Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 180–190

УДК 512.552.4

А. А. Кириченко

(Київський національний університет будівництва і архітектури)

Ю. С. Самойленко

(Інститут математики НАН України, Київ)

Л. М. Тимошкевич

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами

akyrych@gmail.com, yurii_sam@imath.kiev.ua, larysatymosh@gmail.com

The paper is devoted to the investigation of representations of algebras of Temperley–Lieb type generated by orthogonal projections connected with countable trees. The theorem about the structure of such systems orthogonal projections is proved. Examples are given.

Робота присвячена дослідженню зображень алгебр типу Темперлі—Ліба, що породжені ортопроекторами, пов'язаними зі зліченними деревами. Доведено теорему про структуру таких систем ортопроекторів, наведені приклади.

1. Вступ

Вивчення систем підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ гільбертового простору H є важливою задачею функціонального аналізу та математичної фізики, якій присвячені багаточисельні публікації (див. наприклад, [1], [2], [3].) Зокрема, у [2] та бібл. вивчалися системи підпросторів (системи ортопроекторів), що пов'язувалися зі зв'язними неорієнтованими скінченними графами.

У данній статті вивчається структура незвідних зліченних систем підпросторів $\{H_k\}$ гільбертового комплексного простору H, які пов'язані зі зліченними деревами Γ і параметром $\tau = \cos\phi \in (0,1)$, кожна пара підпросторів є ортогональною або з фіксованим кутом $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ між ними (п.2). За допомогою ортопроекторів $P_i = P_{H_i}$ та $P_j = P_{H_j}$ умова ортогональності підпросторів H_i та H_j записується як $P_iP_j = P_jP_i = 0$, а умова про кут між ними ϕ ($\tau = \cos\phi$) — як $P_iP_jP_i = \tau^2 P_i$, $P_jP_iP_j = \tau^2 P_j$.

Ми описуємо множину параметрів τ, для яких існують такі ненульові незвідні системи ортопроекторів та структуру таких систем (п.3), а також наводимо приклади систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами (п.4).

Структура систем підпросторів, пов'язаних із зліченними деревами Кокстера буде досліджена окремо.

2. Постановка задачі

2.1. Зліченні дерева

При дослідженні скінченних систем ортопроекторів (див. [2] та бібл.) використовується спектральна теорія скінченних графів (див., наприклад, [4], [5]). При дослідженні зліченних систем ортопроекторів в цій роботі використовується спектральна теорія зліченних графів (див. [6], [7], [8], [9]).

Нагадаємо необхідні означення.

Під терміном “граф” ми розуміємо впорядковану пару (V, R), в якій V — деяка непорожня множина (множина вершин) і R — множина, що складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер). Тобто ми розглядаємо неорієнтовані графи без кратних ребер та петель.

Зліченним графом називають граф зі зліченною множиною вершин, а *зліченним деревом* — зв'язний зліченний граф без циклів.

Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини графа. З кожним графом Γ та порядком вершин пов'язують *матрицю суміжності* A_Γ, де $n = |\Gamma|$ — кількість вершин графа, а елементи матриці задаються наступним чином: $a_{ij} = 1$, якщо між вершинами i та j є ребро; $a_{ij} = 0$, якщо вершини i та j не сполучені ребром.

Таким чином, матриця A_Γ — це симетрична матриця з нулями на головній діагоналі. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Однак матриці суміжності одного і того ж графа при різних нумераціях вершин унітарно еквівалентні.

Оскільки матриця суміжності A_Γ скінченного графа Γ симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її власні значення дійсні. Позначимо власні значення матриці A_Γ через λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ та розташуємо їх у незростаючому порядку $\lambda_\Gamma = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Найбільше власне значення λ_Γ називають *індексом* графа Γ.

Через $\mathrm{Fin}(\Gamma)$ позначимо множину всіх скінченних підграфів графа Γ.

Поняття індексу поширюється на зліченні графи наступним чином:

Означення. Індексом зліченного графа називається додатнє число або символ ∞, визначені рівністю

$$\operatorname{ind}\Gamma = \sup_{G \in \mathrm{Fin}(\Gamma)} \operatorname{ind} G.$$

Далі будемо розглядати лише зв'язні графи $\Gamma = (V_\Gamma, R_\Gamma)$ такі, що степені всіх вершин рівномірно обмежені: $\forall v \in V_\Gamma$ $\deg\, v \leq c < \infty$ для деякого натурального числа c. Зауважимо, що в цьому випадку $\operatorname{ind}\Gamma < \infty$ та $\operatorname{ind}\Gamma = \|A_\Gamma\|$, де $A_\Gamma : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ розглядається як обмежений самоспряжений оператор, заданий матрицею суміжності графа Γ.

2.2. Системи ортопроекторів

Пов'яжемо зі зліченним графом Γ та параметром $\tau \in (0, 1)$ набір ортопроекторів $\{P_k\}$ гільбертового комплексного простору H наступним чином: кожній вершині графа $v_k \in V_\Gamma$ поставимо у відповідність ортопроектор P_k таким чином, щоб виконувалися наступні умови

$$\begin{cases} P_iP_jP_i = \tau^2 P_i, \quad P_jP_iP_j = \tau^2 P_j, \text{якщо } (i,j) \in R_\Gamma, \\ P_iP_j = P_jP_i = 0, \text{якщо } (i,j) \notin R_\Gamma. \end{cases} \tag{1}$$

Такий набір ортопроекторів є зображенням у гільбертовому просторі H $*$-алгебри

$TL_{\Gamma,\tau,\perp} = \mathbb{C}\langle p_i, i \in V_\Gamma | p_i^2 = p_i^* = p_i, i \in V_\Gamma; p_ip_jp_i = \tau_{ij}^2 p_i, (i,j) \in R_\Gamma,$ $p_ip_j = p_jp_i = 0, (i,j) \notin R_\Gamma\rangle$.

У позначенні алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ літери TL обрані в честь фізиків H. N. V. Temperley та E. H. Lieb'a, які у роботі [1] у зв'язку з вивченням моделей статистичної фізики ввели алгебри (співвідношення в таких алгебрах задаються ланцюжком A_n)

$TL_{\mathcal{A}_n,\tau} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n | p_i^2 = p_i^* = p_i, i = 1, \ldots, n; p_ip_jp_i = \tau^2 p_i,$ $|i-j| = 1, p_ip_j = p_jp_i, |i-j| \geq 1\rangle$.

Узагальнені алгебри Темперлі-Ліба, пов'язані з скінченними графами Γ, вивчалися у роботі [10]. Символ $\perp$ в позначенні алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ вказує на те, що проектори, які відповідають не суміжним вершинам у графі, на відміну від узагальненних алгебр Темперлі-Ліба, ортогональні, а не комутують.

У багатьох роботах (див. бібл. [2]) вивчалися зображення $*$-алгебр, пов'язаних із скінченними графами G:

$TL_{\Gamma,\tau,\perp} = \mathbb{C}\langle p_i, i \in V_\Gamma | p_i^2 = p_i^* = p_i, i \in V_\Gamma; p_ip_jp_i = \tau^2 p_i, (i,j) \in R_\Gamma,$ $p_ip_j = p_jp_i = 0, (i,j) \notin R_\Gamma\rangle$.

Метою данної роботи є опис з точністю до унітарної еквівалентності ненульових незвідних систем ортопроекторів, які задовольняють умови (1).

Нагадаємо, що система ортопроекторів $\{P_k\}$ в H називається *незвідною*, якщо з умови комутації деякого обмеженого оператора C з кожним із ортопроекторів P_k випливає, що $C = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{C}$).

Дві системи ортопроекторів $\{P_k\}$ та $\{P'_k\}$ в H та H' називаються *унітарно еквівалентними*, якщо існує унітарний оператор $U \in B(H, H')$, такий що $U(H_k) = H'_k$ для всіх k. Ця умова виконана тоді та лише тоді, коли виконані рівності $UP_k = P'_kU$ для всіх k.

Зауважимо, якщо всі ортопроектори $P_i = 0$, то умови (1) виконуються, тому алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ завжди має нульове зображення $\pi_0 : \pi_0(p_i) = 0$ для всіх i.

3. Основні результати

Теорема. Нехай граф Γ – зліченне зв'язне дерево, тоді

1) для всіх $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$ існує єдина з точністю до унітарної еквівалентності незвідна ненульова система ортопроекторів $\{P_k\}$, яка задовольняє умови (1), при цьому $\mathrm{dimIm}P_k = 1$ для кожного ортопроектора P_k;

2) для всіх $\tau > 1/\mathrm{ind}\Gamma$ ненульових незвідних систем ортопроекторів, які задовольняють умови (1), не існує.

Доведення теореми розіб'ємо на три частини, що представлені у відповідних лемах.

Позначимо через $A_\Gamma : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ обмежений самоспряжений оператор, заданий матрицею $A_\Gamma = (a_{ij})$ —матрицею суміжності графа Γ.

Лема 1. Оператор $B_{\Gamma,\tau} = I - \tau A_\Gamma$ у просторі $l_2(\mathbb{C})$ є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$.

Доведення. Оскільки $\mathrm{ind}\Gamma = \|A_\Gamma\|$, то спектр $\sigma(A_\Gamma) \subset [-\mathrm{ind}\Gamma, \mathrm{ind}\Gamma]$ та $\mathrm{ind}\Gamma \in \sigma(A_\Gamma)$. Тому $\sigma(\tau A_\Gamma) \subset [-\tau\mathrm{ind}\Gamma, \tau\mathrm{ind}\Gamma]$, і $\sigma(I - \tau A_\Gamma) \geq 0$ тоді й тільки тоді, коли $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$.

Лема 2. Існує єдине, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідне ненульове зображення алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ при $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$.

Доведення. a) Побудуємо спочатку одне ненульове незвідне зображення алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ при $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$. Розглянемо гільбертовий простір $l_2(\mathbb{C})$ та введемо на ньому півторалінійну форму $\langle x, y\rangle = (B_{\Gamma,\tau}x, y)_{l_2}$. Тоді $\langle e_i, e_j\rangle = b_{ij}$, де b_{ij} елементи матриці

$B_{\Gamma,\tau} = I - \tau A_\Gamma = (b_{ij})_{i,j\in V_\Gamma}$.

За попередньою лемою $\forall x \in l_2(\mathbb{C})$ $\langle x, x\rangle \geq 0$ при $0 < \tau \leq 1/\mathrm{ind}\Gamma$. Якщо форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ додатно визначена, то введемо на просторі $l_2(\mathbb{C})$ скалярний добуток $\langle x, y\rangle = (B_{\Gamma,\tau}x, y)_{l_2}$, поповнимо простір $l_2(\mathbb{C})$, отриманий гільбертів простір позначимо H_τ.

У іншому випадку через H_τ позначимо фактор–простір поповненого простору $l_2(\mathbb{C})$ по ядру форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Зауважимо, що гільбертів простір H_τ є замкненою лінійною оболонкою системи векторів $\{e_i : i \in V_\Gamma\}$, (можливо, лінійно залежних), кожен з них має одиничну норму, і матриця $B_{\Gamma,\tau}$ є матрицею Грама цієї системи векторів.

Визначимо для кожного $i \in V_\Gamma$ ортопроектор $P_i : x \to (x, e_i)e_i$, $x \in H_\tau$ на одновимірний простір, породжений вектором e_i. Перевіримо, що таким чином визначені ортопроектори P_i, задовольняють умови (1).

Якщо $(i,j) \in R_\Gamma$, то $(e_i, e_j) = \tau$, тоді

$\forall x \in H_\tau : P_iP_jP_ix = P_iP_j(x,e_i)e_i = (x,e_i)P_iP_je_i = (x,e_i)P_i(e_i,e_j)e_j = (x,e_i)P_i\tau e_j = \tau(x,e_i)(e_j,e_i)e_i = \tau^2(x,e_i)e_i = \tau^2 P_ix$,

тобто $P_iP_jP_i = \tau^2 P_i$.

Якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$, то $(e_i,e_j) = 0$, тоді $\forall x \in H_\tau$:

$P_iP_jx = P_i(x,e_j)e_j = (x,e_j)P_ie_j = (x,e_i)(e_i,e_j)e_i = 0$,

тобто $P_jP_i = 0$.

Позначимо побудоване зображення $*$-алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ через

$\pi : \pi(p_i) = P_i$, $i \in V_\Gamma$.

Доведемо, що зображення π є незвідним. Нехай обмежений оператор C комутує з усіма ортопроекторами, тоді

$Ce_k = CP_ke_k = P_kCe_k = \lambda_k e_k, \quad k \in V_\Gamma$

для деякого $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Нехай

$l = (j_m = k, j_{m-1}, \ldots, j_2, j_1 = 1)$ —

найкоротший шлях з вершини 1 у вершину k.

Тоді знайдеться $\mu_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ таке, що

$e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 e_1$,

таким чином,

$\lambda_k e_k = Ce_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 C e_1 = \lambda_1 e_k$

і ми одержали, що всі λ_k рівні між собою, а отже, C — скалярний оператор.

б) Доведемо, що довільне незвідне ненульове зображення π_1 у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ унітарно еквіваленте означеному вище зображенню π.

Спочатку покажемо, що для будь-якого незвідного ненульового зображення π_1 у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ образи всіх ортопроекторів $P_i = \pi_1(p_i), i \in V_\Gamma$ є одновимірними.

Оскільки $\{P_i : i \in V_\Gamma\}$ незвідна ненульова система ортопроекторів, тоді в цій системі існує ненульовий ортопроектор, позначимо його P_{i_0}. Нехай $x_{i_0} \in \mathcal{H}$ такий, що $P_{i_0}(x_{i_0}) = x_{i_0}$ і $||x_{i_0}|| = 1$. Для кожної вершини $j \in V_\Gamma$ існує єдиний найкоротший шлях з j в i_0:

$l(j,i_0) = (i_1 = j, i_2, \ldots, i_m = i_0)$.

Покладемо

$x_j := (-1)^{m-1}\frac{1}{\tau^{m-1}} P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m} x_{i_0}$.

Тоді $||x_j|| = 1$, $j \in V_\Gamma$.

Перевіримо, що замкнена лінійна оболонка системи векторів $\{x_j : j \in V\}$ є інваріантною відносно дії ортопроекторів $\{P_i : i \in V\}$. Розглянемо дію P_i на

$x_j = (-1)^{m-1}\frac{1}{\tau^{m-1}}P_jP_{i_2}\dots P_{i_m}x_{i_0}$.

Якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$ та $i \neq j$, то $P_iP_j = 0$, тому $P_ix_j = 0$;

якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$ та $i = j$, тоді $P_ix_j = P_ix_i = x_i$.

Якщо $(i,j) \in R_\Gamma$, то тоді або $i = i_2$, або $i \neq i_2$.

У першому випадку

$P_ix_j = P_{i_2}x_j = (-1)^{m-1}\frac{1}{\tau^{m-1}}P_{i_2}P_jP_{i_2}P_{i_3}\dots P_{i_m}x_{i_0} = (-1)^{m-1}\frac{1}{\tau^{m-1}}\tau^2P_{i_2}P_{i_3}\dots P_{i_m}x_{i_0} = -\tau x_{i_2} = -\tau x_i$.

У другому випадку $i \neq i_2$ існує ланцюг

$l(i,i_0) = (i, i_1 = j, i_2, \dots, i_m = i_0)$,

а тоді аналогічно $P_ix_j = -\tau x_i$.

Отже, замкнена лінійна оболонка системи векторів $\{x_j : j \in V_\Gamma\}$ є інваріантним підпростором, а оскільки система ортопроекторів $\{P_i : i \in V_\Gamma\}$ є незвідною, то вона збігається з $\mathcal{H}$ і образи ортопроекторів P_i породжуються векторами x_i відповідно.

Тепер перейдемо до доведення унітарної еквівалентності зображень π_1 та π.

Якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$, то $\langle x_i, x_j\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Якщо $(i,j) \in R_\Gamma$ тоді, або

$l(i,i_0) = (i_1 = i, i_2 = j, \dots, i_m = i_0)$, або

$l(j,i_0) = (i_1 = j, i_2 = i, \dots, i_m = i_0)$.

Нехай для визначеності виконана перша рівність, тоді $x_i = -1/\tau P_ix_j$ і маємо

$$\langle x_i, x_j\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle P_ix_j, x_j\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle P_iP_jx_j, P_jx_j\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle P_jP_iP_jx_j, x_j\rangle = -\tau.$$

Таким чином, матриця $B_{\Gamma,\tau}$ є матрицею Грама системи векторів $\{x_i : i \in V_\Gamma\}$, а тому зображення π_1 унітарно еквівалентне зображенню π. Лема повністю доведена.

Лема 3. При $\tau > 1/\mathrm{ind}\Gamma$ ненульових $*$-зображень алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ не має.

Доведення. Припустимо від супротивного, що алгебра $TL_{\Gamma,\perp,\tau}$ має ненульове $*$-зображення π у гільбертовому просторі H при $\tau > 1/\mathrm{ind}\Gamma$. Тоді можна побудувати, як і попередньому доведенні, інваріантний гільбертів підпростір, що дорівнює замкненій лінійній оболонці системи векторів $\{x_j, j \in V\}$. Але тоді матриця Грама цієї системи векторів $B_{\Gamma,\tau} = I - \tau A_\Gamma$ при $\tau > 1/\mathrm{ind}\Gamma$ не є невід'ємно визначеною. Отримали протиріччя. Лема доведена.

4. Приклади

Наведемо приклади застосування теореми до систем ортопроекторів, пов'язаних з різними зліченними деревами.

Позначимо через Σ_Γ множину тих τ, для яких існує незвідний ненульовий набір ортопроекторів $\{P_k\}$.

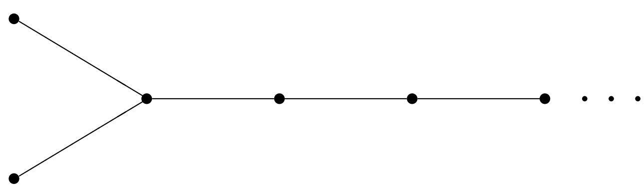
а) Індекси зліченних графів A_∞, A_Z, D_∞ дорівнюють 2 (див. [9]), тоді згідно з теоремою маємо

$\Sigma_{A_\infty} = \Sigma_{A_Z} = \Sigma_{D_\infty} = (0; 1/2]$.

A_∞

$A_\mathbb{Z}$

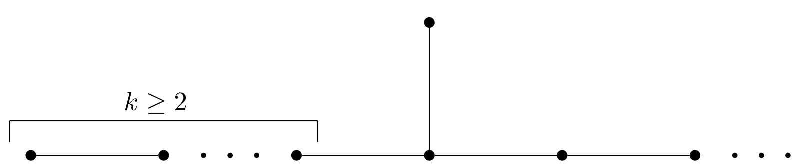
D_∞



б) Індекси серії графів $T_{1,k,\infty}$ належать проміжку $(2; \sqrt{\sqrt{5}+2})$ (див. [9]), тоді згідно з теоремою маємо

$\Sigma_{T_{1,k,\infty}} \supset \Big(0; 1/\sqrt{\sqrt{5}+2}\Big]$.

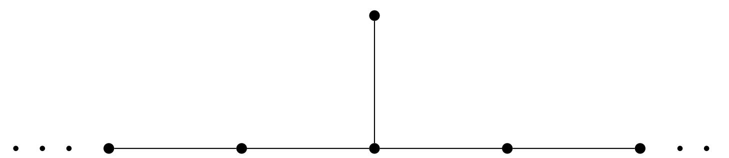
$T_{1,k,\infty}$



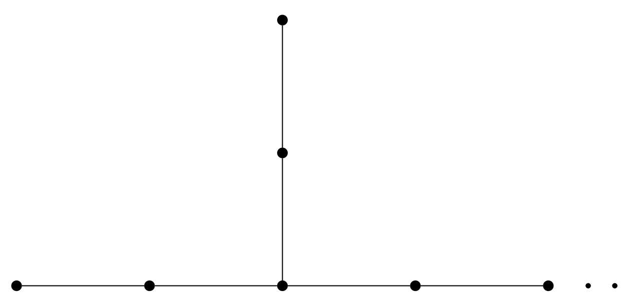
в) Індекси графів $T_{1,\infty,\infty}$ та $T_{2,2,\infty}$ дорівнюють $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (див. [9]), тоді згідно з теоремою маємо

$\Sigma_{T_{1,\infty,\infty}} = \Sigma_{T_{2,2,\infty}} = \Big(0; 1/\sqrt{\sqrt{5}+2}\Big]$.

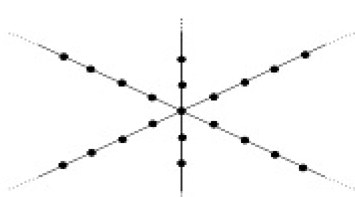
$T_{1,\infty,\infty}$



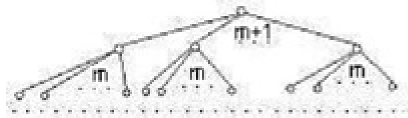
$T_{2,2,\infty}$



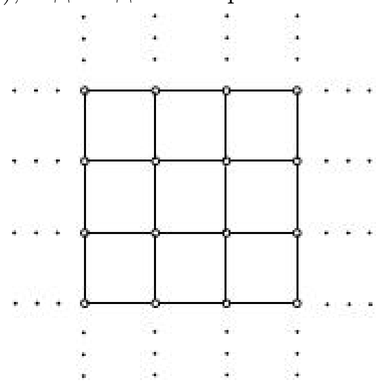
г) Індекс графу–зірочки з n нескінченними променями $K_{1,\infty,\dots,\infty}$ дорівнює $\sqrt{n-1} + 1/\sqrt{n-1}$ (див. [7]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{K_{1,\infty,\dots,\infty}} = \big(0; \sqrt{n-1}/n\big]$.



д) Індекс графа ядерної реакції U_{m+1} (степінь кожної вершини дорівнює $m+1$) дорівнює $2\sqrt{m}$ (див. [7]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{U_{m+1}} = (0; 1/2\sqrt{m}]$.



e) Індекс нескінченної цілочисельної гратки Z^2 дорівнює 4 (див. [6]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{Z^2} = (0; 1/4]$.



5. Висновки

У статті описані зображення, їх структура та множина параметрів, за яких зображення існують, для класів алгебр типу Темперлі—Ліба, пов'язаних зі зліченними деревами. Одержані результати можуть бути застосовані при подальших дослідженнях зображень алгебр, породжених проекторами, та для опису наборів підпросторів гільбертового простору.

Література

[1] *Temperley H.N.V., Lieb E.H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem / J. Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1971. – **322**. – P. 251–280.

[2] *Самойленко Ю.С., Стрелец А.В.* О простых n-ках подпространств в гильбертовом пространстве / Укр. мат. журн. – 2009 – **61**, № 12. – С. 1668–1703.

[3] *Casazza P.G., Kutyniok G.* Finite frames: theory and applications. – New York: Springer. – 2013. – 485 p.

[4] *Cvetkovič́ D., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs. Theory and Applications. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. – 1980. – 368 p.

[5] *Brouwer A.E., Haemers W.H.* Spectra of Graphs. – New York: Springer. – 2012. – 245 p.

[6] *Mohar B.,Woess W.* A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209–234.

[7] *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra Appl. – 1982. – **48**. – P. 245–256.

[8] *von Below J.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra Applications. – 2009. – **431**. – P. 1–19.

[9] *Коротков А.С., Тимошкевич Л.М.* Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера // Доп. НАН України. – 2013. – № 12. – С. 19–24.

[10] *Graham J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras // Ph.D. thesis, University of Sydney. – 1995.