Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 268–273

УДК 517.926+517.927.2

В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке

mikhailets@imath.kiev.ua, anna0024@i.ua

We introduce and investigate boundary-value problems generalized by a system of m linear ordinary differential equations of the first order and boundary-value conditions of the form $By = c$, where the linear operator $B : C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m$ is continuous, whereas m and n are positive integers. The Fredholm property is proved for such problems. We find sufficient and necessary conditions under which these problems are well-posed.

В работе вводятся и исследуются краевые задачи, порожденные системой m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и краевыми условиями вида $By = c$, где линейный непрерывный оператор $B : C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m$, а m, n — натуральные числа. Доказана фредгольмовость таких краевых задач. Найдены необходимые и достаточные условия их корректной разрешимости.

Пусть числа $m, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим на конечном интервале (a, b) векторное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + A(t)y = f(t), \tag{1}$$

где комплекснозначные $(m \times m)$–матрица-функция $A(\cdot)$ и вектор-функция $f(\cdot)$ суммируемы на отрезке $[a, b]$. Каждое решение дифференциального уравнения (1) принадлежит пространству абсолютно непрерывных вектор-функций $AC\,([a, b], \mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением (1) неоднородное краевое условие

$$By = c, \tag{2}$$

Исследование первого автора было поддержано грантом 03-01-12 совместных проектов НАН Украины и СО РАН.

где вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а линейный непрерывный оператор

$$B : C\left([a, b], \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Известно (см., например, [1]), что такой оператор допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \int\limits_a^b [d\Phi(t)]\, y(t), \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$ — $(m \times m)$–матрица-функция, элементы которой непрерывны справа на интервале (a, b) и имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, $\Phi(a) = 0_m$, а интеграл понимается по Риману-Стилтьесу.

Дополнительные условия вида (3) именуют общими. Они охватывают все классические виды краевых условий. В частности, задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые условия (см. [2, гл. II, §5], где приведены соответствующие ссылки). Известно (см., например, [3]), что краевая задача (1), (2) является фредгольмовой.

Пусть теперь коэффициент дифференциального выражения, оператор B и правые части равенств (1), (2) зависят от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим семейство неоднородных краевых задач

$$y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) \tag{5}$$

$$B(\varepsilon) y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{6}$$

где при каждом фиксированном значении параметра ε задача (5), (6) является общей краевой. Тогда решение $y(\cdot, \varepsilon)$ также зависит от ε. В работах [3, 4, 5, 6] найдены достаточные условия непрерывной зависимости от параметра $\varepsilon \to 0+$ решений задачи (5), (6) в равномерной норме $\|\cdot\|_\infty$. Вместе с тем оставался открытым вопрос о зависимости от параметра $\varepsilon \to 0+$ производных решения $y(\cdot, \varepsilon)$ в равномерной норме. Для существования таких производных необходимо сделать дополнительные предположения относительно гладкости коэффициента дифференциального уравнения.

Будем предполагать далее, что в дифференциальном уравнении (1)

$$A(\cdot) \in C^{(n-1)}\left([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}\right), \qquad f(\cdot) \in C^{(n-1)}\left([a, b], \mathbb{C}^m\right).$$

В этом случае каждое решение уравнения (1) принадлежит банахову пространству вектор-функций $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением дополнительное неоднородное „краевое“ условие (2), в котором линейный непрерывный оператор

$$B : C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{7}$$

Это краевое условие является неклассическим, так как может содержать производные вектор-функции $y(\cdot)$ до порядка n включительно, то есть не менее высокого порядка, чем порядок дифференциального уравнения. Из строгих включений для пространств линейных непрерывных операторов

$$L\left(C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m),\mathbb{C}^m\right) \supset L\left(C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m),\mathbb{C}^m\right)$$

следует, что с увеличением числа n в (7) введенные нами классы краевых условий расширяются. В частности, каждый из операторов в (3) заведомо удовлетворяет условию (7). Из описания линейных непрерывных функционалов на пространстве $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C})$ (см., например, [7, с. 374]) следует, что каждый из операторов в (7) допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y^{(k-1)}(a) + \int_a^b [d\Phi(t)]\, y^{(n)}(t),$$

где матрицы $\alpha_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а матрица-функция $\Phi(\cdot)$ такая же, как и в равенстве (4).

Хотя некоторые краевые задачи с такими операторами в дополнительных условиях встречаются в ряде приложений, но в общей постановке они, по-видимому, не исследовались. Их анализу и посвящена данная работа.

Перейдем к строгим формулировкам. Обозначим через $\|\cdot\|_{(n-1)}$ нормы в пространствах вектор-функций или матриц-функций на отрезке $[a,b]$, элементы которых принадлежат классу $C^{(n-1)}$, $C^{(0)} := C$. Они определяются как суммы соответствующих норм составляющих их элементов.

Неоднородную краевую задачу (1), (2) удобно записать в виде линейного операторного уравнения

$$L_B y = (f, c),$$

где линейный оператор

$$L_B := (L, B), \qquad Ly := y' + A(t)y.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *В сделанных нами предположениях оператор* L_B *непрерывно действует из банахова пространства* $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ *в банахово пространство* $C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m$ *и является фредгольмовым, то есть имеет индекс* $\operatorname{ind}(L_B) = 0$.

Доказательство. Покажем непрерывность оператора L_B. В силу соотношения (7) она равносильна ограниченности линейного оператора $L : C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Как известно, банахово пространство $C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C})$ является мультипликативной алгеброй. Поэтому существует постоянная $c > 0$, такая, что для всех вектор-функций $y(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$

$$\|A(t)y(t)\|_{(n-1)} \le c \cdot \|A(\cdot)\|_{(n-1)}\|y(\cdot)\|_{(n-1)}.$$

Откуда с учетом неравенства $\|\cdot\|_{(n)} \ge \|\cdot\|_{(n-1)}$ следует нужная оценка

$$\|Ly\|_{(n-1)} \le \|y'(\cdot)\|_{(n-1)} + \|A(t)y(\cdot)\|_{(n-1)} \le (1+c)\|y(\cdot)\|_{(n)}, \qquad y \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m).$$

Определим конечномерный непрерывный оператор $K : C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to C^m$, положив

$$Ky := y(a).$$

Из теоремы о существовании и единственности глобального решения линейной задачи Коши (см., например, [8, с. 111]) и вытекающей из сделанных нами предположений гладкости ее решения следует, что линейный оператор L_K является биекцией банахова пространства $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ на банахово пространство $C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m$. Поскольку оператор L_K является частным случаем введенных операторов L_B, то по уже доказанному он ограничен. По теореме Банаха об обратном операторе этот оператор непрерывно обратим.

Пусть B — произвольный линейный непрерывный оператор из соотношения (7). Тогда

$$L_B = L_K + (L_B - L_K),$$

где оператор L_K непрерывно обратим, а линейный непрерывный оператор $L_B - L_K$ конечномерен, так как его образ лежит в подпространстве размерности m. По теореме Никольского (см., например, [9, гл. 5, § 21]) оператор L_B фредгольмов. $\square$

Следствие 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Неоднородная краевая задача* (1), (2) *имеет одно решение при любых* $f(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b], \mathbb{C}^m)$ *и* $c \in \mathbb{C}^m$.

2) *Однородная краевая задача вида* (1), (2) *имеет только тривиальное решение.*

Опишем теперь условия, при которых оператор L_B непрерывно обратим, то есть неоднородная краевая задача (1), (2) имеет ровно одно решение, которое непрерывно зависит от правых частей дифференциального уравнения и краевого условия.

Пусть матрица-функция $Y(\cdot) \in C^{(n)}([a,b], \mathbb{C}^{m\times m})$. Обозначим через $[BY(\cdot)]$ квадратную матрицу из $\mathbb{C}^{m\times m}$, k–ый столбец которой совпадает с действием оператора B на k–ый столбец матрицы-функции $Y(\cdot)$.

Пусть $Y(\cdot)$ — матрицант уравнения (1) на интервале (a,b), то есть

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \qquad Y(a) = I_m.$$

Теорема 3. *Оператор* L_B *непрерывно обратим тогда и только тогда, когда квадратная матрица* $[BY(\cdot)]$ *невырождена, то есть* $\det [BY(\cdot)] \neq 0$.

Доказательство. В силу доказанной выше теоремы 1 непрерывная обратимость оператора L_B равносильна тому, что нуль-пространство $N(L_B) = \{0\}$. Из определения матрицанта $Y(\cdot)$ следует, что каждый элемент $y(\cdot) \in N(L_B)$ допускает однозначное представление вида $y(t) = Y(t) \cdot y(a)$, где $y(a)$ — произвольный вектор из $\mathbb{C}^m$. Для такой вектор-функции однородное краевое условие вида (2) равносильно тому, что $B(Y(t) \cdot y(a)) = 0$. Нетрудно проверить, что

$$B(Y(t) \cdot y(a)) = [BY(\cdot)]\, y(a).$$

Поэтому $N(L_B) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\det [BY(\cdot)] = 0$. $\square$

В заключение работы отметим, что для рассмотренных в работе задач достаточные условия непрерывности по параметру решений вместе с их производными до порядка n в равномерной норме приведены авторами в работе [10].

Список литературы

[1] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Из-во Тбил. ун-та, 1975. — 352 с.

[2] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. — 704 с.

[3] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – С. 3–103.

[4] *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary-value problems for systems of generalized differential equations // Czechoslovak Math. J. – 1996. – **46**, № 3. – P. 385–404.

[5] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доповіді НАН України – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[6] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[7] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 895 с.

[8] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.

[9] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. — 495 с.

[10] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a,b]$ // Доповіді НАН України – 2014. – № 7.