Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 200–224

УДК 517.946+511.37

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник

(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом

kuz.anton87@gmail.com, ptashnyk@lms.lviv.ua

In a domain, which is Cartesian product of interval $[0, T]$ and space $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, problem with integral conditions with respect to the time variable for equations unsolved for highest time derivative with constant coefficients in a class of functions, almost periodic for spatial variables is investigated. The criterion of uniqueness and sufficient conditions of existence of the solution to the problem in different functional spaces are established. To solve the problem of small denominators that appear in the construction of solution, the metric approach is used.

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0, T]$ і простору $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом зі сталими коефіцієнтами досліджено задачу з інтегральними умовами за часовою координатою у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі у різних функціональних просторах. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

1. Вступ

Математичне моделювання багатьох задач гідродинаміки (малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається [13], фільтрація рідини в тріщинуватих породах [1] та ін.), призводить до задач з крайовими та нелокальними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

Такі задачі досліджувались багатьма авторами, зокрема, у працях [2, 4, 5] вивчались багатоточкові задачі та задачі типу Діріхле для рівнянь та систем рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом у класах функцій, періодичних за просторовими змінними. Однак задачі з інтегральними умовами для таких рівнянь практично не досліджувались.

Інтегральні умови зазвичай використовують у випадках, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або коли неможливо безпосередньо знайти певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднення.

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь почали вивчати недавно (у 80-х роках XX-го століття). Це обумовлено тим, що такі задачі, взагалі, є некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою відносно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області.

В останні десятиліття було досліджено задачі з інтегральними умовами (див. [7, 8, 9, 10, 12, 17, 19, 22, 23] та бібліографію там) для широких класів лінійних гіперболічних та параболічних рівнянь, а також безтипних і псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними.

У даній праці в p-вимірному шарі для рівняння зі сталими коефіцієнтами з еліптичним оператором при старшій похідній по часу розглядається задача з умовами, що містять інтеграли у вигляді моментів від шуканої функції за часовою змінною у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій.

2. Основні позначення

Використовуватимемо наступні позначення: $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_x = -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p})$; $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $\hat{s} = (s_0, s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$; $\mu_k = (\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \dots + |\mu_{k_p}|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \dots + \mu_{k_p} x_p$; $D^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^p\}$, $\Pi^p_H = [0,H]^p$; S_q – симетрична група всіх перестановок перших q натуральних чисел; ρ_ω – число інверсій у перестановці $\omega = (i_1, \dots, i_q) \in S_q$; C^r_q – кількість усіх комбінацій з q елементів по r; C_j, $j = 1, 2, \dots,$ — додатні величини, що не залежать від k та μ_k.

3. Постановка задачі

В області D^p розглядаємо рівняння

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] :=$$
$$L(\partial_x)\partial_t^n u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x)\partial_t^j u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D^p, \tag{1}$$

в якому
$$L(\partial_x) = \sum_{|s|=2d} a_s \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}, \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

є еліптичним диференціальним виразом,

$$A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant d_j} b_{j,s} \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}, \;\; b_{j,s} \in \mathbb{R}, \; d_j \in \mathbb{Z}_+, \; j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Для рівняння (1) ставимо задачу про знаходження майже періодичного [20] за x розв'язку, який задовольняє умови

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(0,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \;\; j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\}, \\ U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(T,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \;\; j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\}, \\ 0 \leqslant \tilde{n}_1 \leqslant n-1, \end{cases} \tag{3}$$

де

$$\mathcal{I}_{r_j}[u] = \int_0^T t^{r_j} u(t,x) dt, \quad r_j \in \mathbb{Z}_+, \; j \in \{1, \ldots, n\}, \; r_1 < \ldots < r_n;$$

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $\vartheta_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{\tilde{n}_1} \leqslant n-1$, $0 \leqslant \vartheta_{\tilde{n}_1+1} < \ldots < \vartheta_n \leqslant n-1$; кожна з функцій $\varphi_j(x)$ є майже періодичною із заданим спектром

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{-k} = -\mu_k, \; h_1|k|^{\sigma_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant h_2|k|^{\sigma_2}, \; k \in \mathbb{Z}^p\}, \tag{4}$$

у якому $0 < h_1 \leqslant h_2, 0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_2$, та розвивається в ряд Фур'є вигляду

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \tag{5}$$

$$\varphi_{jk} = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi_H^p} \varphi_j(x)\exp(-i\mu_k,\, x)dx, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Задача (1), (3) у випадку коли $\beta_j = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, досліджувалась у роботі [3] у класі 2π-періодичних за x функцій.

Позначимо: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $r = r_1 + \dots + r_n$.

При дослідженні розв'язності задачі (1), (3) використовуватимемо такі функціональні простори:

$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ — простір скінченних тригонометричних поліномів вигляду

$$v(x) = \sum_{|k|\leqslant N} v_k \exp(i\mu_k, x),$$

де $\mu_k \in \mathcal{M}$, $N \in \mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами;

$H^{\alpha}_{\mathcal{M}}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ за нормою [18]

$$\|v; H^{\alpha}_{\mathcal{M}}\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{2\alpha}\right)^{1/2};$$

$W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}$, де $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ за нормою

$$\left\|v; W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}\right\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{2\alpha} \exp(2\beta|\mu_k|^{\gamma})\right)^{1/2};$$

$C^h\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}\right)$ — простір функцій

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp\left(i\mu_k, x\right),$$

де $\mu_k \in \mathcal{M}$, $u_k(t) \in C^h([0,T])$, таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні

$$\frac{d^l u(t,\cdot)}{dt^l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u^{(l)}_k(t) \exp\left(i\mu_k, x\right),$$

де $l \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}$ і є неперервними за t у нормі цього простору,

$$\left\| u; C^h\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}\right)\right\| = \sum_{l=0}^{h} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{d^l u}{dt^l}; W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}\right\|; \tag{6}$$

простір $C^h\left([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right)$ означається аналогічно;

$C^h_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є h разів неперервно диференційовними в області $\bar{D}^p$ за всіма змінними і майже періодичними за x зі спектром $\mathcal{M}$ рівномірно по $t \in [0,T]$, із нормою

$$\left\| u; C^h_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)\right\| = \sum_{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)$ — простір функцій із $C^h_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)$, які не залежать від t.

Якщо $\alpha > p/(2\sigma_1)$, то справедливі такі вкладення (див. [21] та бібліографію там):

$$H^{h+\alpha}_{\mathcal{M}} \subset C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p), \quad C^h([0,T], H^{h+\alpha}_{\mathcal{M}}) \subset C^h_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p), \quad h \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Нехай $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ — простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ зі слабкою збіжністю (див. [22]).

4. Єдиність розв'язку задачі.

Розв'язок задачі (1), (3) шукаємо в класі майже періодичних за x зі спектром $\mathcal{M}$ функцій у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x). \tag{8}$$

Підставивши ряди (5), (8) у рівняння (1) та умови (3), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$N\left(\frac{d}{dt}, \mu_k\right)[u_k] := L(\mu_k) u_k^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\mu_k) u_k^{(j)}(t) = 0, \tag{9}$$

$$\begin{cases} U_j[u_k] := \alpha_j u_k^{(\vartheta_j)}(0) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u_k] = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \dots, \tilde{n}_1\}, \\ \\ U_j[u_k] := \alpha_j u_k^{(\vartheta_j)}(T) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u_k] = \varphi_{jk}, \quad j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \dots, n\}. \end{cases} \tag{10}$$

Розглянемо задачу (9), (10) при $k = \vec{0}\,(\mu_{\vec{0}} = \vec{0}\,)$. У цьому випадку рівняння (9) має вигляд

$$N\left(\frac{d}{dt}, \vec{0}\right)[u_{\vec{0}}] := \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,\vec{0}}\, u_{\vec{0}}^{(j)}(t) = 0, \tag{11}$$

оскільки $L(\vec{0}) = 0$, а $A_j(\vec{0}) = b_{j,\vec{0}}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leqslant n - 1$, таке що $b_{n_0,\vec{0}} \neq 0$, а при $j > n_0$ $b_{j,\vec{0}} = 0$. Тоді рівняння (11) має порядок n_0. Розв'язок задачі (9), (10) при $k = \vec{0}$ зображується формулою

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l=1}^{m_0} \sum_{q=0}^{\kappa_l - 1} C_{lq} t^q \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\, t), \tag{12}$$

де $\lambda_{l,\vec{0}}$, $l \in \{1, \dots, m_0\}$, – різні корені рівняння $\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,\vec{0}}\, u_{\vec{0}}^{(j)}(t) = 0$ з кратностями κ_l відповідно, $\sum_{l=1}^{m_0} \kappa_l = n_0$, а сталі C_{lq}, $l \in \{1, \dots, m_0\}$, $q \in \{0, 1, \dots, \kappa_l - 1\}$, визначаються із системи n лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \sum_{l=1}^{m_0} \sum_{q=0}^{\kappa_l - 1} C_{lq} B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \right. \tag{13}$$

у якій

$$B_{jq}(\lambda, T) = \begin{cases} \alpha_j P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}}, 0) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}}, T), & 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \alpha_j P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}}, T), & \tilde{n}_1 + 1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \tag{14}$$

$$P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}}, t) = \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\, t) \sum_{h=0}^{\min\{\vartheta_j, q\}} C_{\vartheta_j}^h \frac{q!}{(q-h)!} \lambda^{\vartheta_j - h} t^{q-h}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}}, T) = \mathcal{I}_{r_j}[t^q \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\, t)] = \\ = Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\, T) - Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}}, 0), \end{gathered} \tag{16}$$

$$Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}}, t) = \sum_{h=1}^{r_j+q+1} \frac{(-1)^{h+1}(r_j+q)!}{(r_j+q-h+1)!} \frac{t^{r_j+q-h+1}}{\lambda_{l,\vec{0}}^h}. \tag{17}$$

Позначимо через $\mathbf{A}$ матрицю системи (13), а через $\overline{\mathbf{A}}$ – розширену матрицю цієї системи:

$$\mathbf{A} = \left\| B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) \right\|_{q=0,\ldots,\kappa_l-1,\, l=1,\ldots,m_0}^{j=1,\ldots,n},$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \left\| B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) \right| \varphi_{jk} \Big\|_{q=0,\ldots,\kappa_l-1,\, l=1,\ldots,m_0}^{j=1,\ldots,n}.$$

При $k = \vec{0}$ задача (9), (10) має не більше одного розв'язку тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = n_0; \tag{18}$$

для існування розв'язку цієї задачі необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \overline{\mathbf{A}}. \tag{19}$$

Розглянемо тепер задачу (9), (10), коли $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. З еліптичності диференціального виразу (2) випливає, що

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\} \qquad L(\mu_k) \equiv \sum_{|s|=2d} a_s (\mu_{k_1})^{s_1} \cdots (\mu_{k_p})^{s_p} \neq 0.$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає рівнянню (9) при $\mu_k \neq \vec{0}$, має вигляд

$$N(\lambda, \mu_k) := \lambda^n + L^{-1}(\mu_k) \left(A_{n-1}(\mu_k) \lambda^{n-1} + \cdots + A_0(\mu_k) \right) = 0. \tag{20}$$

Нехай $\lambda_{lk} := \lambda_l(\mu_k)$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, – різні корені рівняння (20) із кратностями n_l відповідно, $n_1 + \cdots + n_m = n$ (для спрощення викладок вважаємо, що числа m та n_l, $l \in \{1, \ldots, m\}$, не залежать від μ_k, а також, що $\lambda_{lk} \neq 0$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$).

Нехай

$$f_{qk}(t) := f_q(t, \mu_k), \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{21}$$

нормальна (в точці $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння (9). Позначимо через

$$\Delta(\mu_k, T) = \det \| U_j [f_{qk}(t)] \|_{j,q=1}^{n} \tag{22}$$

характеристичний визначник задачі (9), (10) при $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

Задача (9), (10) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [14].

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі* (1), (3) *у просторі* $C^n([0,T],\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (18) *та умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\} \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{23}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2 з [22]. □

5. Існування розв'язку задачі.

Надалі вважатимемо, що виконуються умови (18), (19) і (23). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок задачі (9), (10), а формальний розв'язок задачі (1), (3) зображується рядом

$$u(t,x) = \\ = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left(\sum_{q,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{24}$$

де $\Delta_{jq}(\mu_k,T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k,T)$ елемента j-го рядка та q-го стовпця, а $u_{\vec{0}}(t)$ — зображується формулою (12).

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (18), (19) *та* (23). *Якщо* $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}\,(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (3) *із простору* $C^n([0,T],\mathcal{T}_{\mathcal{M}})\,(C^n([0,T],\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$, *який зображується формулою* (24).

Доведення базується на теоремі 1 із [22]. □

Існування розв'язку задачі (1), (3) у шкалі просторів $C^n\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\gamma}\right)$ чи $C^n\left([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right)$ пов'язане з проблемою малих знаменників [11], бо вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

При дослідженні розв'язності задачі (1), (3) в цих просторах будемо розрізняти два випадки:

A) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} \geqslant 2d$,

B) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} < 2d$.

Випадок A. Оскільки $L(\mu_k)$ – однорідний многочлен степеня $2d$ відносно змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$, то для нього справедлива така оцінка [5]:

$$|L(\mu_k)| > C_L|\mu_k|^{2d}, \quad C_L := p^{-d} \inf_{\|\xi\|=1} L(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^p. \tag{25}$$

Для коренів рівняння (20), на підставі (25) та [15, стор. 101], справедливі такі оцінки:

$$|\lambda_{lk}| \leqslant C_1|\mu_k|^{\chi_1}, \quad l \in \{1, \ldots, m\}, \tag{26}$$

де

$$\chi_1 = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \frac{d_j - 2d}{n-j} \right\},$$
$$C_1 = 2 \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \left(\frac{\max_{|s|\leqslant d_j}\{|b_{j,s}|\}}{C_L} \right)^{\frac{1}{n-j}} \right\}.$$

Позначимо:

$$\gamma_j = 0, \quad j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\};$$
$$\gamma_j = \begin{cases} 0, & \alpha_j = 0, \\ \vartheta_j, & \alpha_j \neq 0, \end{cases} \quad j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\};$$
$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n;$$
$$\eta_1(j,q) := \chi_1 \left(\frac{n(n-1)}{2} + q + \gamma - \gamma_j + 1 \right).$$

Лема 1. *Для алгебричних доповнень $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ елементів визначника (22) справедливі оцінки*

$$|\Delta_{jq}(\mu_k, T)| \leqslant C_2(1 + |\mu_k|)^{\eta_1(j,q)} \exp((n-1)C_1|\mu_k|^{N-2d}T)$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, де

$$C_2 = (n-1)!2^n C_1 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left\{|\alpha_j|, |\beta_j| T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\right\}$$

для всіх $j, q \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Елемент визначника (22), який стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця має вигляд

$$\delta_{jq}(\mu_k,T)=\begin{cases}\alpha_j f_{qk}^{(\vartheta_j)}(0)+\beta_j\mathcal{I}_{r_j}[f_{qk}], & 1\leqslant j\leqslant \tilde n_1,\\[2ex] \alpha_j f_{qk}^{(\vartheta_j)}(T)+\beta_j\mathcal{I}_{r_j}[f_{qk}], & \tilde n_1+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases}\qquad(27)$$

Для функцій (21), на підставі (26) та леми 12.7.7 з [16], отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{j-1}f_{qk}(t)}{dt^{j-1}}\right|\leqslant 2^nC_1(1+|\mu_k|)^{(n+j-q)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T),\qquad(28)$$

де $q,j\in\{1,\dots,n\}$. На підставі (28) отримуємо такі оцінки:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T t^{r_j}f_{qk}(t)dt\leqslant\max_{t\in[0,T]}|f_{qk}(t)|\int\limits_0^T t^{r_j}dt=\frac{T^{r_j+1}}{r_j+1}\max_{t\in[0,T]}|f_{qk}(t)|\leqslant\\ \leqslant 2^nC_1\frac{T^{r_j+1}}{r_j+1}(1+|\mu_k|)^{(n-q+1)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T)\end{gathered}\qquad(29)$$

для всіх $j,q\in\{1,\dots,n\}$.

Оскільки $f_{qk}(t)$, $q\in\{1,\dots,n\}$, – нормальна (в точці $t=0$) фундаментальна система розв'язків рівняння (9), то

$$\left|f_{qk}^{(\vartheta_j)}(0)\right|=\delta_{\vartheta_j-1,q}\quad\text{для всіх}\quad j\in\{1,\dots,n_1\},\qquad(30)$$

де $\delta_{\vartheta_j-1,q}$ — символ Кронекера.

На підставі (27) та (29)–(30) отримуємо такі оцінки:

$$|\delta_{jq}(\mu_k,T)|\leqslant C_3(1+|\mu_k|)^{(n+\gamma_j-q+1)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T),\qquad(31)$$

де $j,q\in\{1,\dots,n\}$, а

$$C_3=2^nC_1\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|\alpha_j|,|\beta_j|T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\right\}.$$

Для алгебричних доповнень визначника $\Delta(\mu_k,T)$ справедливі формули [6]

$$\Delta_{jq}(\mu_k,T)=\sum_{\omega\in S_{n-1}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq q,i_l\neq j}}^{2n}\delta_{i_l,l}(\mu_k,T)\qquad(32)$$

для усіх $j, q \in \{1, \ldots, n\}$. На підставі (32) та оцінок (31) отримуємо

$$
\begin{gathered}
|\Delta_{jq}(\mu_k, T)| \leqslant \\
\leqslant C_2(1+|\mu_k|)^{\chi_1(q+\gamma-\gamma_j+\sum_{l=1}^{n}(n+1-l))}\exp((n-1)C_1|\mu_k|^{\chi_1}T) = \\
= C_2(1+|\mu_k|)^{\eta_1(j,q)}\exp((n-1)C_1|\mu_k|^{\chi_1}T).
\end{gathered}
$$

З отриманої нерівності і випливає доведення леми. □

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (19), (23) *та існують сталі $\eta > 0$ і $\theta \geqslant 0$ такі, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується нерівність*

$$
|\Delta(\mu_k, T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}\exp(-\theta|\mu_k|^{\chi_1}). \tag{33}
$$

Якщо

$$
\begin{gathered}
\varphi_j(x) \in W^{q_1+\alpha,\, q_2+\beta}_{\mathcal{M},\chi_1}, \\
q_1 = \eta + \chi_1\left((n+1)(n+2)/2 + \gamma - \gamma_j\right), \\
q_2 = \theta + nC_1T, \quad j \in \{1, \ldots, n\},
\end{gathered}
$$

то існує розв'язок задачі (1), (3) *із простору $C^n\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\chi_1}\right)$, який зображається формулою* (24) *і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x), j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюємо належність функції, що зображена рядом (24) до простору $C^n\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\chi_1}\right)$. Підставивши ряд (24) у (6), на підставі леми 1 та оцінок (28), (33) отримуємо

$$
\left\|u; C^n\left([0,T], W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M},\chi_1}\right)\right\| \leqslant C_4\sum_{j=0}^{n}\left\|\varphi_j; W^{q_1+\alpha,\, q_2+\beta}_{\mathcal{M},\chi_1}\right\|,
$$

де $C_4 = 2^n n^2 C_1 C_2$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

З'ясуємо можливість виконання нерівностей (33). Для спрощення викладок припустимо, що всі корені характеристичного многочлена (20) є простими, тобто $m = n$, $n_l = 1$, $l \in \{1, \ldots, m\}$. Позначимо: $\Lambda = (\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{nk})$, $(J, \Lambda) = j_1\lambda_{1k} + \cdots + j_n\lambda_{nk}$,

$J \in \mathcal{J}_n$, де $\mathcal{J}_n$ – множина всіх векторів $J = (j_1, \dots, j_n)$, $j_l \in \{0, 1\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$; $r = r_1 + \dots + r_n$,

Функції

$$u_{lk} := u_{lk}(t) = \exp(\lambda_{lk} t), \quad l \in \{1, \dots, n\}, \tag{34}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (9) при $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Нехай

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) := \det \|U_j[u_{lk}]\|_{q,l=1}^n,$$

де $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, — характеристичний визначник задачі (9), (10) отриманий при використанні фундаментальної системи (34). Елементи $g_{jl}(\mu_k, T)$ визначника $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ мають вигляд

$$g_{jl}(\mu_k, T) = \alpha_j P_l^{\vartheta_j} + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^0(\lambda_{lk}, T), \quad j, l \in \{1, \dots, n\}, \tag{35}$$

де

$$P_l^{\vartheta_j} = \begin{cases} \lambda_{lk}^{\vartheta_j}, & 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \\ \lambda_{lk}^{\vartheta_j} \exp(\lambda_{lk} T), & \tilde{n}_1 + 1 < j \leqslant n, \end{cases} \qquad l \in \{1, \dots, n\}, \tag{36}$$

а $\mathcal{I}_{r_1}^0(\lambda_{lk}, T)$, де $j \in \{1, \dots, n\}$, визначаємо на основі формул (16).

Визначники $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ і $\Delta(\mu_k, T)$ пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = W(\mu_k) \Delta(\mu_k, T), \tag{37}$$

де

$$W(\mu_k) = \det \|\lambda_{lk}^{q-1}\|_{q,l=1}^n = \prod_{n \geqslant j > l \geqslant 1} (\lambda_{jk} - \lambda_{lk})$$

є значення вронскіана системи функцій (34) в точці $t = 0$.

Як і в [22, п. 5] показуємо, що визначник $\Delta(\mu_k, T)$ є квазімногочленом відносно змінної T і зображається формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{1}{W(\mu_k)} \sum_{J \in \mathcal{J}_n} \exp((J, \Lambda) T) F_J(T), \tag{38}$$

де $F_J(T), J \in \mathcal{J}_n$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N_J, $N_J \leqslant r_1 + \dots + r_n$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 2^n. Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ розглянемо функцію $\Delta(\mu_k, \tau)$, що визначена на інтервалі $(0, \infty)$ формулою (38), в якій T треба замінити на τ. З (38) випливає, що функція $\Delta(\mu_k, \tau)$ є аналітичною на інтервалі $\tau \in (0, \infty)$. Продовжимо її аналітично на $\mathbb{R}$ і отриману функцію позначимо $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mu_k, \tau)$. Аналогічно, на основі $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$, побудуємо функцію $\widetilde{\mathcal{D}}(\mu_k, \tau)$. Через $E(\mathcal{D}, \varepsilon, [0, T_0])$, де $T_0 > 0$, позначимо множину тих $\tau \in [0, T_0]$, для яких виконується нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$. За теоремою 2.1 із [8] для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}, \varepsilon, [0, T_0]) \leqslant C_5 B(\mu_k) \left(\frac{4\varepsilon \Psi(\mu_k)}{G(\mu_k)} \right)^{\frac{1}{N-1}},$$

де $C_5 := C_5(N, T_0)$,

$$N := \sum_{J \in \mathcal{J}_n} N_J \leqslant 2^n \left(1 + r_1 + \cdots + r_n\right), \tag{39}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J \in \mathcal{J}_n} |(J, \Lambda)|, \tag{40}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau \in [0, T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J \in \mathcal{J}_n} \mathrm{Re}(J, \Lambda) \right) \tau \right), \tag{41}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^n} \left\{ \left| \frac{\partial^{j-1} \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^{j-1}} \right|_{\tau=0} \cdot B^{-j}(\mu_k) \right\} \tag{42}$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

З (40), враховуючи (26), отримуємо, що

$$B(\mu_k) \leqslant 1 + \sum_{l=1}^{n} |\lambda_{lk}| \leqslant C_6 (1 + |\mu_k|)^{\chi_1}, \tag{43}$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, де $C_6 = nC_1$. Визначимо сталу C_λ наступним чином:

$$C_\lambda = -\min \left\{ 0, \inf_{\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}} \min_{l \in \{1, \ldots, n\}} \left\{ \frac{\mathrm{Re} \lambda_{lk}}{|\mu_k|^{\chi_1}} \right\} \right\},$$

яка, на підставі (26), існує і є скінченною. Тоді з (41) випливає оцінка

$$\Psi(\mu_k) \leqslant \exp(n C_\lambda T_0 |\mu_k|^{\chi_1}) \tag{44}$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

Для того, щоб оцінити знизу $G(\mu_k)$ проведемо наступні міркування. З формул (35) та (37) випливає, що

$$\mathcal{D}(\mu_k,\tau)=W^{-1}(\mu_k)\widetilde{D}(\mu_k,\tau)=W^{-1}(\mu_k)\det\|g_{jl}(\mu_k,\tau)\|_{j,l=1}^{n}. \qquad (45)$$

Для кожного $j,l\in\{1,\dots,n\}$, справедливі такі розвинення:

$$\exp(\lambda_{lk}\tau)=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\lambda_{lk}^{q}}{q!}\tau^{q}+\tau^{n+1}\tilde{\nu}_{lk}(\tau), \qquad (46)$$

$$\int\limits_0^\tau t^{r_j}\exp(\lambda_{lk}t)dt=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\lambda_{lk}^{q}}{q!(r_j+q+1)}\tau^{r_j+q+1}+\tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau), \qquad (47)$$

де $\tilde{\nu}_{lk}(\tau)$,

$$V_{jlk}(\tau)=(r_j+n+1)^{-1}\int_0^\tau\tilde{\nu}_{lk}(t)dt$$

є аналітичні в околі точки $\tau=0$ функції.

Підставивши розвинення (46), (47) у формули (35), в яких T слід замінити на τ, отримаємо

$$g_{jl}(\mu_k,\tau)=\begin{cases}\alpha_j\lambda_{lk}^{\vartheta_j}+\beta_j\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{\lambda_{lk}^{q}\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}+\\ +\beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau),\quad 1\leqslant j\leqslant\tilde{n}_1,\\ \\ \alpha_l\sum\limits_{l=\vartheta_j}^{n-1}\frac{\lambda_{lk}^{q}\tau^{q-\vartheta_j}}{(q-\vartheta_j)!}+\beta_j\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{\lambda_{lk}^{q}\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}\\ +\alpha_j\tau^{n}\nu_{lk}(\tau)+\beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{lk}(\tau),\ \ \tilde{n}_1+1\leqslant j\leqslant n,\end{cases} \qquad (48)$$

де $l\in\{1,\dots,n\}$.

Згрупувавши у формулах (48) доданки за степенями λ_{lk}, перепишемо (48) у вигляді

$$g_{jl}(\mu_k,\tau)=\sum_{q=0}^{n-1}\lambda_{lk}^{q}\,\tilde{g}_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\tau)+\widetilde{V}_{jlk}(\tau),\quad j,l\in\{1,\dots,n\}, \qquad (49)$$

де

$$\widetilde{V}_{jlk}(\tau)=\begin{cases}\beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau), & 1\leqslant j\leqslant\tilde{n}_1,\\ \alpha_j\tau^{n}\nu_{lk}(\tau)+\beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau), & \tilde{n}_1+1\leqslant j\leqslant n,\end{cases} \qquad (50)$$

При цьому для кожного $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \alpha_j + \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & q = \vartheta_j, \\ \\ \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & q \neq \vartheta_j, \end{cases} \tag{51}$$

якщо $j \in \{1, \dots, \tilde{n}_1\}$ і

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & 0 \leqslant q < \vartheta_j, \\ \\ \alpha_j \dfrac{\tau^{q-\vartheta_j}}{(q-\vartheta_j)!} + \\ \quad + \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & \vartheta_j \leqslant q \leqslant n \end{cases} \tag{52}$$

якщо $j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \dots, n\}$.

З (50)–(52) випливає, що функції $\widetilde{V}_{jlk}(\tau)$, $j, l \in \{1, \dots, n\}$, мають в точці $\tau = 0$ нуль вищого порядку ніж

$$\sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \, \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau),$$

де $j, l \in \{1, \dots, n\}$, відповідно. З формули (45), враховуючи (49), отримуємо

$$\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = W^{-1}(\mu_k) \det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) + \widetilde{V}_{jlk}(\tau) \right\|_{j,l=1}^{n}. \tag{53}$$

Використовуючи елементарні властивості визначників, розкриємо у визначнику в формулі (53) суми по рядках і одержимо таке розвинення:

$$\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = W^{-1}(\mu_k) \left(\det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \right\|_{j,l=1}^{n} + \overline{\mathcal{D}}(\mu_k, \tau) \right), \tag{54}$$

де $\overline{\mathcal{D}}(\mu_k, \tau)$ – деяка аналітична в околі точки $\tau = 0$ функція, яка має в цій точці нуль вищого порядку ніж

$$\det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^{q} \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \right\|_{j,l=1}^{n}.$$

Легко бачити, що матриця

$$\left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^{q} \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \right\|_{j,l=1}^{n}$$

є добутком матриць

$$\left\| \lambda_{lk}^{q-1} \right\|_{q,l=1}^{n} \quad \text{та} \quad \| \tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \|_{j,q=1}^{n},$$

звідки випливає, що

$$\det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^{q} \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \right\|_{j,l=1}^{n} = \\ = \det \left\| \lambda_{lk}^{q-1} \right\|_{q,l=1}^{n} \times \det \| \tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \|_{j,q=1}^{n}. \tag{55}$$

Позначимо

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) := \det \| \tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \|_{j,q=1}^{n}, \tag{56}$$

Враховуючи (54)–(56), отримуємо таке розвинення:

$$\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) + W^{-1}(\mu_k) \overline{\mathcal{D}}(\mu_k, \tau). \tag{57}$$

Зауважимо, що визначник (56) є поліномом відносно змінної τ степеня не вище $n(n+1)/2 + r$ (це випливає з (51) та (52)), і є відмінним від нуля для всіх (крім скінченної кількості) точок τ. Позначимо через $\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ найменший степінь τ, що входить у вираз для (56), а через $C_{\eta_0} := C_{\eta_0}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r})$ коефіцієнт при ньому. Тоді з (57) випливають такі рівності для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$:

$$\left. \frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \\ C_{\eta_0}, & q = \eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}). \end{cases} \tag{58}$$

Тепер оцінимо знизу величину $G(\mu_k)$. З (58), на підставі (42), (43), випливає

$$
\begin{aligned}
G(\mu_k) = {} & \left.\frac{\partial^{\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})}\mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial\tau^{\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})}}\right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})} \\
& \geqslant C_7(1+|\mu_k|)^{-\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})\chi_1},
\end{aligned}
\tag{59}
$$

де $C_7 = C_{\eta_0}(C_6)^{-\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$. □

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність (33) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\theta = nC_\lambda T_0$, а*

$$\eta > \chi_1\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta}) + (p/\sigma_1 + \chi_1)(2^n(1+r) - 1).$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 у [22] з урахуванням оцінок (43), (44) та (59). □

Зауваження 1. Для деяких значень параметрів $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ величина $\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ може бути легко обчислена. Нехай в умовах (3) $\alpha_j = 0$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Тоді

$$\tilde{g}_{j,q-1}(0,\beta_j,\tau) = \beta_j \frac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}$$

для усіх $j, q \in \{1,\dots,n\}$. Окрім того,

$$
\begin{aligned}
\Delta_0(\vec{0},\vec{\beta},\tau) &= \det \left\| \beta_j \frac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)} \right\|_{j,q=1}^{n} = \\
&= \tau^{r+n(n+1)/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{(j-1)!} \det \left\| \frac{1}{r_j+q} \right\|_{j,q=1}^{n} = \\
&= C_{\eta_0}(\vec{0},\vec{\beta},\vec{r})\tau^{r+n(n+1)/2},
\end{aligned}
$$

де

$$C_{\eta_0}(\vec{0},\vec{\beta},\vec{r}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{(j-1)!} \prod_{n\geq j>l\geq 1} (r_j - r_l)(n-l) / \prod_{j,\,l=1}^{2n} (r_j + l),$$

тобто $\eta_0(\vec{0},\vec{\beta}) = r + n(n+1)/2$. □

Випадок B. У цьому випадку вдається показати існування розв'язку у шкалі просторів $C^n([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}})$. Для коренів рівняння (20) на підставі (25) та [15, стор. 101], справедливі такі оцінки :

$$\begin{gathered} |\lambda_{lk}| \leqslant C_1 |\mu_k|^{-\chi_2}, \quad \text{де} \\ \chi_2 = \min_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \frac{2d-d_j}{n-j} \right\}, \quad l \in \{1,\dots,m\}. \end{gathered} \tag{60}$$

Позначимо

$$C_A = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \max_{|s|\leqslant d_j} \{|b_{j,s}|\} \right\}.$$

Теорема 5. *Нехай справджуються умови* (19), (23) *та існує стала* $\tilde{\eta} > 0$ *така, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\tilde{\eta}}. \tag{61}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in H^{\tilde{\eta}+\alpha}_{\mathcal{M}}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *то існує розв'язок задачі* (1), (3) *із простору* $C^n([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}})$, *який зображається формулою* (24) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, *де* $j \in \{1,\dots,n\}$.

Доведення. На підставі формул (6) та (24) отримуємо оцінку

$$\|u; C^n([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}})\| =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left(\left| u^{(l)}_{\vec{0}}(t) \right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left| u^{(l)}_k(t) \right|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{n} \left(\max_{t\in[0,T]} \left| u^{(l)}_{\vec{0}}(t) \right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \max_{t\in[0,T]} \left| u^{(l)}_k(t) \right|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}, \tag{62}$$

в якій

$$u_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t) \tag{63}$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$.

З формули (12) на підставі (14)–(17) випливають оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{\vec{0}}^{(l)}(t)\right|^2 \leqslant C_8\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{j,\vec{0}}\right|^2 \tag{64}$$

для кожного $l\in\{0,1,\ldots,n\}$. Тут стала C_8 залежить від T та α_j, β_j і r_j, де $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Із (63) отримуємо нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(l)}(t)\right| \leqslant \sum_{j,q=1}^{n}\frac{|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|}{|\Delta(\mu_k,T)|}\,|\varphi_{jk}|\max_{t\in[0,T]}|f_{qk}^{(l)}(t)|. \tag{65}$$

На підставі нерівності (60) та теореми 2 у [3] отримуємо оцінку

$$\max_{t\in[0,T]}|f_{qk}^{(l)}(t)|\leqslant C_9 \tag{66}$$

для кожного $l\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Тут

$$C_9=(1+nC_A/C_L)(1+C_1)^{2n}\exp((1+C_1)T).$$

Для алгебричних доповнень $\Delta_{jq}(\mu_k,T)$ визначника (22), враховуючи (66), можемо записати нерівність

$$|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|\leqslant C_{10}, \tag{67}$$

де $j,q\in\{1,\ldots,n\}$ довільні, а число $C_{10}:=C_{10}(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{r},T,C_9)$.

Враховуючи (61), (65)–(67), для кожного $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}$ отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(l)}(t)\right|\leqslant nC_9C_{10}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\,(1+|\mu_k|)^{\tilde{\eta}}, \tag{68}$$

де $l\in\{0,1,\ldots,n\}$. З (62), (64) та (68) випливає оцінка

$$\begin{aligned}&\|u;C^n([0,T],H^{\alpha}_{\mathcal{M}})\|\leqslant\\ &\leqslant C_{11}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_{jk}|^2(1+|\mu_k|)^{2(\tilde{\eta}+\alpha)}\right)^{1/2}=\\ &=C_{11}\sum_{l=1}^{n}\left\|\varphi_j;H^{\tilde{\eta}+\alpha}_{\mathcal{M}}\right\|.\end{aligned}$$

де $C_{11} = (n+1)\max\{C_8, nC_9C_{10}\}$. З отриманої нерівності випливає твердження теореми. $\square$

Зауваження 2. Якщо в теоремі 4 $\alpha > n + p/(2\sigma_1)$, то, згідно з (7), справедливе вкладення $C^n([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}}) \subset C^n_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)$, а розв'язок задачі (1), (3) є класичним.

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (61). Для цього скористаємося методикою роботи [3] та наступними лемами, доведеними в [3].

Лема 2. *Для довільних комплексних квадратних матриць*

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \quad i \quad B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$$

виконується нерівність

$$|\det A - \det B| \leqslant n \cdot n! \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} - b_{ij}| \left(\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \{|a_{ij}|, |b_{ij}|\} \right)^{n-1}.$$

Лема 3. *Для довільного $t > 0$ виконуються такі нерівності:*

$$\max_{t\in[0,T]} |f_{qk}^{(j-1)}(t) - g_q^{(j-1)}(t)| < C_{12}|\mu_k|^{-n\chi_2},$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$ довільні. Тут $g_q(t) = t^{q-1}/((q-1)!)$ і

$$C_{12} = nC_LC_A(1+C_1)^{2n-1} \times \exp((C_1+1)T).$$

Розглянемо множину

$$E := \{T > 0 \mid \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) = 0\},$$

де вираз $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ визначений формулою (56) при $\tau = T$. Легко бачити, що

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) = \det \|U_j[g_q]\|_{j,q=1}^n, \tag{69}$$

де $g_q := g_q(t)$ є ті ж функції, що і в лемі 3. Визначник $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ є многочленом за змінною T степеня не вище ніж $n(n+1)/2 + r$, а найменший степінь T, що входить у вираз для $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ ми позначали через $\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Теорема 6. *Існує число $K := K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) > 0$ таке, що для всіх векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $|\mu_k| > K$, та для довільного $T \notin E$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant \begin{cases} D_1 T^{\frac{n(n+1)}{2}+r}, & T \geqslant 1, \\ D_2 T^{\eta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta})}, & T < 1, \end{cases} \tag{70}$$

де D_1, D_2 — деякі додатні сталі, які залежать від α_j, β_j, r_j, де $j \in \{1, \ldots, n\}$, та T.

Доведення. На підставі (69) та леми 2 запишемо

$$\begin{gathered} |\Delta(\mu_k, T) - \Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \\ \leqslant n \cdot n! \max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} |U_j[f_{qk}] - U_j[g_q]| \times \\ \times \left(\max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} \{|U_j[f_{qk}]|, |U_j[g_q]|\} \right)^{n-1}. \end{gathered} \tag{71}$$

Для довільного $T > 0$ виконуються нерівності

$$|U_j[g_q]| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j| T^n, |\beta_j| T^{r_j+1}\}, \tag{72}$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$. Враховуючи (66), отримуємо такі оцінки:

$$|U_j[f_{qk}]| \leqslant C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\beta_j| T^{r_j+1}\}, \tag{73}$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$. На підставі оцінок (72), (73) отримуємо нерівність

$$\max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} \{|U_j[f_{qk}]|, |U_j[g_q]|\} \leqslant C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\alpha_j| T^n, |\beta_j| T^{r_j+1}\}. \tag{74}$$

З леми 3 випливає оцінка

$$|U_j[f_{qk}] - U_j[g_q]| \leqslant C_{13} |\mu_k|^{-n\chi_2}, \tag{75}$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, а

$$C_{13} = C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\beta_j| T^{r_j+1}\}.$$

З формули (71) на підставі (74) і (75) отримуємо

$$|\Delta(\mu_k, T) - \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant n \cdot n! (C_{14})^{n-1} C_{13} |\mu_k|^{-n\chi_2}; \tag{76}$$

тут
$$C_{14} = C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\alpha_j|T^n, |\beta_j|T^{r_j+1}\}.$$

Визначник (69) є многочленом за змінною T степеня не вище ніж $n(n+1)/2+r$, а найменший степінь T у виразі для (69) дорівнює $\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Звідси випливають такі оцінки

$$|\Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \begin{cases} C_{15}T^{n(n+1)/2+r}, & T \geqslant 1, \quad C_{15} := C_{15}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}), \\ C_{16}T^{\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}, & T < 1, \quad C_{16} := C_{16}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}). \end{cases} \tag{77}$$

Позначимо

$$K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) := \max\left\{\frac{2n \cdot n!(C_{14})^{n-1}C_{13}}{C_{15}}, \frac{2n \cdot n!(C_{14})^{n-1}C_{13}}{C_{16}}\right\}^{-n\chi_2}.$$

З нерівностей (76), (77) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $|\mu_k| > K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$, та для всіх $T \notin E$ виконується нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T) - \Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C_{15}}{2}T^{\frac{n(n+1)}{2}+r}, & T \geqslant 1, \\[2ex] \dfrac{C_{16}}{2}T^{\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}, & T < 1, \end{cases}$$

а, отже й нерівність (70) при $D_1 = C_{15}/2$, $D_2 = C_{16}/2$. □

6. Висновки

У дані роботі в $p+1$-вимірному шарі для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом досліджено коректність задачі з інтегральними умовами за часовою координатою у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі у шкалах просторів

$$C^n\left([0, T], W^{\alpha, \beta}_{\mathcal{M}, \gamma}\right) \quad \text{і} \quad C^n\left([0, T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right),$$

а також у просторах

$$C^n([0, T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}}) \quad \text{та} \quad C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}).$$

Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Показано, що у випадку, коли у рівнянні (1) порядок диференціального виразу при найстаршій похідній за часом є найбільшим, то проблема малих знаменників не виникає.

Результати можна поширити на системи вигляду (1).

Література

[1] *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основних представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. механика и математика – 1960. – Т. 24, № 5. – С.58–73.

[2] *Білусяк Н.І., Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом// Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.

[3] *Бобик І.О., Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для рівнянь не розв'язаних відносно старшої похідної за часом// Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С.46–55.

[4] *Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом// Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604–1613.

[5] *Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом// Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.

[6] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272с.

[7] *Лукина Г.А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза // Вестн. ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование". – 2011. – Вип.8, №17. – С. 52–61.

[8] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними// Наук. Вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.

[9] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–141.

[10] *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения//Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.

[11] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[12] *Симотюк М.М., Медвідь О.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 98–107.

[13] *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – 18, № 1. – С. 3–50.

[14] *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – xiv+308 с.

[15] *Фаддеєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.

[16] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4-х т. — М.: Мир, 1986. — Т. 2. — 456 с.

[17] *Штабалюк П.І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами//Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153–165.

[18] *Шубин М.А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными// Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, №2 – С. 3–47.

[19] *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differentail equations// Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, № 1. – P. 31–37.

[20] *Besicovitch A.S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publications, Inc., 1954. – 180 p.

[21] *Dell'acqua G., Santucci P.* Embedding theorems of Sobolev-Besicovitch spaces $W_{ap}^{k,1}(\mathbb{R}^s)$// Rendiconti di Matematica. – 1996. – Serie VII, 16. – P. 525–536.

[22] *Kuz' A. M. Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for Garding hyperbolic equations// Ukrainian Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 277–293.

[23] *Mesluob S., Bouziani A.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations// J. Applied Math. – 2001. – № 3. – P. 107–116.