^{*[2]}(i_n,s+n)e^{t_n\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)}f^0_{s+n}\Big)(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{s+n}). \end{aligned}$$

Для доведення встановимо деякі допоміжні твердження.

Твердження 1 *Якщо $f_s \in L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s)$, тоді справедлива така рівність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\, e^{t\Lambda^*_s} f_s - e^{t\Lambda^{*[1]}_s} f_s\big\|_{L^1_s} = 0. \tag{8}$$

Дійсно, оскільки для півгрупи операторів $e^{t\Lambda^*_s}$ справедливе рівняння Дюамеля [10]:

$$e^{t\Lambda^*_s} f_s - e^{t\Lambda^{*[1]}_s} f_s = \varepsilon\int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda^*_s}\Lambda^{*[2]}_s e^{t_1\Lambda^{*[1]}_s} f_s,$$

тоді згідно оцінки (2) маємо:

$$\big\|\, e^{t\Lambda^*_s} f_s - e^{t\Lambda^{*[1]}_s} f_s\big\|_{L^1_s} \le e^{2st(a^{[1]}_* + \varepsilon(s-1)a^{[2]}_*)}(1 - e^{2st\varepsilon(s-1)a^{[2]}_*})\big\|\, f_s\big\|_{L^1_s}.$$

Таким чином, справедлива рівність (8).

Якщо $f_s \in L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^s)$, для кумулянтів півгруп операторів (5) справедливі такі рекурентні співвідношення:

$$\mathfrak{A}_s(t, 1, \ldots, s) f_s = \tag{9}$$
$$= \varepsilon \int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_s^{*[1]}} \sum_{i<j\in(1,\ldots,s)} \Lambda_2^{*[2]}(i,j)\mathfrak{A}_{s-1}(t_1, \mathcal{I}) f_s, \quad s \geq 2,$$

де використано позначення: $\mathcal{I} \equiv (\{i,j\}, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, s)$.

Твердження 2 *Якщо $f_{s+n} \in L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^{s+n})$, тоді має місце така рівність:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big\| \frac{1}{n!} \frac{1}{\varepsilon^n} \mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) f_{s+n} - \tag{10}$$
$$\int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n \Big(e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \sum_{i=0}^{s} \Lambda^{*[2]}(i, s+1) \times$$
$$e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \sum_{i_n=1}^{s+n-1} \Lambda^{*[2]}(i_n, s+n) \times$$
$$e^{t_n \Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} f^0_{s+n} \Big)(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{s+n}) \Big\|_{L^1_{s+n}} = 0.$$

Доведення рівності (10) базується на використанні рекурентного співвідношення для кумулянтів півгруп операторів (9) та рівності (8).

Доведемо основний результат цього розділу. Оскільки ряди (4) та (7) є збіжними, тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$:

$$\big\| \varepsilon^s F_s(t) - f_s(t) \big\|_{L^1_s} \leq \sum_{n=0}^{N} \Big\| \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \ldots d\mathbf{u}_{s+n} \Big(\varepsilon^s \frac{1}{n!} \times$$
$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) F^{0,\varepsilon}_{s+n} - \int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \times$$
$$\sum_{i=0}^{s} \Lambda^{*[2]}(i, s+1) e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)} \times$$

$$\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\Lambda^{*[2]}(i_n,s+n)e^{t_n\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\ldots,s+n)}f^0_{s+n})\big\|_{L^1_s}+\varepsilon.$$

В скінченній сумі почленно перейдемо до границі, використовуючи твердження (1) та (2). В результаті справедлива рівність (6).

Розкладом в ряд (7) зображується сильний розв'язок задачі Коші для такої граничної ієрархії рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\big(\Lambda^{*[1]}_s f_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{11}$$
$$\sum_{i=1}^{s}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\big(\Lambda^{*[2]}(i,s+1)f_{s+1}(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+1}),\quad s\geq 1,$$
$$f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)|_{t=0}=f^{0,\varepsilon}_s(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s). \tag{12}$$

В загальному випадку (випадку M субпопуляцій) асимптотика розв'язку (4) описується відповідною ієрархією рівнянь (ієрархія рівнянь типу Власова):

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\big(\Lambda^{*[1]}_s f_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{13}$$
$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{M-k}\frac{1}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\big(\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\ldots,$$
$$i_k,s+1,\ldots,s+n)f_{s+n}(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}),\quad s\geq 1.$$

4 Кінетичне рівняння типу Власова для активної м'якої речовини

Розглянемо початкові стани, які задовольняють умові хаосу [6], тобто $F^0=(1,F^{0,\varepsilon}_1(\mathbf{u}_1),\ldots,\prod_{i=1}^{s}F^{0,\varepsilon}_1(\mathbf{u}_i),\ldots)$, де $F^{0,\varepsilon}_1\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$. Справедлива така теорема.

Теорема 2 *Якщо початкові стани задовольняють умову хаосу та виконується рівність:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon\,F^{0,\varepsilon}_1-f^0_1\big\|_{L^1_1}=0, \tag{14}$$

тоді на скінченому проміжку часу справедлива така рівність:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s F_s(t,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s)-\prod_{i=1}^{s}f_1(t,\boldsymbol{u}_i)\big\|_{L^1_s}=0, \tag{15}$$

де гранична одночастинкова функція розподілу зображується таким розкладом:

$$\begin{aligned}
&f_1(t,\boldsymbol{u}_1)= \qquad\qquad (16)\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\boldsymbol{u}_2\ldots d\boldsymbol{u}_{n+1}\,e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)}\times\\
&\Lambda^{*[2]}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)}\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{n}e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})}\times\\
&\sum_{i_n=1}^{n}\Lambda^{*[2]}(i_n,1+n)\prod_{j_n=1}^{1+n}e^{t_n\Lambda^{*[1]}(j_n)}\prod_{i=1}^{1+n}f_1^0(\boldsymbol{u}_i).
\end{aligned}$$

Функція (16) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння типу Власова для активної м'якої речовини:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+\int_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Lambda^{*[2]}(1,2)f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2), \tag{17}$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1). \tag{18}$$

Для доведення теореми 2 введемо маргінальні кореляційні функції [9] за допомогою кластерних розкладів маргінальних функцій розподілу (4):

$$F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\prod_{i=1}^{s}F_1(t,\mathbf{u}_i)+\sum_{\substack{\mathrm{P}\,:\,\{Y\}=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|\neq s}}\ \prod_{\substack{X_i\subset\mathrm{P},\\ X_i=(i_1,\ldots,i_{|X_i|})}}G_{|X_i|}(t,\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_{|X_i|}}),\quad s\geq 2, \tag{19}$$

де використано позначення з формули (5). Якщо маргінальні кореляційні функції $G_s(t)$ визначаються розкладами (4), тоді для початкових станів які задовольняють умову хаосу, маємо:

$$G_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)= \tag{20}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\mathfrak{A}^*_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i),$$
$$s\geq 2,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{s+n}(t)\equiv\mathfrak{A}^*_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)$ розкладу (20) є кумулянтом $(s+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda^*_k}\}_{t\geq 0}$, $k\geq 1$.

Для будь-якої функції $f_{s+n}\in L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^{s+n})$ справедлива рівність:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\frac{1}{\varepsilon^n}\,\mathfrak{A}^*_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)f_{s+n}\big\|_{L^1_{s+n}}=0. \tag{21}$$

Доведення рівності (21) аналогічне доведенню твердження 2.

Таким чином, враховуючи умову (14) та рівності (21), для маргінальних кореляційних функцій (20) отримуємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s\,G_s(t)\big\|_{L^1_s}=0,\quad s\geq 2. \tag{22}$$

В результаті, згідно означення (19) та справедливості теореми 1 встановлюємо властивість (15).

Таким чином, якщо стан системи взаємодіючих стохастичних процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої речовини, в початковий момент часу визначається одночастинковою маргінальною функцією розподілу, тоді всі можливі стани системи в границі самоузгодженого поля на скінченому проміжку часу можуть бути описані в термінах одночастинкової граничної маргінальної функції розподілу, яка є роз'язком задачі Коші для кінетичного рівняння типу рівняння Власова (17),(18).

5 Висновки

В роботі досліджено асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (4) задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь (3) в границі самоузгодженого поля для початкових даних з простору інтегрованих функцій. Для побудови такої скейлінгової границі використано формули Дюамеля та рекурентні співвідношення для кумулянтів груп операторів (5) марківських стрибкоподібних процесів. Встановлено граничну ієрархію рівнянь типу Власова (11), розв'язок якої зображується рядом (7). Отриманий результат узагальнено на випадок багатьох субпопуляцій (13).

Встановлено також, що для початкових даних, які задовольняють умові хаосу, асимптотика розв'язку (4) в границі самоузгодженого поля описується в термінах одночастинкової функції розподілу, яка задовольняє кінетичне рівняння типу Власова для активної м'якої речовини (17).

Зауважимо, що аналогічне кінетичне рівняння для активної м'якої речовини в роботі [7] встановлено в інший спосіб. А саме, в роботі [7], як було зазначено вище, кінетична еволюція описана в термінах граничних маргінальних спостережуваних. В цьому випадку в границі самоузгодженого поля розв'язок еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних адитивного типу еквівалентний розв'язку побудованого кінетичного рівняння для одночастинкової функції розподілу (13), а для маргінальних спостережуваних довільного типу - властивості (15) поширення початкового хаосу для граничних маргінальних функцій розподілу.

Література

[1] M.C. Marchetti, J.F. Joanny, S. Ramaswamy, T.B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, S.R. Aditi. *Hydrodynamics of soft active matter.* Rev. Mod. Phys. **85**, (2013), 1143 – 1195.

[2] A. Bellouquid, M. Delitala. *Mathematical Modeling of Complex Biological Systems: A Kinetic Theory Approach.* Boston: Birkhäuser, 2006.

[3] M. Lachowicz. *Links between microscopic and macroscopic descriptions.* In: Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic. Lect. Notes in Math. **1940**, (2008), 201 – 215.

[4] N. Bellomo, B. Carbonaro. *Toward a mathematical theory of living systems focusing on developmental biology and evolution: a review and perspectives.* Phys. Life Rev. **8**, (2011), 1 – 18.

[5] M. Lachowicz. *Individually-based Markov processes modeling nonlinear systems in mathematical biology.* Nonlinear Analysis: Real World Applications **12**, (2011), 2396 – 2407.

[6] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Kluwer Acad. Publ., 1997; Springer Sci., 2013.

[7] Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko. *On kinetic models for the evolution of many-entity systems in mathematical biology.* J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. **1**, (2), (2013), 273 – 279.

[8] H. Spohn. *Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits.* Rev. Modern Phys. **53**, (1980), 600 – 640.

[9] Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko. *Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives.* Зб. праць IM НАН України, **9**, (2), (2012), 347 – 375.

[10] J. Banasiak, L. Arlotti. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications.* Springer, 2006.