Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 284–304

УДК 517.956.223

І. С. Чепурухіна

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості

Chepuruhina@mail.ru

We investigate an elliptic boundary–value problem with additional unknown functions on the boundary of a Euclidean domain. We prove that the operator corresponding to this problem is bounded and Fredholm in appropriate pairs of Hilbert function spaces of generalized smoothness. These spaces are parametrized with the help of a real number and an arbitrary radial function that varies slowly at ∞ in the sense of Karamata. For the solutions to the problem, we prove theorems on increase in global and local generalized smoothness.

Досліджено еліптичну крайову задачу з додатковими невідомими функціями на межі евклідової області. Доведено, що оператор, відповідний цій задачі, є обмеженим і нетеровим у підходящих парах гільбертових функціональних просторів узагальненої гладкості. Ці простори параметризовані за допомогою дійсного числа і довільної радіальної функції, повільно змінної на ∞ за Караматою. Для розв'язків задачі доведено теореми про підвищення глобальної і локальної узагальненої гладкості.

1. Вступ

Ця робота присвячена важливому класу крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь — еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями на межі області. Цей клас був виділений

© **І. С. Чепурухіна, 2014**

Б. Лораком [1–3] у 1963 році, як такий, що природно утворюється при переході від загальної еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі (у випадку нерегулярних крайових умов). Більше того, він є замкненим відносно такого переходу. Згодом з'ясувалося, що до цього класу належать різні задачі теорії пружності і гідродинаміки [4–6].

Для вказаного класу задач були доведені теореми про характер їх розв'язності у просторах Соболєва H^s. Серед них — теореми про нетеровість задачі, породжені нею ізоморфізми, апріорні оцінки її розв'язків, теореми про підвищення гладкості розв'язків (див. згадані роботи Б. Лорака та монографії В. А. Козлова, В. Г. Мазьи, Й. Россмана [7, гл. 3] і Я. А. Ройтберга [8, гл. 2]).

Мета цієї роботи – довести версії цих теорем для гільбертових функціональних просторів $H^{s,\varphi}$ узагальненої гладкості. Вона характеризується не лише числом $s \in \mathbb{R}$, а і додатковим функціональним параметром $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, що повільно змінюється на нескінченності за Й. Караматою. Ці простори утворюють уточнену соболєвську шкалу, яка була виділена і досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [9–12]. Вона має важливу інтерполяційну властивість: кожний простір $H^{s,\varphi}$ отримується в результаті інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари гільбертових просторів Соболєва $H^{s-\varepsilon}$ і $H^{s+\delta}$, де $\varepsilon, \delta > 0$.

Ця властивість була систематично використана у роботах [9–12] для побудови теорії розв'язності еліптичних крайових задач в уточненій соболєвській шкалі. Втім, клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями на межі області не був охоплений вказаною теорією.

Ця робота складається з семи пунктів. Пункт 1 служить вступом. У п. 2 дана постановка еліптичної крайової задачі, що досліджується. Там же розглянута формально спряжена крайова задача. У п. 3 дано означення функціональних просторів, які утворюють уточнену соболєвську шкалу. Основні результати роботи сформульовані у п. 4. Це — теореми про характер розв'язности досліджуваної задачі у вказаній шкалі і властивості її розв'язків. Пункт 5 присвячений методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Там же сформульована інтерполяційна властивість уточненої соболєвської шкали. Результати роботи доведені у п. 6. Заключний п. 7 містить висновки до роботи.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — довільна обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з межею Γ класу C^∞. Як зазвичай, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Позначимо через $\nu(x)$ орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$.

Розглянемо в області Ω (лінійну) еліптичну крайову задачу із $\varkappa \geq 1$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{2}$$

Тут

$$A := A(x, D) := \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu$$

є лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, кожне

$$B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu$$

є граничний диференціальний оператор на Γ порядку $m_j \leq 2q - 1$, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ є (дотичний) диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$, де $r_1, \ldots, r_\varkappa$ — фіксовані цілі числа. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно.

Тут використовуються стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_l := i\partial/\partial x_l$, де i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Окрім того, покладаємо $D_\nu := i\partial/\partial\nu(x)$ та $\xi^\mu := \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ для вектора $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

В задачі (1), (2) є невідомими функція u, задана в області Ω, і $\varkappa$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$, заданих на межі Γ цієї області. В роботі усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

Надалі припускаємо, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω (див., наприклад, [7, п. 3.1.3]). Наведемо відповідне означення.

Позначимо через $A^{(0)}(x, \xi)$, $B_j^{(0)}(x, \xi)$ і $C_{j,k}^{(0)}(x, \tau)$ головні символи диференціальних операторів $A(x, D)$, $B_j(x, D)$ і $C_{j,k}(x, D_\tau)$ відповідно.

Нагадаємо, що для кожного фіксованого $x \in \overline{\Omega}$ вираз

$$A^{(0)}(x,\xi) := \sum_{|\mu|=2q} a_{\mu}(x)\xi^{\mu}$$

є однорідним поліномом порядку $2q$ змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$; для кожного фіксованого $x \in \Gamma$ вираз

$$B_j^{(0)}(x,\xi) := \sum_{|\mu|=m_j} b_{j,\mu}(x)\xi^{\mu}$$

є однорідним поліномом порядку m_j змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$, а вираз $C_{j,k}(x, D_\tau)$ є однорідним поліномом порядку $m_j + r_k$ змінної τ, яка є дотичним вектором до межі Γ у точці x.

Крайова задача (1), (2) з додатковими невідомими функціями на межі Γ називається еліптичною в області Ω, якщо виконуються такі три умови:

(i) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є еліптичним в кожній точці $x \in \overline{\Omega}$, тобто $A^{(0)}(x,\xi) \neq 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є правильно еліптичним в кожній точці $x \in \Gamma$, тобто для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, многочлен $A^{(0)}(x, \tau + \eta\nu(x))$ комплексної змінної η має q коренів з додатною уявною частиною і стільки ж коренів з від'ємною уявною частиною (підрахованих з урахуванням їх кратності).

(iii) Система крайових умов (2) накриває рівняння (1) в кожній точці $x \in \Gamma$. Це значить, що для кожного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, крайова задача

$$A^{(0)}(x, \tau + D_t\,\nu(x))\theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$
$$B_j^{(0)}(x, \tau + D_t\,\nu(x))\theta(t)\big|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(x,\tau)\lambda_k = 0,$$
$$j = 1, ..., q + \varkappa,$$

має лише тривіальний (нульовий) розв'язок. Ця задача розглядається відносно невідомої функції $\theta \in C^{\infty}([0,\infty))$, що задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, і невідомих комплексних чисел

$\lambda_1, \dots, \lambda_\varkappa$. Тут $A^{(0)}(x, \tau + D_t\,\nu(x))$ і $B_j^{(0)}(x, \tau + D_t\,\nu(x))$ є диференціальні оператори відносно $D_t := i\partial/\partial t$, які отримуємо, поклавши $\eta := D_t$ у многочленах $A^{(0)}(x, \tau + \eta\nu(x))$ і $B_j^{(0)}(x, \tau + \eta\nu(x))$ змінної η, відповідно.

Відмітимо, що умова (ii) є наслідком умови (i) у випадку, коли $n \geq 3$.

Простим прикладом еліптичної крайової задачі (1), (2) служить така задача при $n = 2$ і $\varkappa = 1$:

$$\begin{gathered} \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u + v = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\ D_\nu u + D_\tau v \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{gathered}$$

Тут Δ — оператор Лапласа, а $D_\tau := i\partial/\partial\tau$, де $\partial/\partial\tau$ є похідна вздовж кривої Γ. Інші приклади наведені у монографії [7, п. 3.1.5].

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійне відображення

$$\begin{gathered} \Lambda : (u, v_1, ..., v_\varkappa) \to \\ \to \left(Au,\ B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k \right), \qquad (3) \\ \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad v_1, \dots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma). \end{gathered}$$

В роботі будуть досліджені властивості продовження за неперервністю цього відображення у підходящих парах гільбертових функціональних просторів узагальненої гладкості.

Для опису області значень цього продовження нам знадобиться така формула Гріна [7, теорема 3.1.2]:

$$\begin{gathered} (Au, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \left(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j \right)_\Gamma = \\ = (u, A^+ w)_\Omega + \sum_{j=1}^{2q} \left(D_\nu^{j-1} u, K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma + \\ + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left(v_j, \sum_{k=1}^{q+\varkappa} C_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma, \end{gathered}$$

де $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v \in (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$, $h \in (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно. Тут

$$A^+ w := A^+(x,D)w(x) := \sum_{|\mu|\le 2q} D^\mu(\overline{a_\mu(x)}w(x)),$$

тобто A^+ є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Окрім того, $C^+_{k,j}$ і $Q^+_{k,j}$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення граничних операторів B_j у вигляді

$$B_j(x,D) = \sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1}.$$

(Звісно, якщо $k > m_j$, то $Q_{j,k} = 0$). Нарешті,

$$K_j := K_j(x,D) := \sum_{k=1}^{j} T_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1},$$

де кожне $T_{j,k}(D_\tau)$ — деякий дотичний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} T_{j,k} \le 2q+1-j-k$ (якщо $2q+1-j-k < 0$, то $T_{j,k}(D_\tau) = 0$).

З огляду на формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q+\varkappa$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$A^+ w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^+_{k,j} h_k = \chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1,\dots,2q, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^+_{k,j} h_k = \chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1,\dots,\varkappa. \tag{6}$$

Ця задача формально спряжена до задачі (1), (2) відносно наведеної формули Гріна. Відмітимо [7, теорема 3.1.2], що еліптичність задачі (1), (2) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (4), (5), (6).

3. Уточнена соболєвська шкала

Розглянемо гільбертові функціональні простори узагальненої гладкості, в яких буде досліджена крайова задача (1), (2). Вони утворюють уточнену соболєвську шкалу $\{H^{s,\varphi} : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$, досліджену в [11, 12]. Тут і надалі $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Й. Караматою [13]. Остання властивість значить, що $\varphi(\lambda t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Повільно змінні функції добре вивчені і мають різноманітні застосування [14, 15]. Їх характерним прикладом служить функція

$$\varphi(t) := (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ разів}} t)^{r_k}, \quad t \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ і $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Означимо простір $H^{s,\varphi}$ спочатку на $\mathbb{R}^n$, а потім на Ω і Γ. Будемо слідувати за монографією [11, пп. 1.3, 2.1, 3.2].

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^n$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ є функцією, локально сумовною на $\mathbb{R}^n$ за Лебегом, і виконується умова

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. У просторі $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ введений скалярний добуток розподілів w_1 і w_2 за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \widehat{w_1}(\xi) \overline{\widehat{w_2}(\xi)} d\xi.$$

Він породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ є ізотропний випадок гільбертових просторів $\mathcal{B}_{2,\mu} = H^{\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером [16, п. 2.2] і

Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [17, § 2]. Для цих просторів показником гладкості служить вагова функція $\mu : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$. У нас $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ є радіальною функцією аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$.

У важливому окремому випадку $\varphi \equiv 1$ простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ порядку s. У загальній ситуації виконуються неперервні та щільні вкладення

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0. \qquad (7)$$

З них видно, що у класі функціональних просторів

$$\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) :\, s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$$

числовий параметр s задає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр φ визначає додаткову (узагальнену) гладкість, підпорядковану основній. В залежності від того, чи $\varphi(t) \to \infty$ або $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, параметр φ задає додаткову додатну або від'ємну гладкість. Іншими словами, параметр φ уточнює основну s-гладкість. Тому цей клас природно називати уточненою соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$.

Її аналоги для евклідової області Ω і замкненого компактного многовиду Γ вводяться у стандартний спосіб. Наведемо відповідні означення.

Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω усіх розподілів $w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Норма у ньому означена за формулою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),\; w = u \;\text{ в }\; \Omega \,\bigr\},$$

де $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно вказаної норми. Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у ньому.

Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до простору $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо докладне означення. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\alpha_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають скінченне покриття многовиду Γ. Нехай, окрім того, вибрані функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$. Тоді, за означенням,

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) :=$$
$$:= \bigl\{h \in \mathcal{D}'(\Gamma) :\, (\chi_j h) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \;\text{ для усіх }\; j = 1, \ldots, \lambda\bigr\}.$$

Тут через $\mathcal{D}'(\Gamma)$ позначено лінійний топологічний простір усіх розподілів на многовиді Γ, а $(\chi_j h)\circ\alpha_j$ є представлення розподілу h в локальній карті α_j. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ введений скалярний добуток розподілів h_1 і h_2 за формулою

$$(h_1,h_2)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} ((\chi_j h_1)\circ\alpha_j, (\chi_j\, h_2)\circ\alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Цей простір гільбертів і сепарабельний. Важливо, що він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [11, теорема 2.3]. Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна у просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Введені гільбертові функціональні простори утворюють уточнені соболєвські шкали

$$\{H^{s,\varphi}(\Omega):\, s\in\mathbb{R}, \varphi\in\mathcal{M}\} \quad \text{і} \quad \{H^{s,\varphi}(\Gamma):\, s\in\mathbb{R}, \varphi\in\mathcal{M}\} \tag{8}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять гільбертові соболєвські шкали: якщо $\varphi(t)\equiv 1$, то $H^{s,\varphi}(\Omega) =: H^s(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}(\Gamma) =: H^s(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку $s\in\mathbb{R}$.

Для шкал (8) виконуються компактні і щільні вкладення (7), якщо у формулі (7) замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ відповідно.

4. Основні результати

Сформулюємо основні результати статті про властивості еліптичної крайової задачі (1), (2) в уточненій соболєвській шкалі.

Пов'яжемо з крайовою задачею (1), (2) у однорідному випадку лінійний простір

$$N := \Big\{(u, v_1, \dots, v_\varkappa) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa :\, Au = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } j = 1, ..., q+\varkappa\Big\}.$$

Аналогічно, пов'яжемо з формально спряженою крайовою задачею

(4), (5), (6) у однорідному випадку лінійний простір

$$N^{+} := \Big\{(w, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q+\varkappa} : \ A^{+}w = 0 \ \text{в} \ \Omega,$$

$$K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^{+}_{k,j} h_k = 0 \ \text{на} \ \Gamma \ \text{при} \ j = 1, ..., 2q,$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^{+}_{k,j} h_k = 0 \ \text{на} \ \Gamma \ \text{при} \ j = 1, ..., \varkappa\Big\}.$$

Оскільки ці крайові задачі еліптичні в Ω, то простори N і N^{+} скінченномірні [7, лемма 3.4.2].

Теорема 1. *Нехай $s > 2q$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення* (3) *продовжується единим чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) := H^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to$$
$$\to H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega, \Gamma). \tag{9}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з простором N, а область значення складається з усіх векторів

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega, \Gamma) \tag{10}$$

таких, що

$$(f, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \quad \text{для всіх} \quad (w, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in N^{+}. \tag{11}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *і не залежить від s та φ.*

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : X \to Y$, де X, Y є банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченномірні. Нетерів оператор має замкнену область значень $T(X)$ і скінченний індекс $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Якщо $N=\{0\}$ і $N_{+}=\{0\}$, то оператор (9) здійснює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між їх підпросторами, що мають скінченну ковимірність. Виділимо ці підпростори у такий спосіб.

Зобразимо простори, в яких діє оператор (9) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)=N\dotplus\Bigl\{(u_0,v_{0,1},\ldots,v_{0,\varkappa})\in\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma):\\ (u_0,u)_\Omega+\sum_{k=1}^{\varkappa}(v_{0,k},v_k)_\Gamma\ \text{ для всіх }\ (u,v_1,\ldots,v_\varkappa)\in N\Bigr\}\end{gathered}\tag{12}$$

та

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)=N^{+}\dotplus\Lambda\bigl(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)\bigr).\tag{13}$$

Такі зображення існують, оскільки вони є звуженнями на $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ розкладів в ортогональні суми просторів $L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{\varkappa}$ і $L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{q+\varkappa}$ відповідно. Позначимо через P і P^{+} відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}$ на другий доданок в сумах (12) і (13) паралельно першому доданку. Ці проектори не залежать (як відображення) від s і φ.

Теорема 2. *Для довільних параметрів $s>2q$ та $\varphi\in\mathcal{M}$ звуження відображення* (9) *на підпростір $P(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P(D^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))\leftrightarrow P^{+}(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)).\tag{14}$$

Дослідимо далі властивості узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2). Попередньо дамо означення такого розв'язку. Зауважимо, що теорема 1 є вірною у соболєвському випадку $\varphi\equiv1$ для граничного значення $s=2q$ (див., наприклад, монографію [7, теорема 3.4.1]). Згідно з цим результатом, для кожного вектора

$$(u,v):=(u,v_1,\ldots,v_\varkappa)\in\mathcal{D}^{2q}(\Omega,\Gamma)$$

коректно означений вектор

$$(f,g):=(f,g_1,\ldots,g_{q+\varkappa}):=\Lambda(u,v)\in\mathcal{E}^{0}(\Omega,\Gamma).$$

Тут і далі ми опускаємо індекс φ в позначеннях просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ у соболєвському випадку $\varphi\equiv1$ (ці простори щойно використані для $s=2q$). Вектор u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) з правої частиною (f,g). Він задовольняє таку апріорну оцінку.

Теорема 3. *Нехай* $s>2q$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тоді існує число* $c>0$ *таке, що*

$$\begin{aligned}&\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ &\leq c\left(\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|u\|_{L_2(\Omega)}+\|v\|_{(L_2(\Gamma))^{\varkappa}}\right)\end{aligned}\tag{15}$$

для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. *Тут* $c=c(s,\varphi)$ *не залежить від* (u,v).

Припустимо, що права частина (f,g) еліптичної крайової задачі (1), (2) має на відкритій в $\overline{\Omega}$ множині деяку гладкість в уточненій соболєвській шкалі. Дослідимо гладкість узагальненого розв'зку (u,v) задачі на цій множині. Розглянемо спочатку випадок глобальної гладкості на всій замкненій області $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. *Нехай вектор* $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ *для деяких параметрів* $s>2q$ *та* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тоді розв'язок* $(u,v)\in\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

Як бачимо, основна гладкість розв'язку збільшується на число $s-2q>0$, а додаткова гладкість φ успадковується від правої частини задачі.

Сформулюємо локальний аналог цієї теореми. Нехай V — довільна відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^n$. Позначимо $\Omega_0:=\Omega\cap V\neq\varnothing$ і $\Gamma_0:=\Gamma\cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0=\varnothing$). Для довільних параметрів $\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$ введемо локальні аналоги просторів $H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ і $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$. А саме, покладемо

$$\begin{gathered}H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0):=\bigl\{u\in\mathcal{D}'(\Omega):\ \chi u\in H^{\sigma,\varphi}(\Omega)\\ \text{для всіх }\ \chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})\ \text{ таких, що }\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0\bigr\}.\end{gathered}$$

Тут $\mathcal{D}'(\Omega)$ — лінійний топологійний простір усіх розподілів, заданих в області Ω. Топологія у лінійному просторі $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ задається напівнормами $u\mapsto\|\chi u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Omega)}$, де χ — довільна функція з означення цього простору. Аналогічно

$$\begin{gathered}H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0):=\bigl\{u\in\mathcal{D}'(\Gamma):\ \chi u\in H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)\\ \text{для всіх }\ \chi\in C^{\infty}(\Gamma)\ \text{ таких, що }\operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0\bigr\}.\end{gathered}$$

Топологія у лінійному просторі $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ задається напівнормами $h \mapsto \|\chi h\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Omega)}$, де χ — довільна функція з означення цього простору.

Теорема 5. *Нехай вектор* $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), *права частина якої задовольняє умову*

$$(f,g) \in H^{s-2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) =: \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \quad (16)$$

для деяких параметрів $s > 2q$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді розв'язок*

$$(u,v) \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) =: \mathcal{D}^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0).$$

Якщо $\Gamma_0 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що локальна гладкість компоненти u розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок області Ω.

У соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$ і $s \geq 2q$, теореми 1–5 доведені у монографіях [7, пп. 3.2, 3.4] (для цілих s) і [8, п. 2.4] (для дійсних s і загальних еліптичних систем).

5. Інтерполяція з функціональним параметром гільбертових просторів

Уточнена соболєвська шкала має важливу інтерполяційну властивість, яка зіграє основну роль у доведенні ключової теореми 1. Виявляється кожний простір $H^{s,\varphi}(G)$, де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$, $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, можна отримати інтерполяцією з підходящим функціональним параметром пари соболєвських просторів $H^{s-\varepsilon}(G)$ і $H^{s+\delta}(G)$, де $\varepsilon, \delta > 0$. У цьому зв'язку нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та деякі її властивості. Цей метод інтерполяції уперше з'явився в роботі К. Фояша і Ж.-Л. Ліонса [18]. У викладі його будемо слідувати [11, 12, п. 1.1]. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними гільбертовими просторами.

Нехай задана упорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J є самоспряженим додатно визначеним оператором у просторі X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається за парою X однозначно; він називається породжуючим для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектральної теореми, у просторі X_0 означений оператор $\psi(J)$ як функція від самоспряженого (взагалі кажучи, необмеженого) оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний; виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується наступне. Якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо казати, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для деякої додатної угнутої функції $\psi_1(t)$. (Тут $\psi \asymp \psi_1$ значить обмеженість обох відношень ψ/ψ_1 і ψ_1/ψ на вказаній множині). Цей важливий факт випливає з теореми Ж. Петре [19, 20] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного степеня (див. також монографію [21, п. 5.4]).

Сформулюємо згадану вище інтерполяційну властивість уточненої соболєвської шкали [11, 12, теореми 1.14, 2.2, 3.2].

Твердження 1. *Нехай довільно задано функцію $\varphi \in \mathcal{M}$ і додатні числа ε та δ. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)} \varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)}) & \text{при } t \geq 1 \\ \varphi(1) & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і для довільного $s \in \mathbb{R}$ виконується така рівність гільбертових просторів з точністю *до еквівалентності норм у них:*

$$\left[H^{s-\varepsilon}(G), H^{s+\delta}(G)\right]_{\psi} = H^{s,\varphi}(G),$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. *Якщо* $G = \mathbb{R}^n$, *то буде навіть рівність норм.*

На завершення цього пункту наведемо дві загальні властивості інтерполяції просторів, які будуть використані у доведенні теореми 1. Сформулюємо їх стосовно розглянутого методу інтерполяції.

Твердження 2. *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задане лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j, *де* $j = 0, 1$, *є обмеженими і нетеровими операторами* $T : X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень рівна* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Твердження 3. *Нехай задане скінченне число припустимих пар* $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ *гільбертових просторів, де* $k = 1, \ldots, p$. *Тоді для довільного* $\psi \in \mathcal{B}$ *вірно*

$$\Big[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Big]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} \big[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\big]_{\psi}$$

з рівністю норм у просторах.

Доведення цих властивостей наведено, наприклад, у монографіях [11, 12, пп. 1.1.5, 1.1.7].

6. Доведення

Дамо послідовно доведення теорем 1–5, сформульованих у п. 4.

Доведення теореми 1. У випадку просторів Соболєва, коли $\varphi(t) \equiv 1$ і $s \geq 2q$, ця теорема доведена в монографії [7, теорема 3.4.1] (для цілих s) і в книзі [8, теорема 2.4.1] (для дійсних s і загальних еліптичних систем). Виведемо теорему 1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Нехай довільним чином вибрано дійсне число $s > 2q$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $\varepsilon := \delta := s - 2q > 0$. Відображення (3) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s\mp\varepsilon}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s\mp\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma), \tag{17}$$

що діють у парах просторів Соболєва. Ці оператори мають спільне ядро N і однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim N^{+}$. Область значень кожного з операторів (17) має вигляд

$$\Lambda(\mathcal{D}^{s\mp\varepsilon}(\Omega,\Gamma)) = \big\{(f,g) \in \mathcal{E}^{s\mp\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma) : \text{вірно (11)}\big\}. \tag{18}$$

Застосуємо до (17) інтерполяцію з функціональним параметром ψ з твердження 1, у якому беремо $\varepsilon = \delta$. На підставі твердження 2 отримаємо обмежений і нетерів оператор

$$\begin{gathered}\Lambda_s : [\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi} \to \\ \to [\mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{s+\varepsilon-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)]_{\psi}.\end{gathered} \tag{19}$$

Він є продовженням за неперервністю відображення (3).

Зінтерполюємо простори, в яких діє цей оператор. На підставі тверджень 3 і 1 маємо такі рівності просторів з точністю до еквівалентності норм в них:

$$\begin{gathered}[\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi} = \\ = [H^{s-\varepsilon}(\Omega), H^{s+\varepsilon}(\Omega)]_{\psi} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} [H^{s+r_k-1/2-\varepsilon}(\Gamma), H^{s+r_k-1/2+\varepsilon}(\Gamma)]_{\psi} = \\ = H^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) = \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma).\end{gathered}$$

Аналогічно

$$[\mathcal{E}^{s-2q-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{s-2q+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi} = \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Отже, обмежений нетерів оператор (19) є оператор (9) з теореми 1.

На підставі твердження 2 ядро оператора (9) та його індекс збігаються відповідно зі спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N - \dim N_{+}$ операторів (17). Окрім того, область значень цього оператора дорівнює

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda(\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma)) = \big\{(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma) : \text{вірно (11)}\big\},$$

якщо взяти до уваги (18).

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. За теоремою 1 звуження оператора (9) на $P(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ є неперервним і взаємно однозначним відображенням підпростору $P(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ на підпростір $P^{+}(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma))$. Тому в силу теореми Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом (14). Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. Для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ маємо в силу теореми 2 таке:

$$\begin{gathered}\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq \\ \leq \|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)-P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq \\ \leq c_1\|\Lambda P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|(u,v)-P(u,v)\|_{L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{\varkappa}}.\end{gathered}$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (14), а c_2 є деяке додатне число, не залежне від (u,v). Це число існує, оскільки вектор $(u,v)-P(u,v)$ належить до скінченномірного простору N, а в ньому еквівалентні всі норми, зокрема, норми у просторах $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{\varkappa}$. Звідси з урахуванням формул

$$\begin{gathered}\Lambda P(u,v) = \Lambda(u,v), \\ \|(u,v)-P(u,v)\|_{L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{\varkappa}} \leq \|(u,v)\|_{L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^{\varkappa}}\end{gathered}$$

маємо потрібну оцінку (15). Теорема 3 доведена.

Доведення теореми 4. Згідно з теоремою 1, вірною у соболєвському випадку $s=2q$ і $\varphi\equiv 1$, вектор $(f,g) := \Lambda(u,v) \in \mathcal{E}^{0}(\Omega,\Gamma)$ задовольняє умову (11). Звідси, на підставі тієї ж теореми, $(f,g) \in \Lambda(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$. Тому разом з рівністю $\Lambda(u,v) = (f,g)$ виконується ще одна рівність $\Lambda(u',v') = (f,g)$ для деякого вектора $(u',v') \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Отже, $\Lambda(u-u',v-v') = 0$, що з урахуванням теореми 1 тягне за собою включення

$$(u-u',v-v') \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa}.$$

Таким чином,

$$(u,v) = (u',v') + (u-u',v-v') \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Теорема 4 доведена.

Доведення теореми 5. Попередньо доведемо, що за умови теореми 5 виконується така імплікація для кожного числа $\sigma \geq 2q$:

$$(u,f) \in \mathcal{D}^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \;\Rightarrow\; (u,f) \in \mathcal{D}^{\min\{\sigma+1,s\},\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0). \tag{20}$$

Припустимо, що виконується посилка цієї імплікації для деякого $\sigma \geq 2q$. Виберемо довільним чином функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Виберемо також деяку функцію $\eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умови $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставивши оператор множення на функцію χ з усіма диференціальними операторами A, B_j і $C_{j,k}$ можемо записати такі рівності:

$$A(\chi u) = A(\chi\eta u) = \chi A(\eta u) + A'(\eta u) = \chi A u + A'(\eta u), \tag{21}$$

$$B_j(\chi u) = B_j(\chi\eta u) = \chi B_j(\eta u) + B'_j(\eta u) = \chi B_j u + B'_j(\eta u), \tag{22}$$

$$\begin{gathered} C_{j,k}(\chi v_k) = C_{j,k}(\chi\eta v_k) = \chi C_{j,k}(\eta v_k) + C'_{j,k}(\eta v_k) = \\ \chi C_{j,k} v_k + C'_{j,k}(\eta v_k). \end{gathered} \tag{23}$$

Тут A' — деякий лінійний диференціальний вираз на $\overline{\Omega}$, B'_j — деякий граничний диференціальний вираз на Γ, а $C'_{j,k}$ — деякий (дотичний) диференціальний вираз на Γ. Коефіцієнти цих виразів нескінченно гладкі, а порядки задовольняють умовам

$$\operatorname{ord} A' \leq 2q-1, \quad \operatorname{ord} B'_j \leq m_j - 1, \quad \operatorname{ord} C'_{j,k} \leq m_j + r_k - 1. \tag{24}$$

Покладемо

$$\Lambda'(u,v) := \left(A'u,\, B'_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{1,k} v_k, \ldots, B'_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{q+\varkappa,k} v_k\right).$$

З рівностей (21)–(23) випливає, що

$$\Lambda(\chi u, \chi v) = \chi\Lambda(u,v) + \Lambda'(\eta u, \eta v) = (\chi f, \chi g) + \Lambda'(\eta u, \eta v).$$

Тут, за умовою теореми,

$$(\chi f, \chi g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Окрім того, в силу нерівностей (24) і посилки імплікації (20), виконується включення

$$\Lambda'(\eta u, \eta v) \in \mathcal{E}^{\sigma+1-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Отже,

$$\Lambda(\chi u, \chi v) \in \mathcal{E}^{\min\{\sigma+1,s\}-2q,\varphi}(\Omega, \Gamma).$$

Звідси на підставі теореми 4 маємо включення

$$(\chi u, \chi v) \in \mathcal{D}^{\min\{\sigma+1,s\},\varphi}(\Omega, \Gamma).$$

Воно, з огляду на довільність зазначеного вибору функції χ, означає, що висновок імплікації (20) є вірним.

Таким чином, ця імплікація доведена. Звісно, вона є істинною і у соболєвському випадку $\varphi(t) \equiv 1$.

За умовою теореми,

$$(u, v) \in \mathcal{D}^{2q}(\Omega, \Gamma) \subset \mathcal{D}^{2q}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0).$$

Скориставшись імплікацією (20) у випадку $\sigma = 2q$ і $\varphi(t) \equiv 1$, отримаємо включення

$$(u, v) \in \mathcal{D}^{\min\{2q+1,s\}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \subset \mathcal{D}^{2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0).$$

Тепер, застосувавши цю імплікацію $[s - 2q] + 1$ разів послідовно для значень $\sigma = 2q$, $\sigma = 2q + 1$, ..., $\sigma = 2q + [s - 2q]$, отримаємо, що

$$\begin{aligned} &(u, v) \in \mathcal{D}^{2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \Rightarrow (u, v) \in \mathcal{D}^{\min\{2q+1,s\},\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \Rightarrow \ldots \\ &\Rightarrow (u, v) \in \mathcal{D}^{\min\{2q+[s-2q]+1,s\},\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) = \mathcal{D}^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0). \end{aligned}$$

Теорема 5 доведена.

7. Висновки

У статті досліджено еліптичну крайову задачу (1), (2) з додатковими невідомими функціями на межі евклідової області в уточненій соболєвській шкалі. Доведено, що цій задачі відповідає обмежений і нетерів оператор (9) (теорема 1), який породжує ізоморфізми між підпросторами скінченної ковимірності (теорема 2). Встановлені нові апріорні оцінки узагальнених розв'язків задачі (теорема 3). Доведено твердження про підвищення глобальної і локальної гладкості розв'язків в уточненій соболєвській шкалі (теореми 4 і 5).

Авторка дякує О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Lawruk B.* On parametric boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations, I // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. – 1963. – **11**, No. 5. – P. 257–267.

[2] *Lawruk B.* On parametric boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations, II // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. – 1963. – **11**, No. 5. – P. 266–278.

[3] *Lawruk B.* On parametric boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations, III // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. – 1965. – **13**, No. 2. – P. 105–110.

[4] *Aslanyan A. G., Vassiliev D. G., Lidskii V. B.* Frequences of free oscillations of thin shell interacting with fluid // Functional Anal. Appl. – 1981. – **15**, No. 3. – P. 105–110.

[5] *Garlet P.* Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis. – Paris: Mayson, 1990.

[6] *Nazarov S., Pileckas K.* On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations // J. Reine Angew. Math. – 1993. – **438**. – P. 103–141.

[7] *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.

[8] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. — x+276 p.

[9] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.

[10] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.

[11] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[12] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.

[13] *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.

[14] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — Москва: Наука, 1985. — 144 с.

[15] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

[16] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[17] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[18] *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Scient. Math. Szeged. – 1961. – **22**, No. 3–4. – P. 269–282.

[19] *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1966. – **27**. – P. 167–171.

[20] *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, No. 1–2. – P. 91–92.

[21] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.