Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 225–232

УДК 517.983

***В. О. Лебідь***

*(Інститут математики НАН України, Київ)*

# Спектральний аналіз зіркового графа з нескінченними променями

**lebiduk@gmail.com**

The detailed spectral analysis of a star graph with semibounded infinite chains is given. The spectrum of the self-adjoint operator generated by the adjacency matrix of the graph is defined; the spectral measure is constructed; the eigenvectors and spectral expansion in eigenvectors are provided.

Проведено детальний спектральний аналіз зіркового графа з нескінченними променями. Охарактеризовано спектр самоспряженого оператора, породженого матрицею суміжності цього графа, побудовано спектральну міру, наведені у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.

## 1. Вступ

Теорія графів виникла із конкретних прикладних задач у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних, транспортних мереж, органічній хімії, квантовій механіці та ін. Сучасна теорія графів є самостійним, актуальним розділом математики, яка розв'язує ряд теоретичних та прикладних задач, використовуючи і збагачуючи аналітичні, алгебраїчні, топологічні методи та методи функціонального аналізу, лінійної алгебри, теорії чисел та теорії функцій.

Простим неорієнтованим графом $G$ називають пару $(V, E)$, у якій $V$ — деяка непорожня множина (множина вершин), а $E$ — множина,

---

Робота виконана в рамках проекту 03-01-12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

що складається з невпорядкованих пар різних вершин $V$ (множина ребер). З графом $G$ однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої $a_{ij}$ рівні 1, якщо вершини з номерами $i$ та $j$ з'єднуються ребром, або – 0, якщо таке ребро відсутнє.

У випадку зліченних графів матриця $A(G)$ породжує у гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор $\mathbb{A}$, спектр якого має дискретну $\sigma_p(G)$ та неперервну компоненту $\sigma_c(G)$, яка може бути абсолютно неперервною $\sigma_{ac}(G)$ або навіть чисто сингулярною $\sigma_{cs}(G)$ (див. [3]). Під спектральним аналізом графа $G$ розуміють спектральний аналіз оператора $\mathbb{A}$.

За останній час одержані чисельні результати про спектр зліченних графів, які знаходять застосування у теорії невід'ємних матриць, гармонічному аналізі дискретних груп, аналітичній теорії ймовірності тощо (див. [4], [5]).

## 2. Постановка задачі

Нехай $S(n,\infty)$ – зірковий граф, у якого всі n променів є нескінченними ланцюгами, з'єднаними в одній вершині – центрі зіркового графа (див. [2]). Матриця суміжності такого графа породжує обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де $V$ – множина вершин графа $S(n,\infty)$. Оператор $\mathbb{A}$ діє на вектор $x = (x_0, x_i^j) \in l_2(V)$ так

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{A}x)_0 = \sum_{j=1}^{n} x_1^j,\\
&(\mathbb{A}x)_i^j = x_{i-1}^j + x_{i+1}^j, x_0^j \equiv x_0,\ \text{для кожного } j = \overline{1,n} \text{ та } i \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут компоненти векторів $x$ та $\mathbb{A}x$ із простору $l_2(V)$, що відповідають центру зіркового графа, позначаємо нижнім індексом 0, а компоненти, що відповідають $i$-й вершині на $j$-му промені – нижнім індексом $i$ та верхнім індексом $j$.

Спектральний аналіз графа $S(n,\infty)$ зводиться до дослідження спектральних властивостей оператора $\mathbb{A}$ виду (1).

# 3. Зведення до якобієвих матриць

**Теорема 1.** *Оператор* $\mathbb{A}$ *виду* (1), *що відповідає зірковому графу* $S(n,\infty)$, *є обмеженим самоспряженим оператором у* $l_2(V)$. *Існує унітарний оператор* $\mathfrak{U}$ *такий, що*

$$\mathfrak{U}\mathbb{A}\mathfrak{U}^{-1} = J^{\sqrt{n}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{n-1},$$

*де* $J^{\sqrt{n}}$, $J_0$ *– матриці Якобі, визначені на просторі* $l_2$ *і мають вигляд*

$$J^{\sqrt{n}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{n} & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*та*

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Доведення.** Нехай $\{e_0, e_i^j\}_{j=1,i\in\mathbb{N}}^n$ – стандартний базис у просторі $l_2(V)$, пов'язаний із вказаною нумерацією вершин $V$ зіркового графа $S(n,\infty)$. Розглянемо дійсну унітарну матрицю $U = \|u_{ij}\|_{i,j=1}^n$, у якої перший рядок складається із чисел $\frac{1}{\sqrt{n}}$, тобто $u_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, \ldots n$. Оскільки матриця $U$ – дійсна і унітарна, то

$$\sum_{j=1}^{n} u_{kj} u_{mj} = \delta_{km},$$

де $\delta_{km}$ – символ Кронекера. Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 0 \quad \text{при } i = 2, \ldots n.$$

Розглянемо у просторі $l_2(V)$ новий базис $\{\widehat{e}_0, \widehat{e}_i^j\}_{j=1,i\in\mathbb{N}}^n$ такий, що

$$\widehat{e}_0 = e_0, \quad \widehat{e}_i^j = \sum_{k=1}^{n} u_{jk} e_i^k, \quad i \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \ldots n$$

Згідно з (1) оператор $\mathbb{A}$ діє на вихідний базис так:

$$\mathbb{A}e_0 = \sum_{j=1}^{n} e_1^j, \mathbb{A}e_i^j = e_{i-1}^j + e_{i+1}^j, \quad e_0^j \equiv e_0,$$

для кожного $j = \overline{1,n}$ та $i \in \mathbb{N}$.

Враховуючи зв'язок між новим та вихідним базисами, маємо

$$\mathbb{A}\widehat{e}_0 = \sqrt{n}\widehat{e}_1^1,\ \mathbb{A}\widehat{e}_1^1 = \sqrt{n}\widehat{e}_0 + \widehat{e}_2^1,\ \mathbb{A}\widehat{e}_i^1 = \widehat{e}_{i-1}^1 + \widehat{e}_{i+1}^1,$$
$$\mathbb{A}\widehat{e}_1^j = \widehat{e}_2^j,\ \mathbb{A}\widehat{e}_i^j = \widehat{e}_{i-1}^j + \widehat{e}_{i+1}^j$$

для кожного $j = \overline{2,n}$ та $i \geq 2$.

Таким чином, підпростір $H_1 \subset l_2(V)$ ізоморфний $l_2(\mathbb{N}_0)$, у якому вектори $\{\widehat{e}_0, \widehat{e}_1^1, \ldots, \widehat{e}_k^1, \ldots\}$ утворюють стандартний базис, є інваріантним для оператора $\mathbb{A}$, і $\mathbb{A}$ діє в $H_1$ як матриця $J^{\sqrt{n}}$. Підпростори $H_j$ з базисом $\{\widehat{e}_1^j, \ldots, \widehat{e}_k^j, \ldots\}$ при кожному $j = \overline{2,n}$, ізоморфні $l_2(\mathbb{N})$, є інваріантними для оператора $\mathbb{A}$, який в $H_j$ зводиться до матриць Якобі $J_0$. Оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_0, e_i^j\}_{j=1, i\in\mathbb{N}}^n$ у базис $\{\widehat{e}_0, \widehat{e}_i^j\}_{j=1,i\in\mathbb{N}}^n$, є унітарним, і задовольняє твердження теореми.

Теорема доведена.

## 4. Власне спектральний аналіз

Таким чином, спектральний аналіз зіркового графа $S(n,\infty)$ зводиться до дослідження спектральних властивостей матриць Якобі $J^{\sqrt{n}}$, $J_0$. Спектральний аналіз матриці $J_0$ добре відомий (див., наприклад [1]). Повний спектральний аналіз матриці $J^{\sqrt{n}}$ можна одержати за алгоритмом, наведеним у роботах [6], [7].

**Теорема 2.** *Матриця Якобі $J^{\sqrt{n}}$ породжує у просторі $l_2$ обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається із абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2,2]$, та при $n \geq 3$ ще із двох простих власних значень $\lambda_\pm = \mu_\pm + \mu_\pm^{-1}$, де $\mu_\pm = \pm 1/\sqrt{n-1}$, яким відповідають нормовані власні вектори вигляду*

$$e_\pm = \sqrt{\frac{n(n-2)}{2(n-1)}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \mu_\pm, (\mu_\pm)^2, \ldots, (\mu_\pm)^{k-1}, \ldots\right). \tag{2}$$

*При цьому кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор*

$$\varphi_\lambda = (\sqrt{n}P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda) - (n-1)P_0(\lambda), \ldots \\ \ldots, P_{k-1}(\lambda) - (n-1)P_{k-3}(\lambda), \ldots), \tag{3}$$

*де поліноми $P_k(\lambda)$ є поліномами степеня $k$ від $\lambda$, що виражаються у вигляді $P_k(\lambda) = U_k(\lambda/2)$ через поліноми Чебишева другого роду, де*

$$U_k(z) = \frac{\sin((k+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)}.$$

*Для поліномів $P_k(\lambda)$ вірне рекурентне співвідношення*

$$P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda)$$

*з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0,\ P_0(\lambda) = 1,\ P_1(\lambda) = \lambda$.*

*Справедливі розклад за приведеними власними векторами (3) та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю*

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi(n^2 - (n-1)\lambda^2)}$$

*неперервного спектру. Тобто, кожному вектору $x \in l_2$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x} = \mathfrak{F}x$ за власними векторами $e_\pm, \varphi_\lambda$ вигляду $\widetilde{x} = (x_+, x_-, \widetilde{x}(\lambda))$, де $x_\pm = (x, e_\pm)_{l_2}$ та $\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2}$. Вектор $\widetilde{x}$ належить гільбертовому простору $\mathfrak{H} = E^2 \oplus L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda)$, де $E^2$ – двовимірний евклідів простір, а $L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda)$ – простір функцій, квадратично інтегрованих на відрізку $[-2,2]$ за мірою $\rho(\lambda)d\lambda$.*

*Вірне обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $\mathfrak{H}$ :*

$$x = \mathfrak{F}^{-1}\widetilde{x}(\lambda) \equiv x_+e_+ + x_-e_- + \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_\lambda\rho(\lambda)d\lambda \tag{4}$$

*Для довільних $x, y \in l_2$ справедлива рівність Парсеваля:*

$$(x,y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{\mathfrak{H}} \equiv x_+y_+ + x_-y_- + \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\widetilde{y}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{5}$$

**Доведення.** Матриця Якобі $J^{\sqrt{n}}$ породжує у просторі $l_2(\mathbb{N}_0)$ обмежений самоспряжений оператор, який будемо позначати тією ж літерою $J^{\sqrt{n}}$. Оператор $J^{\sqrt{n}}$ діє на вектор $x = (x_0, x_1, \ldots) \in l_2(\mathbb{N}_0)$ так

$$J^{\sqrt{n}}x = (\sqrt{n}x_1, \sqrt{n}x_0 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_{k-1} + x_{k+1}, \ldots) \tag{6}$$

Із вигляду оператора $J^{\sqrt{n}}$ випливає, що вектори $e_{\pm}$, що відповідають власним значенням $\lambda_{\pm}$, є його власними векторами, і для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ функція $\varphi_\lambda$ задовольняє ріність $J^{\sqrt{n}}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Легко перевірити, що $(e_{\pm}, \varphi_\lambda)_{l_2} = 0$. Вектор $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$ буде ортогональним до $e_{\pm}$ тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_{\pm})^k x_k = 0 \tag{7}$$

Розглянемо перетворення Фур'є за власними векторами $e_{\pm}, \varphi_\lambda$. Враховуючи явний вигляд узагальненої власної функції $\varphi_\lambda$, для $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$ маємо

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(\lambda) &= (x, \varphi_\lambda)_{l_2} = \\ &= (\sqrt{n}x_0 - (n-1)x_2)P_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - (n-1)x_{k+2})P_k(\lambda) \end{aligned} \tag{8}$$

Рівність (8) можна розглядати як розклад вектора $\widetilde{x}(\lambda)$ за ортонормованою системою поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L_2([-2, 2], \rho_0(\lambda)d(\lambda))$, де $\rho_0(\lambda) = (2\pi)^{-1}\sqrt{4 - \lambda^2}$. Тому

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)P_k(\lambda)\rho_0(\lambda)d\lambda = \begin{cases} \sqrt{n}x_0 - (n-1)x_2, & \text{якщо } k = 0 \\ x_k - (n-1)x_{k+2}, & \text{якщо } k \geq 1 \end{cases} \tag{9}$$

Домножимо вираз (9) на $\mu_{\pm}^k$ і просумуємо за $k$. У випадку, коли $x \perp e_{\pm}$ і виконуються рівності (7), аналогічно, як у [6], із врахуванням факту, що функція

$$\frac{1}{1 - \mu\lambda + \mu^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k(\lambda)$$

є твірною для системи поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$, отримуємо

$$x_k = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_{\lambda,k}\rho(\lambda)d\lambda, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{10}$$

Таким чином, кожний вектор $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$, ортогональний до $e_\pm$, розкладається за узагальненими власними векторами $\varphi_\lambda$ зі спектральною мірою $\rho(\lambda)d\lambda$, що є абсолютно неперервною відносно міри Лебега на інтервалі $[-2, 2]$. Тому спектр оператора $J^{\sqrt{n}}$ містить однократну абсолютно неперервну компоненту, що збігається з інтервалом $[-2, 2]$, та при $n \geq 3$ прості власні значення

$$\lambda_\pm = \pm\frac{n}{\sqrt{n-1}}.$$

Оскільки $e_\pm \perp \varphi_\lambda$, тоді для довільного $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$ вектор $y = x - x_+e_+ - x_-e_-$ ортогональний $e_\pm$ та

$$\widetilde{y}(\lambda) = (x - x_+e_+ - x_-e_-, \varphi_\lambda) = \widetilde{x}(\lambda).$$

Із вигляду виразу (10) маємо

$$y = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_\lambda\rho(\lambda)d\lambda,$$

що еквівалентно (4).

Рівність Парсеваля (5) отримуємо із рівності Парсеваля для векторів $x \perp e_\pm$ за узагальненими власними функціями $\varphi_\lambda$, оскільки система поліномів $\{\varphi_{\lambda,k}\}_{k=0}^{\infty}$ утворює ортонормований базис у просторі $L_2([-2, 2], \rho(\lambda)d(\lambda))$.

Теорема доведена.

## 5. Висновок

Із теорем 1,2 випливає, що спектр зіркового графа $S(n, \infty)$ складається із $n$-кратної абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2, 2]$, а при $n \geq 3$ ще із двох простих власних значень

$$\lambda_\pm = \pm\frac{n}{\sqrt{n-1}}.$$

Робота виконана в рамках проекту 03-01-12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці"спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Автор висловлює щиру подяку Л.П.Нижнику та Ю.С.Самойленку за конструктивні зауваження.

## Література

[1] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 798 с.

[2] *Москалёва Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов. – Киев: Центр учебной литературы, 2007. – 114 с.

[3] *Simon B.* Szego's Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for L2 Perturbations of Orthogonal Polynomials. – Princeton, NY: Princeton University Press, 2011. – xii+650 p.

[4] *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra Appl. – 1982. – **48**. – P. 245–256.

[5] *Joachim von Below.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431** – P. 1–19.

[6] *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем //Наукові записки НаУКМА. – 2013. – **139**. – С. 18–22.

[7] *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем // Доповіді НАН України. – 2014. – № 3. – С. 29–35.