Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 233–248

УДК 517.956.4

В. А. Літовченко, О. Б. Васько

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Задача Коші для вироджених параболічних систем типу Колмогорова у вагових просторах Лебега

VladLit4@mail.ru, LeNastasiy@ukr.net

We establish solvability of the Cauchy problem for a class of vector order degenerate parabolic systems of Kolmogorov type equations in weighted L_p spaces. The elements of these spaces can have exponential growth of certain order in the neighborhood of an infinitely distant points.

Для одного класу вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова векторного порядку встановлено розв'язність задачі Коші у вагових просторах Лебега, елементи яких можуть мати експоненціальний ріст певного порядку в околі нескінченно віддалених точок.

1. Вступ

Класичне рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [1] є прототипом цілої сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у теорії дифузійних процесів, кінетичній теорії газу, при вивчені руху матеріальних точок у полі сил, при досліджені математичних моделей опціонів тощо. Воно послужило поштовхом до зародження теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, у розвитку якої взяло участь багато як зарубіжних, так і вітчизнянних математиків (див. [2] і наведену там літературу). Розвиток відбувався в основному шляхом розширення відомих та означення нових класів рівнянь такого типу, а також побудови й дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші та його можливих застосувань.

Значно менше уваги приділено дослідженню систем таких рівнянь [3]. Це насамперед пов'язано із значними труднощами, які полягають у побудові та дослiджені фундаменальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для вироджених параболічних систем типу Колмогорова, навіть у випадку коефіцієнтів групи старших членів, залежних лише від часової змінної t. Оскільки наявність виродження параболічності у такій системі призводить до того, що коефіцієнти відоповідної системи в образах Фур'є на характеристиках уже не володіють умовою рівномірної неперервності по t стосовно просторової змінної, що, зокрема, потребує відповідного розвинення класичних засобів теорії параболічних систем рівнянь із частинними похідними.

У [4] означено клас $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ вироджених $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем типу Колмогорова із коефіцієнтами, залежними лише від змінної t, який охоплює системи, розглянуті в [3], та клас $\mathbb{E}^0_{23}$ рівнянь із [2]. Для таких систем побудовано ФМРЗК та досліджено її основні властивості в рамках просторів типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є.

У даній статті частково поширюються одержані в [2] результати про коректну розв'язність задачі Коші у вагових просторах Лебега для рівнянь із класу $\mathbb{E}^0_{23}$ на випадок систем рівнянь із $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$.

2. Постановка задачі

Нехай $\mathbb{N}_m := \{1;\dots;m\}$, $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{Z}^m_+$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, якщо $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$;

$$|(a_{lj})^{m,k}_{l,j=1}| := \max_{l\in\mathbb{N}_m,\ j\in\mathbb{N}_k} |a_{lj}|;$$

$z^l := z_1^{l_1}\dots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1}\dots|z_m|^{l_m}$, якщо $z := (z_1;\dots;z_m) \in \mathbb{C}^m$, $l := (l_1;\dots;l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$; $\overrightarrow{\gamma} := (\gamma_1;\dots;\gamma_m)$ - m-вимірний вектор, $\overrightarrow{0} := (0;\dots;0)$, $\overrightarrow{1} := (1;\dots;1)$; запис $\overrightarrow{\alpha}\mho\overrightarrow{\beta}$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\overrightarrow{\alpha}$ і $\overrightarrow{\beta}$, при цьому якщо $q := (q_1; \ldots; q_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma}\} \subset \mathbb{R}^m$, то $q^{q\overrightarrow{\gamma}} := q_1^{q_1\gamma_1} \ldots q_m^{q_m\gamma_m}$; $|\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{\gamma}} := |\alpha_1|^{\gamma_1} + \ldots + |\alpha_m|^{\gamma_m}$, $|\overrightarrow{\alpha}|_+ := |\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{1}}$ — скалярні величини (якщо $\overrightarrow{\alpha}$ — мультиіндекс чи просторова змінна, то замість $\overrightarrow{\alpha}$ будемо писати α).

Позначимо через $x := (x_1; x_2; x_3)$ n-вимірну просторову змінну, де $x_j := (x_{j1}; \ldots; x_{jn_j})$, $j \in \mathbb{N}_3$, n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$. У зв'язку з цим, мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ будемо записувати у вигляді $k := (k_1; k_2; k_3)$, де $k_j := (k_{j1}; \ldots; k_{jn_j})$, $j \in \mathbb{N}_3$. Якщо $x = (x_1; x_2; x_3)$ і $x_j := (x_{j1}; \ldots; x_{jn_j})$ є точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то

$$x'_j := (x_{j1}; \ldots; x_{jn_3}), \quad x''_j := (x_{j(n_3+1)}; \ldots; x_{jn_2}),$$
$$x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}; \ldots;\ x_{1n_1}), \quad \hat{x}_1 := (x_{11}; \ldots; x_{1n_2}),$$
$$\tilde{x} := (x'''_1; x''_2; x_3).$$

Ці позначення будемо використовувати і для інших подібних точок і векторів.

Далі використовуємо такі позначення:

$$\overrightarrow{2b} := (2b_1; \ldots; 2b_{n_1});$$
$$\Pi_K^m := \{(t; x) : t \in K \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m\};$$
$$X(t) := (X_1(t); X_2(t); X_3(t)) = (x_1; x_2 + t\widehat{x}_1; x_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1),$$
$$t \geq 0, \quad x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^n;$$
$$d(t; x; \xi) := \sum_{r=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_r}\left(|X_{rj}(t) - \xi_{rj}|t^{1-r-\frac{1}{2b_j}}\right)^{\alpha_j},$$
$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \alpha_j := \frac{2b_j}{2b_j - 1}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1};$$
$$M := \left|\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right|_+ + \left|\big(\widehat{\overrightarrow{1} + \overrightarrow{1}}/\overrightarrow{2b}\big)\right|_+ + \left|\big(\overrightarrow{2} + \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\big)'\right|_+,$$
$$M_{lq} := \left|(l_1 + q_1)/\overrightarrow{2b}\right|_+ + \left|\big(\widehat{\overrightarrow{1} + \overrightarrow{1}}/\overrightarrow{2b}\big)\big(l_2 + q_2\big)\right|_+ +$$
$$+\left|\big(\overrightarrow{2} + \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\big)'\big(l_3 + q_3\big)\right|_+, \quad \{l, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n;$$
$$[x, \xi] := \sum_{r=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_r}|x_{rj}||\xi_{rj}|^{\alpha_j}, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

При довільно фіксованих $T > 0$ і натуральному m розглянемо систему рівнянь

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right)u(t;x) = \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \tag{1}$$

з класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ [4], тобто систему, в якій $u := \mathrm{col}(u_1;\dots;u_m)$, а

$$\mathbb{A}(t;\partial_{x_1}) :=$$

$$\left(a_{lj}(t;i\partial_{x_1}) := a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1} + \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+<1} a_{k_1}^{lj}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1}\right)_{l,j=1}^m$$

— матричний диференціальний вираз, коефіцієнти $a_0^{lj}(\cdot), a_{k_1}^{lj}(\cdot)$ і a_{k_1} якого неперервні на $[0;T]$ комплекснозначні функції такі, що відповідний диференціальний вираз $\partial_t - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$ є $\overrightarrow{2b}$-параболічним на множині $\Pi^{n_1}_{(0;T]}$ [2].

У [4] побудовано ФМРЗК $G(t,x;\tau;\xi)$ для системи (1) у вигляді

$$G(t,x;\tau,\xi) := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(y,\xi)} \exp\{-i(y,\rho_0(\tau;s_{t.y};\tilde{y}))\}\Theta^t_\tau(s_{t,y};\tilde{y})dy,$$

де $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$,

$$\Theta^t_\tau(s_{t,y};\tilde{y}) := E + \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \dots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{A}(t_j;\rho_0(\tau;s_{t.y};\tilde{y}))\right),$$

E — одинична матриця порядку m, $\mathcal{A}(t;\cdot)$ — матричний символ відповідного матричного диференціального виразу $\mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$ системи (1), а $\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}) := (\xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'' + (t-\tau)^2\xi_3/2, \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'', \xi_1'''; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3)$ — n-вимірна вектор-функція. Досліджено її основні властивості, зокрема, встановлено диференційовність $G(t,x;\tau;\xi)$ за змінною t, нескінченну диференційовність за кожною із просторових змінних x і ξ та правильність оцінок

$$\left|\partial_x^q \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$
$$\le cA^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\beta}} B^{|l|_+} l^{l\overrightarrow{\beta}} (t-\tau)^{-M-M_{lq}} \exp\{-\eta d(t-\tau;x;\xi)\},$$

$$\left|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)\right| \leq c(t-\tau)^{-M-1}\exp\{-\eta d(t-\tau;x;\xi)\}, \tag{2}$$

при $0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n,\ \{q,l\} \in \mathbb{Z}_+^n$, з додатними оціночними сталими A, B, c і η, незалежними від t, τ, x, ξ, q і l.

Середовищем дослідження задачі Коші для системи (1) тут слугуватимуть векторні аналоги $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{s}(t)}$ і $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$ просторів $L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $L_p^{\overrightarrow{s}(t)}$ та $L_p^{\overrightarrow{a}}$ відповідно, визначених у [2].

Коротко нагадаємо означення цих просторів та наведемо важливі для подальшого факти з [2]. Для цього розглянемо наступні набори функцій:

$$\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}) := (k_{11}(t;a_{11});...;k_{1n_1}(t;a_{1n_1});k_{21}(t;a_{21});...;$$

$$k_{2n_2}(t;a_{2n_2});k_{31}(t;a_{31});...;k_{3n_3}(t;a_{3n_3})),$$

$$\overrightarrow{s}(t) := (s_{11}(t);...;s_{1n_1}(t);s_{21}(t);...;s_{2n_2}(t);s_{31}(t);...;s_{3n_3}(t));$$

$$k_{lj}(t;a_{lj}) := \eta_0 a_{lj}(\eta_0^{2b_j-1} - a_{lj}^{2b_j-1}t^{2b_j(l-1)+1})^{1-\alpha_j},\ j \in \mathbb{N}_{n_l},\ l \in \mathbb{N}_3;$$

$$s_{1j}(t) := k_{1j}(t;a_{1j}) + 2^{\alpha_j-1}\theta(n_2-j)t^{\alpha_j}k_{2j}(t;a_{2j}) +$$

$$+2^{\alpha_j-2}\theta(n_3-j)t^{2\alpha_j}k_{3j}(t;a_{3j}),\ j \in \mathbb{N}_{n_1};$$

$$s_{2j}(t) := 2^{\alpha_j-1}k_{2j}(t;a_{2j}) + 4^{\alpha_j-1}\theta(n_3-j)t^{\alpha_j}k_{3j}(t;a_{3j}),\ j \in \mathbb{N}_{n_2};$$

$$s_{3j}(t) := 4^{\alpha_j-1}k_{3j}(t;a_{3j}),\ j \in \mathbb{N}_{n_3},\ t \leq T,$$

де $\eta_0 \in (0;\eta)$, η —константа з оцінки (2), $\theta(z) = 1$ для $z \geq 0$ і $\theta(z) = 0$ для $z < 0$; $\overrightarrow{a} := (a_{11};...;a_{1n_1};a_{21};...;a_{2n_2};a_{31};...;a_{3n_3})$ — n-вимірний вектор з такими додатними координатами, що

$$\min_{j\in\mathbb{N}_{n_l}, l\in\mathbb{N}_3}\left(\frac{\eta_0}{a_{lj}}\right)^{\frac{2b_j-1}{2b_j(l-1)+1}} > T.$$

Функції $\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})$ мають наступні властивості:

1) $k_{lj}(t;a_{lj}) \geq a_{lj},\ t \in (0;T],\ j \in \mathbb{N}_{n_l},\ l \in \mathbb{N}_3$;

2) $\overrightarrow{k}(0;\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$;

3) $k_{1j}(t-\tau;k_{1j}(\tau;a_{1j})) = k_{1j}(t;a_{1j}),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ j \in \mathbb{N}_m$;

4) $k_{rj}(t-\tau;k_{rj}(\tau;a_{rj})) \leq k_{rj}(t;a_{rj}),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ j \in \mathbb{N}_{n_r},\ r \in \{2;3\}$.

Крім цього,

$$[\overrightarrow{a},\xi]-\eta_0 d(t;x;\xi)\leq[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}),X(t)],\ t\in(0;T],\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Нехай p — натуральне число, а $v(t;x)$, $(t;x)\in\Pi^n_{[0;T]}$, — комплекснозначна функція, вимірна за змінною x при кожному $t\in[0;T]$. Для довільного $t\in[0;T]$ покладемо

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})}:=\|v(t;x)\cdot\exp\{-[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}),X(t)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)}:=\|v(t;x)\cdot\exp\{-[\overrightarrow{s}(t),x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $L_p(\mathbb{R}^n)$ — відповідний простір Лебега. Тоді простори $L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$ і $L_p^{\overrightarrow{s}(t)}$, $t\in[0;T]$, $p\geq 1$, означуються як сукупності усіх вимірних стосовно просторової змінної функцій $\varphi:\ \mathbb{R}^n\times[0;T]\longrightarrow\mathbb{C}$, для яких скінченими є норми $\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})}$ та $\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{s}(T)}$ відповідно при кожному фіксованому $t\in[0;T]$, а $L_p^{\overrightarrow{a}}:=L_p^{\overrightarrow{k}(0,\overrightarrow{a})}$.

Для елементів $v(t;\cdot)\in L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$ і $\varphi(\cdot)\in L_p^{\overrightarrow{a}}$ виконуються співвідношення:

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)}\leq\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})},\ \|\varphi(\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)}\leq\|\varphi(\cdot)\|_p^{\overrightarrow{a}},\ t\in[0;T],\ p\geq 1.$$

Надалі також використовуватимемо простір $L_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p\geq 1$, який складається з усіх вимірних стосовно змінної x функцій $\varphi:\ \mathbb{R}^n\times[0;T]\longrightarrow\mathbb{C}$ із скінченною нормою

$$\|\varphi(t;\cdot)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}:=\left\|\varphi(t;x)\cdot\frac{\exp\{-[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}),X(t)]\}}{(1+\|\hat{x}_1\|+\|x_2'\|)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\ t\in[0;T].$$

Оскільки

$$\|\varphi(t;\cdot)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}\leq\|\varphi(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})},\ t\in[0;T],\ p\geq 1,$$

то правильними є неперервні вкладення

$$L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}\subset L_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})},\ t\in[0;T],\ p\geq 1.$$

Означення. Вектор-функцію $u(t;x)$ називатимемо *розв'язком системи (1) у просторі* $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, якщо

$$\|P(t,x;\partial_x)u(t;x)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} = 0,\ t \in (0;T],$$

де $P(t,x;\partial_x)$ — відповідний матричний диференціальний вираз системи (1), тобто

$$P(t,x;\partial_x) := \left\{\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right\}E - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1}).$$

3. Дослідження задачі Коші

При побудові ФМРЗК для системи (1) та її дослідженні у [4], фактично встановлено, що вектор-функція

$$u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n, \tag{4}$$

є звичайним розв'язком системи (1) для кожної неперервної вектор-функції $\varphi(\cdot)$, з компонентами, які є швидко спадними функціями в околі нескінченно віддалених точок, причому $\varphi(\cdot)$ є граничним значенням цього розв'язку при $t \to +0$.

Скористаємося структурою (4) розв'язку u системи (1) для розширення класу граничних значень $\varphi(\cdot)$. Для цього розглянемо вектор-функцію u, що визначається рівністю (4) з $\varphi(\cdot) \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p \geq 1$, та дослідимо її властивості.

Зваживши на оцінку (2), дістанемо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right| \leq ct^{-M_{l0}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M}|\varphi(\xi)|\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\eta+\eta_0}{2}d(t;x;\xi) + [\overrightarrow{a},\xi]\right\}\exp\left\{-\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t;x;\xi) - [\overrightarrow{a},\xi]\right\}d\xi. \tag{5}$$

Звідси, врахувавши нерівність (3), при $p = 1$ маємо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right| \leq ct^{-M_{l0}}\exp\left\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}), X(t)]\right\}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| \exp\Big\{ -[\overrightarrow{a}, \xi]\Big\} \exp\{-(\eta-\eta_0) d(t;x;\xi)\} t^{-M} d\xi, \qquad (6)$$

і, оскільки $\exp\{-(\eta-\eta_0)d(t;x;\xi)\} \leq 1,\ \eta_0 < \eta$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi \right| \leq c_1 t^{-M-M_{l0}} \exp\Big\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}), X(t)]\Big\} \|\varphi\|_1^{\overrightarrow{a}}, \qquad (7)$$

для $(t;x) \in \Pi^n_{(0;T]},\ l \in \mathbb{Z}^n_+$.

Нехай тепер $p > 1$, тоді скориставшись нерівністю Гельдера і тим, що для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\{-\delta d(t;x;\xi)\} d\xi = C,\ \delta > 0, \qquad (8)$$

із (5) одержуємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_n} \partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi \right| \leq$$

$$\leq ct^{-M_{l0}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\Big\{ -q\frac{\eta+\eta_0}{2} d(t;x;\xi) + q[\overrightarrow{a}, \xi]\Big\} d\xi \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\{-p[\overrightarrow{a}, \xi]\} t^{-M} \exp\Big\{ -p\frac{\eta-\eta_0}{2} d(t;x;\xi)\Big\} d\xi \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq ct^{-M_{l0}} \exp\Big\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}), X(t)]\Big\} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{ -q\frac{\eta-\eta_0}{2} d(t;x;\xi)\Big\} t^{-M} d\xi \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\Big\{-p[\overrightarrow{a}, \xi]\Big\} t^{-M} \exp\Big\{ -p\frac{\eta-\eta_0}{2} d(t;x;\xi)\Big\} d\xi \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\Big\{-p[\overrightarrow{a}, \xi]\Big\} t^{-M} \exp\Big\{ -p\frac{\eta-\eta_0}{2} d(t;x;\xi)\Big\} d\xi \right)^{1/p} \times$$

$$\times t^{-M_{l0}}\exp\Big\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}), X(t)]\Big\}, \quad \eta_0 < \eta, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{9}$$

а, відтак, приходимо до оцінки

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big| \le c_3 t^{-\frac{M}{p}-M_{l0}}\exp\Big\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}), X(t)]\Big\}\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}}, \tag{10}$$

у якій $(t;x)\in\Pi^n_{(0;T]}$ і $l\in\mathbb{Z}^n_+$.

Нерівності (7), (10) забезпечують рівномірну збіжність інтеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi$ стосовно змінної x на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ при кожному фіксованому $t\in(0;T]$ і $l\in\mathbb{Z}^n_+$, тому вектор-функція $u(t;\cdot)$, $t\in(0;T]$, є нескінченно-диференційовною стосовно просторової змінної у кожній точці простору $\mathbb{R}^n$, причому справджується рівність

$$\partial_x^l u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \varphi\in\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}, \ p\ge 1,$$

для всіх $(t;x)\in\Pi^n_{(0;T]}$, $l\in\mathbb{Z}^n_+$.

Безпосередньо з оцінок (6), (9) та рівності (8) одержуємо також, що

$$\|\partial_x^l u(t;x)\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})} \le ct^{-M_{l0}}\times$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\Big\{-p[\overrightarrow{a},\xi]\Big\}t^{-M}\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t;x;\xi)\Big\}d\xi\right)dx\right)^{1/p} =$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\Big\{-p[\overrightarrow{a},\xi]\Big\}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}t^{-M}\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t;x;\xi)\Big\}dx\right)d\xi\right)^{1/p}\times$$

$$ct^{-M_{l0}} = c_0 t^{-M_{l0}}\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}}, \ t\in(0;T], \ l\in\mathbb{Z}^n_+, p\ge 1.$$

Зокрема, при $l=0$ маємо

$$\|u(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})} \le c\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}}, \ p\ge 1, \ t\in(0;T], \tag{11}$$

тобто $u(t;\cdot)\in\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $t\in(0;T]$.

Крім цього,

$$\|x_{l_j}\partial_{x_{(l+1)j}}u(t;x)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})} \leq$$

$$\leq ct^{-M_{1,0}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\Big\{-p[\overrightarrow{a},\xi]\Big\}t^{-M}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t;x;\xi)\Big\}d\xi\right)dx\right)^{1/p} = c_0t^{-M_{1,0}}\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}},$$

для всіх $t\in(0;T]$, $p\geq 1$, $j\in\mathbb{N}_{n_{(l+1)}}$ і $l\in\mathbb{N}_2$.

Далі, з'ясуємо диференційовність функції u стосовно змінної t.

З оцінки (2) випливає, що

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_tG(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right| \leq ct^{-1}\exp\Big\{[\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a}),X(t)]\Big\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\Big\{-p[\overrightarrow{a},\xi]\Big\}t^{-M}\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t;x;\xi)\Big\}d\xi\right)^{1/p},$$

при $\eta_0<\eta$, $(t;x)\in\Pi^n_{(0;T]}$ і $p\geq 1$.

Звідси вже, розмірковуючи як у випадку диференційовності u стосовно просторової змінної, приходимо до існування ∂_tu у кожній точці проміжку $(0;T]$ такої, що

$$\partial_tu(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_tG(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi \;\text{ і }\; \|\partial_tu(t;x)\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})} \leq c_3t^{-1}\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}},$$

для всіх $\varphi\in\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p\geq 1$, $x\in\mathbb{R}^n$ і $t\in(0;T]$.

Попередні міркування обгрунтовують правильність наступного допоміжного твердження.

Лема 1. *Нехай $\varphi\in\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p\geq 1$, тоді матричний диференціальний оператор $P(t,x;\partial_x)$ коректно визначений у сенсі топології простору $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{a}}$, $p\geq 1$, на відповідній вектор-функції u з (4), як елементі цього простору, причому $P(t,x;\partial_x)u(t;\cdot)\in\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p\geq 1$, $t\in(0;T]$.*

Основний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Якщо* $\varphi \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p \geq 1$, *то відповідна вектор-функція* u, *що визначається рівністю (4), є розв'язком системи (1) у просторі* $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $t \in (0;T]$, *для якого виконується граничне співвідношення*

$$\|u(t;\cdot) - \varphi\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{12}$$

Доведення. Згідно з твердженням леми 1 і тим, що G є розв'язком системи (1), при $p \geq 1$ і $t \in (0;T]$ маємо

$$\|P(t,x;\partial_x)u(t;\cdot)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} =$$
$$= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(t,x;\partial_x)G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi \right\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} = 0,$$

тобто зазначена вектор-функція $u(t;\cdot)$ є розв'язком системи (1) у просторі $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $t \in (0;T]$.

Доведемо співвідношення (12) користуючись схемою з [2].

Для $R > 0$ покладемо

$$B_R := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{r=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_r} |x_{rj}|^{\alpha_j} \right)^{1/\alpha'} \leq R \right\},\ \alpha' = \max_{j \in \mathbb{N}_{n_1}} \{\alpha_j\}$$

і розглянемо допоміжну фінітну вектор-функцію

$$\varphi^R(x) := \begin{cases} \varphi(x),\ x \in B_R, \\ 0,\ x \in \mathbb{R}^n \backslash B_R. \end{cases}$$

Тоді

$$\|u(t;\cdot) - \varphi\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \varphi(\cdot) \right\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq$$

$$\leq \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi^{(R)}(\xi))d\xi \right\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} +$$

$$+ \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(\cdot) \right\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} +$$

$$+\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\overrightarrow{s}(t)}, \quad t \in (0;T].$$

Згідно з оцінкою (11) маємо, що

$$\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi^{(R)}(\xi))d\xi \Big\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq$$

$$\leq \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi^{(R)}(\xi))d\xi \Big\|_p^{\overrightarrow{k}(t;\overrightarrow{a})} \leq$$

$$\leq c\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\overrightarrow{a}}, \quad t \in (0;T].$$

Тоді

$$\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \varphi(\cdot) \Big\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq (c+1)\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\overrightarrow{a}} +$$

$$+\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(\cdot) \Big\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq$$

$$\leq (c+1)\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\overrightarrow{a}} + I^{1/p}, \quad t \in (0;T],$$

де

$$I^{1/p} := \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(\cdot) \Big\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in (0;T].$$

Зафіксуємо довільно $\varepsilon > 0$ і виберемо $R > 0$ так, щоб

$$\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\overrightarrow{a}} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\varphi(x)|^p \exp\{-p[\overrightarrow{a}, x]\}dx \Bigg)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2(c+1)}.$$

Встановимо існування такого $\delta \in (0;T]$, що для будь-якого $t \in (0;\delta)$ виконується нерівність

$$I^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Для цього подамо I у вигляді $I = I_1 + I_2$, де

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \Big| \int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi \Big|^p dx,$$

$$I_2 := \int\limits_{B_{2R}} \Big| \int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi) - \varphi^{(R)}(x) d\xi \Big|^p dx.$$

Якщо $p = 1$, то

$$I_1 \leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \left(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)| t^{-M} \exp\{-\eta d(t,x;\xi)\} d\xi \right) dx =$$

$$= c \int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} t^{-M} \exp\{-\eta d(t,x;\xi)\} dx \right) d\xi.$$

Звідси, врахувавши існування такого числа $\delta_0 \in (0;1)$, що для довільних $t \in (0;\delta_0), x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ і $\xi \in B_R$ справджується нерівність [2]

$$d(t;x;\xi) \geq t^{1-\alpha''} \left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'}, \quad \alpha'' := \min_{j \in \mathbb{N}_{n_1}} \{\alpha_j\}, \tag{14}$$

а також, зваживши на рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\{-\eta_0 d(t;x;\xi)\} dx = C,$$

яка виконується для всіх $t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n$, отримаємо, що

$$I_1 \leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi^{(R)}(\xi)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\left\{ -(\eta - \eta_0) t^{1-\alpha''} \left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\{-\eta_0 d(t,x;\xi)\} dx \right) d\xi = c \exp\Big\{ -(\eta-\eta_0) t^{1-\alpha''} \left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'} \Big\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi^{(R)}(\xi)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\{-\eta_0 d(t,x;\xi)\} dx \right) d\xi =$$

$$= c_1 \exp\Big\{ - \frac{(\eta-\eta_0)}{t^{\alpha''-1}} \left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'} \Big\} \|\varphi^{(R)}\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^n)}, \qquad t \in (0;\delta_0). \tag{15}$$

Нехай тепер $p > 1$. Застосувавши оцінки (2), (14) і нерівність Гельдера, для $t \in (0;\delta_0)$ та $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ маємо

$$\Big| \int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi) d\xi \Big| \leq$$

$$\le c\Big(\int\limits_{B_R} t^{-M}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p \exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t,x;\xi)\Big\}d\xi\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{B_R} t^{-M}\exp\Big\{-q\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t,x;\xi)\Big\}\exp\{-q\eta_0 d(t,x;\xi)\}d\xi\Big)^{1/q}\le$$

$$\le c\Big(\int\limits_{B_R} t^{-M}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p \exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t,x;\xi)\Big\}d\xi\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{\eta-\eta_0}{2t^{\alpha''-1}}\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'}\Big\}\Big(\int\limits_{B_R} t^{-M}\exp\{-q\eta_0 d(t,x;\xi)\}d\xi\Big)^{1/q}=$$

$$=c_1\exp\Big\{-\frac{\eta-\eta_0}{2t^{\alpha''-1}}\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'}\Big\}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{B_R}\frac{|\varphi^{(R)}(\xi)|^p}{t^M}\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2}d(t,x;\xi)\Big\}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Звідси знаходимо, що

$$I_1=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}\Big|\int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi\Big|^p dx\le$$

$$\le c\exp\Big\{-p\frac{\eta-\eta_0}{2t^{\alpha''-1}}\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha'}\Big\}\cdot\|\varphi^{(R)}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)},\quad t\in(0;\delta_0). \tag{16}$$

Оцінимо тепер інтеграл I_2.

Нехай $\varphi_h^{(R)}$ — середня вектор-функція для $\varphi^{(R)}$ [5]. Із властивостей середніх функцій випливає, що

$$\|\varphi^{(R)}-\varphi_h^{(R)}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Оскільки $\varphi_h^{(R)}$ — нескінченно-диференційовна фінітна вектор-функція, то при фіксованому $h>0$ рівномірно за $x\in B_{2R}$ виконується співвідношення

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi_h^{(R)}(x)\Big|\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Звідси, врахувавши, що

$$I_2^{1/p} \le \Bigg(\int\limits_{B_{2R}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\varphi^{(R)}(\xi) - \varphi_h^{(R)}(\xi))d\xi \Bigg|^p dx \Bigg)^{1/p} +$$

$$+\Bigg(\int\limits_{B_{2R}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi_h^{(R)}(x) \Bigg|^p dx \Bigg)^{1/p} +$$

$$+\Bigg(\int\limits_{B_{2R}} |\varphi_h^{(R)}(x) - \varphi^{(R)}(x)|^p dx \Bigg)^{1/p},$$

а також, оцінку

$$\Bigg| \int\limits_{B_{2R}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\varphi^{(R)}(\xi) - \varphi_h^{(R)}(\xi))d\xi \Bigg|^p dx \Bigg|^{1/p} \le$$

$$\le c\, \|\varphi^{(R)} - \varphi_h^{(R)}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)},$$

яка одержується подібним способом до (11), приходимо до існування такої сталої $\delta_1 > 0$, що для довільного $t \in (0;\delta_1)$ виконується оцінка

$$I_2 < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Нерівності (15), (16) і додатність числа $\alpha''-1$ гарантують існування константи $\delta_2 > 0$ такої, що для довільних $t \in (0;\delta_2)$ справджується нерівність

$$I_1 < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Отже, оцінка (13) виконується при $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta \in (0;T)$ таке, що для довільних $t \in (0;\delta)$ справджується нерівність

$$\Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\cdot;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \varphi(\cdot) \Bigg\|_p^{\vec{s}(t)} < \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Література

[1] *Kolmogoroff A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, P. 116–117.

[2] *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. — Basel: Birkhäuser, 2004. – 387 p.

[3] *Малицька Г.П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №12. – С. 1650–1663.

[4] *Литовченко В.А., Настасий О.Б.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. матем. журн. – 2012. – **53**, №1. – С. 148–164.

[5] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.