Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 7–34

УДК 517.956.223

А. В. Аноп

(Інститут математики НАН України, Київ)

Еліптичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у просторах узагальненої гладкості

ahlv@ukr.net

In Hörmander inner product spaces, we investigate an elliptic-boundary value problem for a system of linear differential equations given in a bounded Euclidean C^{∞}-domain. We prove that the operator corresponding to this problem is bounded and Fredholm in appropriate pairs of these spaces. We establish an a priori estimate for the solutions to the problem and investigate their regularity. We find new sufficient conditions under which given generalized partial derivatives of the solutions should be continuous.

У гільбертових просторах Хермандера досліджена еліптична крайова задача для системи лінійних диференціальних рівнянь, заданих в обмеженій евклідовій області класу C^{∞}. Доведено, що оператор, відповідний такій задачі, є обмежений і нетерів у підходящих парах цих просторів. Отримана апріорна оцінка розв'язків задачі і досліджена їх регулярність. Знайдено нові достатні умови неперервності заданих узагальнених частинних похідних розв'язків.

1. Вступ

У теорії еліптичних диференціальних рівнянь важлива роль належить просторам Соболєва. Еліптичні крайові задачі мають фундаментальні властивості в соболєвській шкалі: нетеровість (тобто скінченність індексу задачі), апріорні оцінки розв'язків, локальне підвищення регулярності розв'язків та інші (див, наприклад, монографії [1–8], довідник [9] і огляд [10]). З точки зору застосувань цих властивостей, зокрема, в спектральній теорії диференціальних операторів, найбільш корисна гільбертова шкала просторів Соболєва (див., наприклад, [2, 3, 6]).

Втім для низки важливих задач теорії диференціальних рівнянь і математичного аналізу соболєвська шкала не є достатньо тонко градуйованою [4, 11–16]. Тому виникає потреба у використанні більш тонко градуйованих шкал, що утворені функціональними просторами узагальненої гладкості. Для останніх показником гладкості функцій або розподілів служить не число, а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (дуальних до просторових змінних відносно перетворення Фур'є). Систематичне вивчення таких просторів було започатковано Л. Хермандером [4, гл. II] і Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [17]. В останні десятиліття простори узагальненої гладкості є предметом різнобічних досліджень (див., наприклад, роботи [18–20] і наведену там літературу). Ці простори знайшли важливі застосування до рівнянь з частинними похідними [4, 11, 12, 14, 15, 16], у спектральній теорії диференціальних операторів [15, 16, 21], до інтегральних рівнянь [22], у теорії випадкових процесів [13].

Так, недавно В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем була побудована теорія розв'язності еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу (див. статті [23–31], огляд [32] і монографії [15, 16]). Для цих просторів показником гладкості розподілів служить довільна радіальна функція, правильно змінна за Й. Караматою на нескінченності. В основі цієї теорії лежить метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, зокрема, соболєвських. Він дозволив цілком перенести класичну „соболєвську" теорію еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач на уточнену соболєвську шкалу. Остання має низку цікавих застосувань при дослідженні гладкості розв'язків еліптичних рівнянь і в спектральній теорії еліптичних операторів.

Використовуючи цей метод інтерполяції, можна поширити низку теорем про характер розв'язності еліптичних рівнянь на клас усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно пар гільбертових просторів Соболєва. Цей клас був конструктивно описаний в [33, 34, 35] і названий розширеною соболєвською шкалою (див. також [15, 16, п. 2.4]). Він складається (з точністю до еквівалентності норм) з усіх гільбертових просторів Хермандера H^{φ}, для яких показник гладкості $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ є RO-змінною функцією за В. Г. Авакумовичем на нескінченності. Цей клас містить у собі уточнену соболєвську шкалу.

Мета роботи — дослідити характер розв'язності загальних еліптичних крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь (однорідних за порядком) в розширеній соболєвській шкалі. Серед основних результатів, що будуть доведені, теорема про нетеровість оператора, відповідного такій задачі, та теорема про локальну регулярність її розв'язків у гільбертових просторах Хермандера.

Відмітимо, що еліптичні крайові для одного еліптичного рівняння досліджені авторкою в розширеній соболєвській шкалі в роботах [36, 37]. У статтях Т. М. Зінченко і О. О. Мурача [38–42] досліджені у цій шкалі різні класи еліптичних систем на многовидах без краю.

Ця робота складається з восьми пунктів. Пункт 1 є вступ. У п. 2 наведено означення загальної еліптичної крайової задачі для еліптичної системи диференціальних рівнянь, однорідних за порядком. Пункт 3 присвячений функціональним просторам узагальненої гладкості, які утворюють розширену соболєвську шкалу. У п. 4 сформульовано основні результати роботи про властивості розглянутої задачі в розширеній соболєвській шкалі. У наступному п. 5 розглянуто застосування цієї шкали до дослідження узагальнених розв'язків задачі на їх неперервну диференційовність заданого порядку. Пункт 6 присвячений ключовому методу дослідження — інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів та інтерполяційним властивостям розширеної соболєвської шкали. У п. 7 доведено усі теореми, сформульовані в пп. 4 і 5. Заключний п. 8 містить висновки до роботи.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — обмежена (відкрита) область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$. Припускаємо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким компактним многовидом розмірності $n-1$ без краю. Як завжди, $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$.

В області Ω розглядається система p лінійних диференціальних рівнянь заданого порядку m:

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k}\, u_k = f_j \ \text{ в } \ \Omega, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{1}$$

Тут кожне

$$A_{j,k} \equiv A_{j,k}(x, D) \equiv \sum_{|\mu| \leq m} a^{\mu}_{j,k}(x) D^{\mu}$$

є скалярний лінійний диференціальний вираз порядку $\leq m$, заданий в замкнутій області $\overline{\Omega}$. Усі його коефіцієнти $a^{\mu}_{j,k}(x)$ є комплекснозначні функції класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. У формулі (1) і далі використовуються такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^{\mu} := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, де $D_l := i\partial/\partial x_l$. Окрім того, $\xi^{\mu} := \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ для вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Пов'яжемо з системою (1) квадратну матрицю

$$A_0(x, \xi) := \bigl(A^{(0)}_{j,k}(x, \xi)\bigr)_{j,k=1}^{p},$$

залежну від $x \in \overline{\Omega}$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$. Тут

$$A^{(0)}_{j,k}(x, \xi) := \sum_{|\mu| = m} a^{\mu}_{j,k}(x) \xi^{\mu}$$

є головний символ диференціального виразу $A_{j,k}$ у випадку, коли $\operatorname{ord} A_{j,k} = m$, або $A^{(0)}_{j,k}(x, \xi) \equiv 0$ у випадку, коли $\operatorname{ord} A_{j,k} < m$.

Припускаємо, що система (1) є еліптичною в замкнутій області $\overline{\Omega}$, тобто $\det A_0(x, \xi) \neq 0$ для кожної точки $x \in \overline{\Omega}$ і довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Якщо $n \geq 3$, то з еліптичності цієї системи випливає [10, с. 53], що однорідний поліном $\det A_0(x, \xi)$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$ має парний порядок, тобто $mp = 2q$ для деякого $q \in \mathbb{N}$. Припускаємо, що ця властивість порядку виконується і у випадку $n = 2$.

Серед розв'язків системи (1) розглядаємо ті, що задовольняють q крайовим умовам

$$\sum_{k=1}^{p} B_{j,k}\, u_k = g_j \ \text{ на } \ \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут кожне

$$B_{j,k} \equiv B_{j,k}(x,D) \equiv \sum_{|\mu|\leq m_j} b^{\mu}_{j,k}(x) D^{\mu}$$

є скалярний лінійний граничний диференціальний вираз порядку $\leq m_j$, заданий на межі Γ області Ω. Усі його коефіцієнти $b^{\mu}_{j,k}(x)$ є комплекснозначні функції класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Припускаємо, що усі числа m_j цілі і задовольняють умову $0 \leq m_j \leq m-1$.

Пов'яжемо з набором крайових умов (2) прямокутну матрицю

$$B_0(x,\xi) := \bigl(B^{(0)}_{j,k}(x,\xi)\bigr)_{\substack{j=1,\ldots,q,\\ k=1,\ldots,p}}$$

залежну від $x \in \Gamma$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$. Тут

$$B^{(0)}_{j,k}(x,\xi) := \sum_{|\mu|=m_j} b^{\mu}_{j,k}(x) \xi^{\mu}$$

є головний символ граничного диференціального виразу $B_{j,k}$ у випадку, коли $\operatorname{ord} B_{j,k} = m_j$, або $B^{(0)}_{j,k}(x,\xi) \equiv 0$ у випадку, коли $\operatorname{ord} B_{j,k} < m_j$.

Надалі припускаємо, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω. Це значить, що виконуються такі дві умови [9, с. 175]:

(i) Система (1) є правильно еліптичною на $\overline{\Omega}$, тобто для кожної точки $x \in \Gamma$ і для довільних лінійно незалежних векторів $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^n$ многочлен $\det A_0(x, \xi' + \eta\xi'')$ комплексної змінної η має точно q коренів $\eta^{+}_{j}(x;\xi',\xi'')$, $j = 1,\ldots,q$, з додатною уявною частиною і стільки же коренів з від'ємною уявною частиною (записаних з урахуванням їх кратності).

(ii) Крайові умови (2) накривають систему (1) на Γ (задовольняють умові Я. Б. Лопатинського), тобто для кожної точки $x \in \Gamma$ і для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ в точці x, рядки матриці

$$B_0(x, \tau + \eta\nu(x)) \cdot A^{\mathrm{c}}_0(x, \tau + \eta\nu(x)),$$

елементи якої розглядаються як многочлени комплексної змінної η, лінійно незалежні за модулем многочлена

$$\prod_{j=1}^{q} \bigl(\eta - \eta^{+}_{j}(x;\tau,\nu(x))\bigr).$$

Тут $A_0^c(x,\xi)$ — транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці $A_0(x,\xi)$, а $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$.

Відмітимо, що з умови (i) випливає еліптичність системи (1) на $\overline{\Omega}$. Обернене є вірним, якщо $n \geq 3$ [10, с. 53].

Мета роботи — дослідити властивості еліптичної крайової задачі (1), (2) у функціональних просторах узагальненої гладкості, які утворюють розширену соболєвську шкалу.

3. Розширена соболєвська шкала

Ця шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера H^{φ}, для яких показником гладкості розподілів служить довільний функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$. Наведемо означення класу RO і просторів H^{φ}.

Множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, для кожної з яких існують числа $a > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для довільних} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \in [1,a]$$

(сталі a і c можуть залежати від φ). Такі функції називають RO (або OR)-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем [43] у 1936 р. і достатньо вивчений (див. монографії [44, додаток 1] і [45, пп. 2.0 – 2.2]).

Цей клас припускає такий опис [44, с. 87]:

$$\varphi \in \mathrm{RO} \;\;\Leftrightarrow\;\; \varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \;\text{для}\; t \geq 1,$$

де функції $\beta, \gamma : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ вимірні за Борелем і обмежені.

Нам знадобиться наступна властивість класу RO [44, с. 88]. Для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \geq 1. \tag{3}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність в (3)}\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність в (3)}\};$$

тут $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ [46] (див. також [45, п. 2.1.2]).

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. Введемо спочатку простір H^φ на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Нам зручно трактувати розподіли як *анти*лінійні функціонали на відповідному просторі основних функцій. При цьому всі розподіли і функції припускаються комплекснозначними.

У просторі $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\varphi(\mathbb{R}^n)$. Він задає на $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і норму

$$\|w\|_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)}.$$

Цей простір сепарабельний; множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ щільна в ньому.

Простір $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [4, п. 2.2] (див також його монографію [11, п. 10.1]). А саме, $H^\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [17, § 2].

Якщо функція φ степенева: $\varphi(t) \equiv t^s$, то $H^\varphi(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертів) простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Узагалі,

$$s_0 < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < s_1 \;\Rightarrow\; H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\varphi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

причому обидва вкладення неперервні й щільні.

Згідно з [35], клас функціональних просторів

$$\bigl\{H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n}):\varphi\in\mathrm{RO}\bigr\} \tag{5}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^{n}$. Він виділений і досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем в [33] (див. також їх монографії [15, 16, п. 2.4.2]).

Нам потрібні її аналоги для евклідової області Ω і замкненого компактного многовиду Γ. Ці аналоги будуються стандартним чином на основі класу (5) (див. [47, с. 4] і [34, с. 30]). Наведемо відповідні означення. Тепер $n\geq 2$.

Лінійний простір $H^{\varphi}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w\in H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n})$. Норма у ньому означена за формулою

$$\|v\|_{H^{\varphi}(\Omega)}:=\inf\bigl\{\,\|w\|_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n})}:\,w\in H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n}),\;w=v\;\text{ в }\;\Omega\,\bigr\},$$

де $v\in H^{\varphi}(\Omega)$. Простір $H^{\varphi}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми, оскільки він є факторпростір простору $H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n})$ за підпростором

$$\bigl\{w\in H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n}):\,\mathrm{supp}\,w\subseteq\mathbb{R}^{n}\setminus\Omega\bigr\}.$$

Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{\varphi}(\Omega)$.

Лінійний простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Це означає таке. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\alpha_{j}:\mathbb{R}^{n-1}\leftrightarrow\Gamma_{j}$, де $j=1,\ldots,\varkappa$. Тут відкриті множини $\Gamma_{1},\ldots,\Gamma_{\varkappa}$ складають покриття многовиду Γ. Нехай також функції $\chi_{j}\in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j=1,\ldots,\varkappa$, утворюють розбиття одиниці на Γ, яке задовольняє умову $\mathrm{supp}\,\chi_{j}\subset\Gamma_{j}$. Тоді

$$H^{\varphi}(\Gamma):=\bigl\{h\in\mathcal{D}'(\Gamma):\,(\chi_{j}h)\circ\alpha_{j}\in H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})\;\text{ для усіх }\;j=1,\ldots,\varkappa\bigr\}.$$

Тут $\mathcal{D}'(\Gamma)$ є лінійний топологічний простір усіх розподілів на многовиді Γ, а $(\chi_{j}h)\circ\alpha_{j}$ є представлення розподілу h в локальній карті α_{j}. У просторі $H^{\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(h_{1},h_{2})_{H^{\varphi}(\Gamma)}:=\sum_{j=1}^{\varkappa}\,((\chi_{j}h_{1})\circ\alpha_{j},(\chi_{j}\,h_{2})\circ\alpha_{j})_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^{\varphi}(\Gamma)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [34, с. 32]. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\varphi}(\Gamma)$.

Означені щойно функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали

$$\{H^{\varphi}(\Omega) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \quad \text{і} \quad \{H^{\varphi}(\Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \tag{6}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\varphi}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку s.

Відмітимо потрібні у подальшому властивості шкал (6), пов'язані з вкладеннями просторів.

Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{RO}$. Відношення функцій φ_1/φ_2 обмежене в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\varphi_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varphi_1}(\Omega)$. Це вкладення щільне і неперервне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\varphi_1(t)/\varphi_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ця властивість зберігає силу, якщо в ній замінити Ω на Γ. Вона є прямим наслідком теорем 2.2.2 і 2.2.3 з монографії Л. Хермандера [4, сс. 55, 56].

Окремим і важливим її випадком є такі аналоги вкладень (4): якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$, то

$$\begin{gathered} H^{(s_1)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Omega), \\ H^{(s_1)}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Gamma). \end{gathered} \tag{7}$$

Ці вкладення неперервні, щільні і компактні.

Наступна властивість пов'язує простори Хермандера з просторами неперервно диференційовних функцій. Нехай задано функцію $\alpha \in \mathrm{RO}$ і ціле число $r \geq 0$. Тоді

$$\int_{1}^{\infty} t^{2r+n-1} \alpha^{-2}(t)\, dt < \infty \quad \Leftrightarrow \quad H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{r}(\overline{\Omega}). \tag{8}$$

Це вкладення неперервне. Наведена властивість є наслідком теореми 2.2.7 з монографії Л. Хермандера [4, с. 59]. Також вірний її аналог для просторів, заданих на Γ (див. [39, лема 2]).

4. Основні результати

Запишемо еліптичну крайову задачу (1), (2) в матричній формі:

$$Au = f \text{ в } \Omega, \quad Bu = g \text{ на } \Gamma.$$

Тут

$$A := A(x, D) := \bigl(A_{j,k}(x, D)\bigr)_{j,k=1}^{p}, \quad x \in \overline{\Omega},$$
$$B := B(x, D) := \bigl(B_{j,k}(x, D)\bigr)_{\substack{j=1,\ldots,q,\\ k=1,\ldots,p}} \quad x \in \Gamma,$$

є матричні диференціальні вирази, а

$$u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p), \quad f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p), \quad g = \mathrm{col}(g_1, \ldots, g_q)$$

є функціональні стовпці.

Сформулюємо основні результати статті про властивості цієї задачі в розширеній соболєвській шкалі.

Позначимо через $(\cdot, \cdot)_\Omega$ та $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ скалярні добутки у просторах $L_2(\Omega)$ та $L_2(\Gamma)$ відповідно, а також розширення за неперервністю цих скалярних добутків.

Покладемо $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$ (це робимо для того, щоб не зазначати аргумент t в індексі, який служить показником гладкості для просторів Хермандера). Зауважимо, що для довільних $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$ виконується така очевидна властивість: $\varphi\rho^s \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_j(\varphi\rho^s) = \sigma_j(\varphi) + s$ для кожного $j \in \{0, 1\}$.

Теорема 1. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. Тоді відображення $u \to (Au, Bu)$, де $u \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^p$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого і нетеревого оператора*

$$(A, B) : \bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p \to \mathcal{H}^\varphi(\Omega, \Gamma) := \tag{9}$$
$$:= (H^\varphi(\Omega))^p \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{m-m_j-1/2}}(\Gamma).$$

Ядро N оператора (9) *задовольняє умову $N \subset (C^\infty(\overline{\Omega}))^p$ і не залежить від φ. Область значень цього оператора складається з усіх вектор-функцій $(f, g) \in \mathcal{H}^\varphi(\Omega, \Gamma)$ таких, що*

$$\sum_{j=1}^{p}(f_j, w_j)_\Omega + \sum_{j=1}^{q}(g_j, h_j)_\Gamma = 0$$

для довільної вектор-функції

$$(w,h) := (w_1,\dots,w_p,\, h_1,\dots,h_q) \in W.$$

Тут W *— деякий не залежний від* φ *скінченномірний підпростір простору*

$$(C^\infty(\overline{\Omega}))^p \times (C^\infty(\Gamma))^q.$$

Індекс оператора (9) *дорівнює числу* $\dim N - \dim W$ *та не залежить від* φ.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T: X \to Y$, де X, Y є банахові простори, називається нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $\operatorname{coker} T := E_2/T(X)$ скінченномірні. Нетерів оператор T має замкнену область значень і скінченний індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/\,T(X)).$$

Відмітимо, що простір W є ядром оператора, спряженого до оператора (9), якщо дуальність відповідних функціональних просторів розглядати відносно півторалінійних форм $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$.

У випадку, коли $N = \{0\}$ і $N_* = \{0\}$, оператор (9) здійснює ізоморфізм між просторами $(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p$ і $\mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації він породжує ізоморфізм між їх підпросторами, які мають скінченну ковимірність. Ці підпростори зручно виділяти у такий спосіб.

Зобразимо простори, в яких діє оператор (9) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$\begin{gathered}\bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p = N \dotplus \Biggl\{u \in (H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p : \\ \sum_{k=1}^{p} (u_k, v_k)_\Omega = 0 \text{ для усіх } (v_1,\dots,v_p) \in N\Biggr\}, \\ \mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma) = W \dotplus (A,B)\bigl((H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p\bigr).\end{gathered}$$

Позначимо через P і Q косі проектори просторів $(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p$ і $\mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma)$ відповідно на другі доданки в цих сумах паралельно першим доданкам. Ці проектори (як відображення) не залежать від φ.

Теорема 2. *Для довільного* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > -1/2$, *звуження оператора* (9) *на підпростір* $P((H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p)$ *є ізоморфізмом*

$$(A,B) : P\bigl((H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p\bigr) \leftrightarrow Q\bigl(\mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma)\bigr). \tag{10}$$

Дослідимо властивості розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2) в розширеній соболєвській шкалі.

Попередньо зауважимо таке. Позначимо

$$H^{m-1/2+}(\Omega) := \bigcup_{s>m-1/2} H^{(s)}(\Omega) = \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathrm{RO}:\\ \sigma_0(\alpha)>m-1/2}} H^{\alpha}(\Omega)$$

(остання рівність виконується з огляду на вкладення (7)). У лінійному просторі $H^{m-1/2+}(\Omega)$ введена топологія індуктивної границі. Згідно з теоремою 1, для кожної вектор-функції $u \in (H^{m-1/2+}(\Omega))^p$ коректно означений вектор

$$(f,g) := (A,B)u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^p \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^q.$$

Тут $\mathcal{D}'(\Omega)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів, заданих в області Ω. Вектор-функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) з правої частиною (f,g). Він задовольняє наступну апріорну оцінку.

Теорема 3. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. Тоді існує число $c = c(\varphi) > 0$ таке, що:*

$$\|u\|_{(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p} \leq c\,\big(\,\|(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|u\|_{(L_2(\Omega))^p}\big) \qquad (11)$$

для довільної функції $u \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p$. Тут c не залежить від u.

Дослідимо регулярність узагальненого розв'язку u в розширеній соболєвській шкалі.

Теорема 4. *Припустимо, що вектор-функція $u \in (H^{m-1/2+}(\Omega))^p$ є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2)*, праві частини якої задовольняють умову $(f,g) \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)$ для деякого параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. Тоді розв'язок $u \in (H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p$.*

Сформулюємо локальну версію цієї теореми. Нехай U— довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Покладемо $\Omega_0 := U \cap \Omega \neq \varnothing$ та $\Gamma_0 := U \cap \Gamma$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Введемо локальні аналоги просторів Хермандера на Ω і на Γ. Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. Покладемо

$$H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) := \big\{v \in \mathcal{D}'(\Omega) :\ \chi v \in H^{\alpha}(\Omega)$$
$$\text{для всіх } \chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0\big\},$$

Топологія у лінійному просторі $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ задається напівнормами $u\mapsto\|\chi u\|_{H^{\alpha}(\Omega)}$, де χ — довільна функція з означення цього простору. Аналогічно покладаємо

$$H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0):=\bigl\{h\in\mathcal{D}'(\Gamma):\,\chi\,h\in H^{\alpha}(\Gamma)$$
$$\text{для всіх } \chi\in C^{\infty}(\overline{\Gamma}) \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0\bigr\}.$$

Топологія у лінійному просторі $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ задається напівнормами $h\mapsto\|\chi h\|_{H^{\alpha}(\Gamma)}$, де χ є довільна функція з означення цього простору.

Теорема 5. *Припустимо, що вектор-функція* $u\in(H^{m-1/2+}(\Omega))^p$ *є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f\in\bigl(H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\bigr)^p, \tag{12}$$

$$g\in\prod_{j=1}^{q}H^{\varphi\rho^{m-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \tag{13}$$

для деякого параметра $\varphi\in\mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi)>-1/2$. *Тоді розв'язок*

$$u\in\bigl(H^{\varphi\rho^{m}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\bigr)^p. \tag{14}$$

Відмітимо, що у випадку, коли $\Gamma_0=\varnothing$, ця теорема говорить про локальну регулярність розв'язку в околах внутрішніх точок області Ω.

Наведені у цьому пункті теореми добре відомі у випадку соболєвських просторів, коли $\varphi(t)\equiv t^s$ і $s\geq 0$ (див., наприклад, монографії [5, п. 20.1] і [8, п. 14.4] та огляд [10, п. 6.3]). У більш загальному випадку, коли $\varphi(t)\equiv t^s$ і $s>-1/2$, ці теореми містяться у відповідних результатах, наведених у монографії [7, пп. 10.1, 10.5]. В роботі [28] ці теореми встановлені для уточненої соболєвської шкали, яка складається з просторів Хермандера H^{φ}, для яких функціональний параметр $\varphi\in\mathrm{RO}$ правильно змінюється на нескінченності за Й. Караматою.

5. Застосування

Як застосування розширеної соболєвської шкали наведемо достатню умову неперервності узагальнених частинних похідних узагальненого розв'язку u еліптичної крайової задачі (1), (2).

Теорема 6. *Нехай виконується умова теореми* 5. *Окрім того, припустимо, що*

$$\int\limits_1^\infty t^{2r-2m+n-1}\varphi^{-2}(t)dt<\infty \tag{15}$$

для деякого цілого $r\geq 0$. *Тоді* $u\in(C^r(\Omega_0\cup\Gamma_0))^p$.

Як окремий і важливий результат, наведемо достатню умову класичності узагальненого розв'язку u. Покладемо $\lambda:=\max\{m_1,\ldots,m_q\}$.

Теорема 7. *Припустимо, що вектор-функція* $u\in H^{m-1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f\in\bigl(H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\bigr)^p\cap\bigl(H^{\varphi_2}(\Omega)\bigr)^p, \tag{16}$$

$$g\in\bigoplus_{j=1}^{q}H^{\varphi_2\varrho^{m-m_j-1/2}}(\Gamma) \tag{17}$$

для деяких функціональних параметрів $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{RO}$ *таких, що* $\sigma_0(\varphi_1),\sigma_0(\varphi_2)>-1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{n-1}\varphi_1^{-2}(t)dt<\infty, \tag{18}$$

$$\int\limits_1^\infty t^{2\lambda-2m+n-1}\varphi_2^{-2}(t)dt<\infty. \tag{19}$$

Тоді розв'язок u *є класичним, тобто* $u\in(C^m(\Omega))^p\cap(C^\lambda(\overline{\Omega}))^p$.

6. Інтерполяція з функціональним параметром і простори Хермандера

Розширену соболєвську шкалу можна отримати методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Ця фундаментальна властивість зіграє ключову роль у доведенні теореми 1. У цьому зв'язку нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та деякі її властивості. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними гільбертовими просторами. Будемо слідувати [15, 16, п. 1.1].

Нехай задана впорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J є самоспряжений додатно визначений оператор у просторі X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається єдиним чином за парою X; він називається породжуючим оператором для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлені від нуля на кожному промені $[r, \infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. Згідно зі спектральною теоремою, у просторі X_0 означений (взагалі, необмежений) оператор $\psi(J)$ як борелівська функція від самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, через X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ є гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується таке. Якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо казати, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для деякої додатної угнутої функції $\psi_1(t)$. (Тут $\psi \asymp \psi_1$ значить обмеженість обох відношень ψ/ψ_1 і ψ_1/ψ на вказаній множині). Це випливає з теореми Ж. Пітре [48, 49] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного порядку (див. також монографію [50, с. 153]).

Сформулюємо згадану вище інтерполяційну властивість розширеної соболєвської шкали.

Твердження 1. *Нехай задані функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha\big(t^{1/(s_1-s_0)}\big) & \textit{при} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \textit{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{20}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконуються наступні рівності просторів з еквівалентністю норм в них:

$$\big[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\big]_\psi = H^\alpha(\Omega), \tag{21}$$

$$\big[H^{(s_0)}(\Gamma), H^{(s_1)}(\Gamma)\big]_\psi = H^\alpha(\Gamma) \tag{22}$$

Формула (15) доведена в [47, теорема 5.1], а (16) — в [15, теорема 2.21]. Зауважимо, що за умови твердження 3

$$\big[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\big]_\psi = H^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

з рівністю норм [15, теорема 2.19].

Відмітимо також ще дві важливі інтерполяційні властивості розширеної соболєвської шкали $\{H^\alpha(G) : \alpha \in \mathrm{RO}\}$, де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. Вона замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції з функціональним параметром і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$ (див. [15, п. 2.4.2] та [47].) Останній факт випливає з фундаментальної теореми В. І. Овчинникова [51, с. 511] про опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для заданої пари гільбертових просторів. Нагадаємо, що властивість (гільбертового) простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає наступне: а) виконуються неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) будь-який лінійний оператор $T : X_0 \to X_0$, обмежений на кожному з просторів X_0 и X_1, є також обмеженим і на просторі H.

Наприкінці цього пункту наведемо дві загальні властивості інтерполяції просторів, які будуть використані в доведеннях. Сформулюємо їх стосовно розглянутого методу інтерполяції.

Твердження 2. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на X_0 задане лінійне відображення T таке, що його звуження на простори X_j, де $j = 0, 1$,* *є обмеженими і нетеровими операторами $T : X_j \to Y_j$, які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ обмежений оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень рівна $Y_\psi \cap T(X_0)$.*

Твердження 3. *Нехай задане скінченне число припустимих пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ гільбертових просторів, де $k = 1, \ldots, p$. Тоді для довільного $\psi \in \mathcal{B}$ вірно*

$$\Bigl[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)},\, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p} \bigl[X_0^{(k)},\, X_1^{(k)}\bigr]_\psi$$

з рівністю норм.

Доведення цих властивостей наведено, наприклад, у монографії [15, пп. 1.1.5, 1.1.7].

7. Доведення

Дамо послідовно доведення теорем 1–7.

Доведення теореми 1. У соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і дійсне $s \geq 0$, ця теорема добре відома: див., наприклад, монографії [5, теореми 20.1.2, 20.1.8], [8, теорема 14.29] і огляд [10, Sec. 6.3]. У більш загальній ситуації, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і дійсне $s > -1/2$ ця теорема міститься в результаті, доведеному у монографії [7, теорема 10.1.1]. Він і буде використаний у доведенні.

Виберемо довільним чином функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. Виведемо теорему 1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. Виберемо дійсні числа l_0 і l_1 такі, що $-1/2 < l_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi) < l_1$. Відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$(A, B) : \bigl(H^{(l_i+m)}(\Omega)\bigr)^p \to \mathcal{H}^{(l_i)}(\Omega, \Gamma) \quad \text{при} \quad i = 0,\, 1, \tag{23}$$

що діють у парах просторів Соболєва. Тут позначено

$$\mathcal{H}^{(l_i)}(\Omega, \Gamma) := \bigl(H^{(l_i)}(\Omega)\bigr)^p \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(l_i+m-m_j-1/2)}(\Gamma).$$

Оператори (23) мають спільне ядро N та однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim W$. Окрім того, їх область значень

$$\begin{gathered}(A,B)\bigl((H^{(l_i+m)}(\Omega))^p\bigr) = \Bigl\{(f,g)\in\mathcal{H}^{(l_i)}(\Omega,\Gamma):\\ \sum_{j=1}^{p}(f_j,w_j)_\Omega + \sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma = 0 \text{ для всіх } (w,h)\in W\Bigr\}.\end{gathered} \tag{24}$$

Тут N і W є скінченновимірні простори з формулювання теореми 1, яка вірна у соболєвському випадку.

Означимо функцію ψ за формулою (20), в якій покладаємо $\alpha := \varphi$ та $s_0 := l_0$ і $s_1 := l_1$. Згідно з твердженням 1 функція ψ є інтерполяційним параметром. Тому на підставі твердженням 2 з обмеженості і нетеровості обох операторів (23) випливає обмеженість і нетеровість оператора

$$\begin{gathered}(A,B):\ \bigl[\bigl(H^{(l_0+m)}(\Omega)\bigr)^p, \bigl(H^{(l_1+m)}(\Omega)\bigr)^p\bigr]_\psi \to\\ \to \bigl[\mathcal{H}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi.\end{gathered} \tag{25}$$

Він є звуженням оператора (23), де $i = 0$. Покажемо, що (25) є оператор (9) з теореми 1.

На підставі твердження 1 маємо наступні рівності просторів з точністю до еквівалентності норм в них:

$$\bigl[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^\varphi(\Omega), \tag{26}$$

$$\bigl[H^{(l_0+m)}(\Omega), H^{(l_1+m)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{\varphi\varrho^m}(\Omega) \tag{27}$$

та

$$\bigl[H^{(l_0+m-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1+m-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_\psi = H^{\varphi\rho^{m-m_j-1/2}}(\Gamma) \tag{28}$$

для кожного номера $j\in\{1,\dots,q\}$. Щодо останніх двох рівностей зауважимо таке. Формулу (27) отримуємо, поклавши

$$\alpha := \varphi\varrho^m,\ \ s_0 := l_0+m,\ \ s_1 := l_1+m$$

у твердженні 1, а формулу (28) дістаємо, поклавши у тому ж твердженні

$$\alpha := \varphi\rho^{m-m_j-1/2},\ \ s_0 := l_0+m-m_j-1/2,\ \ s_1 := l_1+m-m_j-1/2.$$

При цьому в обох випадках функція ψ задовольняє (20).

З формули (27) випливає на підставі твердження 3 рівність

$$\big[\big(H^{(l_0+m)}(\Omega)\big)^p, \big(H^{(l_1+m)}(\Omega)\big)^p\big]_\psi = \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p. \tag{29}$$

Окрім того, з формул (26) і (28) випливає в силу цього ж твердження, що

$$\begin{aligned}&\big[\mathcal{H}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\big]_\psi = \big(\big[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\big]_\psi\big)^p \oplus \\ &\oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \big[H^{(l_0+m-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1+m-m_j-1/2)}(\Gamma)\big]_\psi = \mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma).\end{aligned} \tag{30}$$

Тепер на підставі (29) і (30) робимо висновок, що обмежений і нетерів оператор (25) діє у парі просторів (9). В силу твердження 2 ядро цього оператора та його індекс збігаються відповідно зі спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N - \dim N_*$ операторів (23). Окрім того, область значень цього оператора має такий опис:

$$\begin{aligned}&(A,B)\big((H^{\varphi\varrho^m}(\Omega))^p\big) = \mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big((H^{(l_0+m)}(\Omega))^p\big) = \\ &= \Big\{(f,g) \in \mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma) : \sum_{j=1}^{p} (f_j, w_j)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \\ &\qquad \text{для всіх } \ (w,h) \in W\Big\}.\end{aligned}$$

Тут також скористалися рівністю (24) і вкладенням

$$\mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma).$$

Залишається зауважити, що цей оператор є продовженням за неперервністю відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^p$.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. За теоремою 1 звуження оператора (9) на підпростір $P((H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p)$ є неперервним і взаємно однозначним відображенням цього підпростору на підпростір $Q(\mathcal{H}^\varphi(\Omega,\Gamma))$. Тому в силу теореми Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом. Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. Для довільної вектор-функції $u \in (H^{\varphi\rho^m}(\Omega))$ в силу теореми 2 маємо таке:

$$\|u\|_{(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p} \leq \|Pu\|_{(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p} + \|u - Pu\|_{(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p} \leq \\ \leq c_1\|(A,B)Pu\|_{\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|u - Pu\|_{(L_2(\Omega))^p}.$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (10), а c_2 є деяке додатне число, не залежне від u. Це число існує, оскільки вектор-функція $u - Pu$ належить скінченновимірному простору N, а в ньому еквівалентні всі норми, зокрема, норми у просторах $(H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p$ і $(L_2(\Omega))^p$. Звідси з урахуванням формул

$$(A,B)Pu = (A,B)u \quad \text{і} \quad \|u - Pu\|_{(L_2(\Omega))^p} \leq \|u\|_{(L_2(\Omega))^p}$$

маємо потрібну апріорну оцінку. (Зауважимо, що P є ортопроектором у гільбертовому просторі $(L_2(\Omega))^p$). Теорема 3 доведена.

Доведення теореми 4. За умовою, $u \in (H^{(l+m)}(\Omega))^p$ для деякого числа $l > -1/2$, а $(f,g) := (A,B)u \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Тому на підставі теореми 1 маємо таке:

$$(f,g) \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big((H^{(l+m)}(\Omega))^p\big) \subset (A,B)\big((H^{\varphi\varrho^m}(\Omega))^p\big).$$

Отже, поряд з умовою $(A,B)u = (f,g)$ виконується рівність $(A,B)v = (f,g)$ для деякої функції $v \in (H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p$. Тому $(A,B)(u-v) = 0$, де $u - v \in H^{m-1/2+}(\Omega)$. Звідси на підставі теореми 2 маємо включення

$$w := u - v \in N \subset \big(C^{\infty}(\overline{\Omega})\big)^p \quad \text{та} \quad u = v + w \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p.$$

Теорема 4 доведена.

Доведення теореми 5. За умовою, $u \in (H^{(l+m)}(\Omega))^p$ для деякого числа $l > -1/2$. Позначимо

$$\Upsilon := \big\{\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0\big\}.$$

Попередньо доведемо, що за умови теореми 5 виконується така імплікація для кожного номера $i \geq 1$:

$$\big(\chi u \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p + \big(H^{(l+i-1+m)}(\Omega)\big)^p \ \text{ для всіх } \ \chi \in \Upsilon\big) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \big(\chi u \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p + \big(H^{(l+i+m)}(\Omega)\big)^p \ \text{ для всіх } \ \chi \in \Upsilon\big). \tag{31}$$

Тут і далі у доведенні використовуємо алгебраїчні суми просторів.

Виберемо довільним чином номер $i \geq 1$ та припустимо, що посилка імплікації (31) істинна. Розглянемо довільну функцію $\chi \in \Upsilon$ та функцію $\eta \in \Upsilon$ таку, що $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp} \chi$. За умовою, $(f, g) \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma)$, де $(f, g) := (A, B)u$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з матричним диференціальним оператором (A, B), можемо записати таке:

$$\begin{gathered}\chi(f, g) = \chi(A, B)(\eta u) = (A, B)(\chi\eta u) - (A', B')(\eta u), \\ (A, B)(\chi u) = \chi(f, g) + (A', B')(\eta u). \end{gathered} \tag{32}$$

Тут (A', B') — деякий диференціальний оператор вигляду (A, B), порядки компонент якого менші принаймні на одиницю, ніж порядки відповідних компонент оператора (A, B). За умовою імплікації (32) маємо: $\eta u = u_1 + u_2$ для деяких вектор-функцій

$$u_1 \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p \quad \text{і} \quad u_2 \in \big(H^{(l+i-1+m)}(\Omega)\big)^p.$$

Звідси та в силу (32) можемо записати $(A, B)(\chi u) = F_1 + F_2$, де

$$F_1 := \chi(f, g) + (A', B')u_1 \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma), \tag{33}$$

$$F_2 := (A', B')u_2 \in \mathcal{H}^{(l+i)}(\Omega, \Gamma). \tag{34}$$

Пояснимо останні два включення. Тут $\mathcal{H}^{(s)}(\Omega, \Gamma)$ позначає простір $\mathcal{H}^{\alpha}(\Omega, \Gamma)$ у соболєвському випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^s$ і $s \in \mathbb{R}$. Оскільки компонентами $\operatorname{ord}(A', B') \leq \operatorname{ord}(A, B) - 1$, то відображення $v \mapsto (A'v, B'v)$, де $v \in (C^{\infty}(\overline{\Omega}))^p$, продовжується за неперервністю до обмеженого оператора

$$(A', B') : \big(H^{(s+m)}(\Omega)\big)^p \to \mathcal{H}^{(s+1)}(\Omega, \Gamma) \quad \text{для кожного} \quad s \geq 0.$$

Звідси, де беремо $s := l + i - 1$, та з включення $u_2 \in (H^{(l+i-1+m)}(\Omega))^p$ випливає (34).

Далі, з обмеженості операторів

$$(A', B') : (H^{(l_i+m)}(\Omega))^p \to \mathcal{H}^{(l_i+1)}(\Omega, \Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(l_i)}(\Omega, \Gamma) \ \text{ при } \ i = 0, 1,$$

випливає в силу інтерполяційних формул (29) і (30) обмеженість оператора

$$\begin{aligned}(A', B') : \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p = \big[\big(H^{(l_0+m)}(\Omega)\big)^p, \big(H^{(l_1+m)}(\Omega)\big)^p\big]_{\psi} \to \\ \to \big[\mathcal{H}^{(l_0)}(\Omega, \Gamma), \mathcal{H}^{(l_1)}(\Omega, \Gamma)\big]_{\psi} = \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma). \end{aligned} \tag{35}$$

Тут числа l_0 і l_1 та інтерполяційний параметр ψ такі, як у доведенні теореми 1. Тепер формула (33) є наслідком (35) та включень

$$\chi(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)\quad \text{і}\quad u_1\in\bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p.$$

Скористаємося проектором Q і теоремою 2 (у соболєвському випадку також). З рівності $(A,B)(\chi u)=F_1+F_2$ та включень (33) і (34) випливає, що

$$(A,B)(\chi u)=Q(A,B)(\chi u)=QF_1+QF_2=(A,B)v_1+(A,B)v_2.$$

Тут функції

$$v_1\in P\bigl((H^{\varphi\rho^m}(\Omega))^p\bigr)\quad \text{і}\quad v_2\in P\bigl((H^{(l+i+m)}(\Omega))^p\bigr) \tag{36}$$

є розв'язки (єдині) задач

$$(A,B)v_1=QF_1\in Q(\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)),$$
$$(A,B)v_2=QF_2\in Q(\mathcal{H}^{(l+i)}(\Omega,\Gamma)).$$

Тепер з рівності

$$(A,B)(\chi u)=(A,B)(v_1+v_2)$$

випливає, що

$$\chi u=v_1+(v_2+w)\quad \text{для деякого}\quad w\in N\subset C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Ця формула з урахуванням включень (36) та довільності функції $\chi\in\Upsilon$ значить істинність висновку імплікації (31).

Таким чином, доведено, що ця імплікація істинна для кожного номера $i\geq 1$. За умовою $u\in(H^{(l+m)}(\Omega))^p$; тому посилка імплікації (31) істинна для $i=1$. Виберемо число $\lambda\in\mathbb{N}$ таке, що $\lambda>\sigma_1(\varphi)+1/2$; тоді в силу (7)

$$\bigl(H^{(l+\lambda+m)}(\Omega)\bigr)^p\subset\bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p.$$

Скориставшись імплікацією (31) послідовно для значень $i=1,\,2,\ldots,\lambda$ робимо висновок, що

$$\chi u\in\bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p+\bigl(H^{(l+\lambda+m)}(\Omega)\bigr)^p=\bigl(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\bigr)^p$$

для кожної функції $\chi\in\Upsilon$. Отже, $u\in(H^{\varphi\rho^m}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0))^p$.

Теорема 5 доведена.

Доведення теореми 6. Виберемо довільно точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ та функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. На підставі теореми 5, умови (15) і властивості (8), в якій беремо $\alpha(t) \equiv \varphi(t) t^m$, маємо включення

$$\chi u \in \big(H^{\varphi\rho^m}(\Omega)\big)^p \subset \big(C^r(\overline{\Omega})\big)^p.$$

Звідси з урахуванням вибору x та χ випливає, що

$$u \in \big(C^r(\Omega_0 \cup \Gamma_0)\big)^p.$$

Теорема 6 доведена.

Доведення теореми 7. З умов (16) (включення $f \in (H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing))^p$) і (18) випливає на підставі теореми 6, що $u \in (C^m(\Omega))^p$. Окрім того, з умов (16) (включення $f \in (H^{\varphi_2}(\Omega))^p$), (17) і (19) випливає згідно з тією ж теоремою, що $u \in (C^\lambda(\overline{\Omega}))^p$. Теорема 7 доведена.

8. Висновки

У статті досліджено загальну еліптичну крайову задачу (1), (2) для системи лінійних диференціальних рівнянь однорідних за порядком у гільбертових просторах Хермандера, що утворюють розширені соболєвські шкали (6). Доведено, що оператор, відповідний цій задачі, є обмеженим і нетеровим у підходящих просторах Хермандера (теорема 1) і породжує ізоморфізм між їх підпросторами скінченної ковимірності (теорема 2). Встановлено апріорну оцінку узагальнених розв'язків цієї задачі у просторах Хермандера (теорема 3). Доведено теореми про глобальну і локальну регулярність розв'язків в розширеній соболєвській шкалі (теореми 4 і 5). У термінах просторів Хермандера знайдено нові достатні умови, за якими компоненти узагальненого розв'язку задачі мають неперервні частинні похідні заданого порядку (теорема 6). Отримано нову достатню умову класичності узагальненого розв'язку (теорема 7).

Авторка вдячна О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при об-

щих граничных условиях. I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 206 с.

[2] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка., 1965. – 800 с.

[3] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[4] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[5] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.

[6] *Agmon S.* Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. – Princeton, N.J.: Van Nostrand Reinhold, 1965. – 292 p.

[7] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. – xii+415 p.

[8] *Wloka J. T., Rowley B., Lawruk B.* Boundary value problems for elliptic systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – xiv+641 p.

[9] *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.

[10] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.

[11] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — Москва: Мир, 1986. – 456 с.

[12] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.

[13] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes: In 3 volumes. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[14] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – x+306 p.

[15] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[16] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.

[17] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[18] *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости. – Добавл. к кн.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381 – 415.

[19] *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisation of function spaces of generalised smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, No 1. – P. 1–62.

[20] *Haroske D. D., Moura S. D.* Continuity envelopes and sharp embeddings in spaces of generalised smoothness // J. Funct. Anal. – 2008. – **254**, No 8. – P. 1487–1521.

[21] *Triebel H.* The Structure of Functions. – Basel: Birkhäser, 2001. – xii+425 p.

[22] *Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.* Theory of Sobolev multipliers. With applications to differential and integral operators. – Berlin: Springer, 2009. – xiii+609 p.

[23] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.

[24] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679–701.

[25] *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Укр. матем. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 798–814.

[26] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536–1555.

[27] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вiсник. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547–580.

[28] *Мурач О. О.* Крайова задача для елiптичної за Петровським системи диференцiальних рiвнянь в уточненiй шкалi просторiв // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 24–31.

[29] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497–520.

[30] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2008. – **56**, № 3–4. – P. 213–224.

[31] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142–158.

[32] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.

[33] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 205–226.

[34] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом компактном многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29–35.

[35] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 368–380.

[36] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 37–59.

[37] *Аноп А. В.* Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доп. НАН України. – 2014. – № 4. – С. 7–14.

[38] *Мурач А. А.* Об эллиптических системах в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 391–399.

[39] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477–1491.

[40] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 180–202.

[41] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Петровскому системы в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. вісник. – 2013. – **10**, № 3. – С. 433–449.

[42] *Зинченко Т. Н.* Про оцінки періодичних розв'язків еліптичних систем на прямій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 185–201.

[43] *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167—186.

[44] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[45] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[46] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 271–279.

[47] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces. — Preprint arXiv:1106.2049v2 [math.FA] 25 Dec 2012. — 15 p.

[48] *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1966. – **27**. – P. 167–171.

[49] *Peetre J.* On interpolation functions II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**. – P. 91–92.

[50] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

[51] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – № 2. – P. 349–515.