Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 305–317

УДК 517.5

В. В. Шкапа

(Інститут математики НАН України, Київ)

Оцінки найкращих M-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці

vshkapa@ukr.net

We obtain exact order estimates of the best m-term and orthogonal trigonometric approximations of functions of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$ in the space L_∞.

Отримано точні за порядком оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$ у просторі L_∞.

1. Вступ

У роботі встановлюються порядкові оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$ у рівномірній метриці. Наведемо спочатку необхідні позначення та означення, які будуть нами використовуватися.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \leq q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)| \,, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$.

Нехай далі $\psi \neq 0$ довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1] (див. також [2, с. 25], [3, с. 132]), назвемо (ψ, β) - похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{\beta,p}$ (див., наприклад, [2, с. 25]).

Нехай для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta signk}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi, \pi]$ функції $D^{\beta}_{\psi}(x)$. Тоді кожну функцію $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)D^{\beta}_{\psi}(t)dt, \tag{1}$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1,\ 1 \leq p \leq \infty$ (див., наприклад, [3, с. 135]). Зазначимо, що функції D^{β}_{ψ} називають аналогами ядер Бернуллі.

Розглянемо для $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$ апроксимативні характеристики

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot)\|_q \ , \tag{2}$$

$$e_m^{\perp}(f)_q = \inf_{\Theta_m} \left|\left| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot) \right|\right|_q \ , \tag{3}$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа, $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}$.

Величину (2) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням, а (3) — найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q,$$

$$e_m^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^{\perp}(f)_q.$$

Величину $e_m(f)_2$ для функції однієї змінної було введено С. Б. Стєчкіним [4] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f)_q$ і $e_m(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації як індивідуальних функцій так і класів функцій відповідно. Перші оцінки величини $e_m(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були отримані Р. С. Ісмагіловим [5]. Систематичне вивчення величини (2) на класах періодичних функцій багатьох змінних С. Л. Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та С. М. Нікольського H^r_p було розпочато В. Н. Темляковим [6]. Подальші дослідження величин $e_m(F)_q$ на класах функцій $W^r_{p,\alpha}$ та H^r_p отримали продовження у роботах Е. С. Белінського [7, 8], А. С. Романюка [9–13] та ін. Величина (3) була введена Е. С. Белінським (див., наприклад, [14]) і останнім часом дослідження її на тих або інших функціональних класах отримало потужний розвиток в роботах багатьох авторів [15–23]. В цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Позначимо далі через B множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r}$, $\gamma > 0$, $r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ ($B \ge C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі константи C_i, $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення.

2. Допоміжні твердження

В цьому пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які нам знадобляться при доведенні отриманих результатів. Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \{k : \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s\}$$

і для $f \in L_1$ покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема А (див., наприклад, [24, с. 132]). *Нехай T_n — тригонометричний поліном,*

$$T_n(x) = \sum_{k \le n} c_k e^{ikx},$$

де $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$. Тоді при $1 \le q \le p \le \infty$ має місце співвідношення

$$\|T_n\|_p \ll n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|T_n\|_q. \tag{4}$$

Співвідношення (4) було встановлено С. М. Нікольським і отримало назву "нерівність різних метрик".

Теорема Б (Марцинкевича) [25, т. 2, с. 346]. *Нехай задано послідовність $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \le M$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum\limits_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu}-1} |\lambda_{\mu+1}-\lambda_{\mu}| \le M,\ \nu \in \mathbb{N}$. *Тоді, якщо*

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q,\ 1<q<\infty,$$

то

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q$$

і існує константа C_3, яка залежить тільки від q, така, що

$$\|F\|_q \le C_3(q)M\|f\|_q.$$

Теорема B [26]. *Нехай $1<q<\infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

3. Основні результати

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $1<p<\infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{a+\varepsilon}, a=\max\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$e_m(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \asymp \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},$$

де $b_+=\max\{b;0\}$.

Доведення. Отримаємо оцінку зверху. Спочатку розглянемо випадок $1<p\le 2$. Виберемо $l \in \mathbb{N}$ з нерівності $2^{l-1} \le m < 2^l$ і для $j \in \mathbb{N}$ покладемо

$$k_j=\begin{cases} 0, & j \le l, \\ \left[\frac{2^{\frac{j}{p}}\psi(2^j)}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)}2^l\right]+1, & l<j\le \gamma l, \\ 0, & j>\gamma l, \end{cases} \tag{5}$$

де $[d]$ — ціла частина числа d і $\gamma > 1$ — деяке число, яке буде вказано нижче.

Тоді, враховуючи той факт, що $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j \ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} \sum_{l<j\le\gamma l} 2^{\frac{j}{p}}\psi(2^j) + \gamma l =$$

$$= \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} \sum_{l<j\le\gamma l} 2^{j(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^j)2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^l) \sum_{l<j\le\gamma l} 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^l)2^{-l\varepsilon} + \gamma l \ll 2^l.$$

Таким чином, для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ можемо записати

$$e_m(f)_\infty \le \sum_{l<j\le\gamma l} e_{k_j}(\delta_j(f))_\infty + \sum_{j>\gamma l} \|\delta_j(f)\|_\infty = I_1 + I_2. \tag{6}$$

Оцінимо спочатку I_1. Для проведення наступних міркувань скористаємось оцінкою з [27, наслідок 5.1], яка відповідно до наших позначень має вигляд

$$e_{k_j}(\delta_j(f))_\infty \ll \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j}\|\delta_j(f)\|_2, \tag{7}$$

(тут і нижче $\log := \log_2$).

Далі, використавши (7) і теорему А можемо записати

$$I_1 \ll \sum_{l<j\le\gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j}\|\delta_j(f)\|_2 \ll$$

$$\ll \sum_{l<j\le\gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j} 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|\delta_j(f)\|_p. \tag{8}$$

Для того, щоб продовжити оцінку покажемо, що виконується співвідношення

$$\|\delta_j(f)\|_p \ll \psi(2^j)\|\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p. \tag{9}$$

З цією метою розглянемо $\delta_j(f_\beta^\psi)$ і оператор Λ, що задається послідовністю

$$\{\lambda_k\} = \left\{ \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^j)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} \right\}, \ 2^{j-1} \le |k| < 2^j,$$

і який діє, як мультиплікатор.

Подіявши оператором Λ на $\delta_j(f_\beta^\psi)$, отримаємо

$$\Lambda \delta_j(f_\beta^\psi) = \Lambda \sum_{k\in\rho(j)} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\rho(j)} \frac{1}{\psi(2^j)} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{\psi(2^j)} \delta_j(f). \qquad (10)$$

Переконаємось, що послідовність $\{\lambda_k\}$ задовольняє умови теореми Б. Зауважимо, що для цього достатньо перевірити виконання теореми Б для додатніх k таких, що $2^{j-1} \le k < 2^j$.

Оскільки $\psi \in B$ і $2^{j-1} \le k < 2^j$, то виконуються умови:

$$1) \ |\lambda_k| = \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^j)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| = \frac{\psi(k)}{\psi(2^j)} \le M,$$

$$2) \ \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^j)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^j)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2^j)} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} (\psi(k) - \psi(k+1)) \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2^j)} (\psi(2^{j-1}) - \psi(2^j)) \le \frac{\psi(2^{j-1})}{\psi(2^j)} \le M.$$

Таким чином, за теоремою Б має місце нерівність

$$\|\Lambda \delta_j(f_\beta^\psi)\|_p \le C_4(p) \|\delta_j(f_\beta^\psi)\|_p. \qquad (11)$$

З іншого боку, в силу рівності (10)

$$\|\Lambda \delta_j(f_\beta^\psi)\|_p = \frac{1}{\psi(2^j)} \|\delta_j(f)\|_p. \qquad (12)$$

Співставивши (11) і (12), приходимо до оцінки (9).

Далі, оскільки виконується співвідношення (9), то з урахуванням (5), і того, що $\psi \in B$ і $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, продовжимо оцінку (8):

$$I_1 \ll \sum_{l<j\leq\gamma l} \left(2^j 2^{-\frac{j}{p}} \psi^{-1}(2^j) 2^{-l} 2^{\frac{l}{p}} \psi(2^l)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\log 2^j - \log\left(2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) 2^{-\frac{l}{p}} \psi^{-1}(2^l) 2^l\right)\right) 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \psi(2^j) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}} 2^{\frac{l}{2p}} \psi^{\frac{1}{2}}(2^l) \sum_{l<j\leq\gamma l} \psi^{\frac{1}{2}}(2^j) 2^{\frac{j}{2p}} \left(j - \frac{j}{p} + \frac{l}{p} - l\right) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}} 2^{\frac{l}{2p}} \psi^{\frac{1}{2}}(2^l) \sum_{l<j\leq\gamma l} \psi^{\frac{1}{2}}(2^j) 2^{\frac{j}{2}(\frac{1}{p}+\varepsilon)} 2^{-\frac{j\varepsilon}{2}} (j-l) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}} 2^{\frac{l}{2p}} \psi^{\frac{1}{2}}(2^l) \psi^{\frac{1}{2}}(2^l) 2^{\frac{l}{2}(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \sum_{l<j\leq\gamma l} 2^{-\frac{j\varepsilon}{2}} (j-l) \ll$$

$$\ll \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}. \tag{13}$$

Перейдемо до оцінки I_2. Використовуючи послідовно теорему А, оцінку (9), а також враховуючи, що $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, маємо

$$I_2 = \sum_{j>\gamma l} \|\delta_j(f)\|_\infty \ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \|\delta_j(f)\|_p \ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \|\delta_j(f^\psi_\beta)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \sum_{j>\gamma l} 2^{-j\varepsilon} \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l \frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Співставивши (6), (13) і (14), отримуємо

$$e_m(f)_\infty \ll \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} + \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l \frac{1}{p}} =$$

$$= \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(1 + \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l \frac{1}{p}} \left(\psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(1 + \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} 2^{-\gamma l \varepsilon} \left(\psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\right). \tag{15}$$

Оскільки $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, то з (15) приходимо до оцінки

$$e_m(f)_\infty \ll$$
$$\ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\left(1+\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)}2^{-\gamma l\varepsilon}\left(\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\right) \ll$$
$$\ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\left(1+2^{l\varepsilon(1-\gamma)}2^{\frac{l}{2}}\right).$$

Таким чином, поклавши $\gamma > (\frac{1}{2\varepsilon}+1)$, і врахувавши вибір l, з останньої оцінки отримуємо

$$e_m(f)_\infty \ll \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Нехай тепер $2 < p < \infty$. В такому випадку шукана оцінка випливає із вкладення $L^\psi_{\beta,p} \subseteq L^\psi_{\beta,2}$ і оцінки (16) при $p = 2$.

Оцінку зверху доведено.

Для встановлення оцінки знизу достатньо скористатися результатом отриманим в роботі [28]:

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_q \gg \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},\ 1 < q < \infty,$$

та співвідношенням:

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty \gg e_m(L^\psi_{\beta,p})_q.$$

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > \frac{1}{p}$ порядок величини $e_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty,\ 1 \le p \le \infty$ було встановлено у роботі [29].

Зауваження 2. В теоремі 1 вдалося покращити оцінку зверху величини $e_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty$, яка отримана в роботі [28]:

$$\psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+} \ll e_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty \ll \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}\sqrt{\log m}.$$

В наступному твердженні встановимо точну по порядку оцінку величини $e^\perp_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty,\ 1 < p < \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді має місце оцінка*

$$e^\perp_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху. Нехай l і m такі, що $2^l < m \le 2^{l+1}$. Використовуючи послідовно нерівність Мінковського, теорему A та (9), маємо

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \ll \Big\| f - \sum_{j<l} \delta_j(f) \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{j\ge l} \delta_j(f) \Big\|_\infty \ll \sum_{j\ge l} \|\delta_j(f)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{j\ge l} 2^{\frac{j}{p}} \|\delta_j(f)\|_p \ll \sum_{j\ge l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \|\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p \ll \sum_{j\ge l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j). \tag{17}$$

Прийнявши до уваги, що послідовність $\psi(t) t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, продовжимо оцінку (17)

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \ll \sum_{j\ge l} 2^{j(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \psi(2^j) 2^{-j\varepsilon} \ll 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \psi(2^l) \sum_{j\ge l} 2^{-j\varepsilon} \ll$$

$$\ll \psi(2^l) 2^{l\frac{1}{p}} \ll \psi(m) m^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінку зверху доведено.

Для доведення оцінки знизу скористаємось теоремою B. Нехай Θ_m є довільний набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$, і для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$

$$S_{\Theta_m}(f,x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{i n_k x}.$$

Тоді, враховуючи (1), можемо записати

$$I_3 = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \Big\| f - S_{\Theta_m}(f) \Big\|_\infty =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \Big\| \varphi * D^{\beta}_{\psi} - \varphi * \sum_{k\in\Theta_m} e^{ikx} * D^{\beta}_{\psi} \Big\|_\infty . \tag{18}$$

Далі, поклавши

$$t_m(x) = \sum_{k\in\Theta_m} e^{ikx} * D^{\beta}_{\psi},$$

із (18) будемо мати

$$I_3 = \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \|\varphi * (D^{\beta}_{\psi} - t_m)\|_\infty = \|D^{\beta}_{\psi} - t_m\|_{p'} \ge e_m^{\perp}(D^{\beta}_{\psi})_{p'},$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Звідси, скориставшись теоремою B, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$.

Теорему 2 доведено.

Порівняємо результати теорем 1 та 2. В першу чергу зазначимо, що безпосередньо з означення величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ і $e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ можемо записати

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \le e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}.$$

Далі, співставивши результати теореми 1 і 2 отримуємо, що між величинами $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ та $e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ у випадку $1 < p \le 2$ має місце співвідношення

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp m^{\frac{1}{2}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$$

Якщо ж $2 < p < \infty$, то справедливе таке співвідношення

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp m^{\frac{1}{p}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}.$$

Зауваження 3. У випадку $\psi(|k|)=|k|^{-r}$, $r>\frac{1}{p}$ порядок величини $e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, $1<p<\infty$ встановлено А. С. Романюком (див., наприклад, [23, с. 140]).

Література

[1] *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – Препригт 83.10. – 57 с.

[2] *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наукова думка. – 1987. – 286 с.

[3] *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2-х т. – Киев: Наукова думка. – 2002. – Т.1. – 427 с.

[4] *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.

[5] *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161–178.

[6] *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 301–305.

[7] *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294–1297.

[8] *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**, – С. 46–47.

[9] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С.1535–1547.

[10] *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.

[11] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II. // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, № 10. — с.1411–1423.

[12] *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097–1111.

[13] *Романюк А. С.* Наилучшие $M-$членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61–100.

[14] *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций с ограниченной смешанной производной // В кн.: Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. – с.16–33.

[15] *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // В кн. Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1992.– С. 112–118.

[16] *Романюк А. С.* Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 80–89.

[17] *Федоренко А. С.* Про найкращі $m-$членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1719–1721.

[18] *Консевич Н. М.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 1. – С. 23–29.

[19] *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки – 2002. – **71**, № 1.— С. 109–121.

[20] *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69–98.

[21] *Стасюк С. А.* Найкращі $M-$членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 647–656.

[22] *Войтенко С. П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1473–1484.

[23] *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. – Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — 352 с.

[24] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1977. — 456 с.

[25] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – Москва: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с. – Т.2. – 537 с.

[26] *Шкапа В. В.* Найкращиі ортогональні тригонометричні наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**.

[27] *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29–48.

[28] *Федоренко А .С.* О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной // В кн. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 3. – С. 250–258.

[29] *Belinskii E. S.* Decomposition theorems and approximation by a "floating" system of exponentials // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **350**, № 1. – P. 43–53.