Збiрник праць Iн-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 35–48

УДК 517.983

В. М. Брук

(Саратовский государственный технический университет, Россия)

Обобщенные резольвенты линейных отношений, порожденных интегральными уравнениями с операторными мерами

vladislavbruk@gmail.com

We define maximal and minimal relations generated by a system of integral equations with operators measures. This system transforms to a quasidifferential equation whenever operators measures are absolutely continuous. We investigate properties the maximal and minimal relations and prove that each generalized resolvent of the minimal relation is an integral operator.

Определяются максимальное и минимальное отношения, порожденные системой интегральных уравнений с операторными мерами. Если операторные меры абсолютно непрерывны, то эта система переходит в квазидифференциальное уравнение. Изучаются свойства максимального и минимального отношений и устанавливается, что всякая обобщенная резольвента минимального отношения является интегральным оператором.

1. Введение

В работе А. В. Штрауса [1] получена формула обобщенных резольвент минимального оператора, порожденного обыкновенным формально

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00378).

самосопряженным дифференциальным выражением четного порядка. Эти результаты А. В. Штрауса были обобщены на случай дифференциальных выражений с операторными коэффициентами и неотрицательным операторным весом [2], [3]. В статье [4] установлен аналог формулы А. В. Штрауса для дифференциального выражения с операторной неванлинновской функцией.

В данной работе получена формула обобщенных резольвент минимального отношения, порожденного на конечном или бесконечном интервале (a, b) системой, состоящей из $r \geqslant 2$ уравнений

$$y_{j-1}(t) = c_j + \sum_{k=1}^{j+1} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) y_{k-1}(s),\;\; j = 1, ..., r-1,$$

$$y_{r-1}(t) = c_r + \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{r,k}) y_{k-1}(s) + \lambda i^{-r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) y_0(s) + i^{-r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) f(s), \tag{1}$$

где $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Здесь $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ – операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset (a, b)$, значения которых – линейные ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, причем мера $\mathbf{m}$ неотрицательна; $c_j \in H$ $(j = 1, ..., r)$; $y = y_0$, y_1,...,y_{r-1} – неизвестные функции, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$ ($\mathfrak{H}$ определено ниже). Меры $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ удовлетворяют условиям: (a) они имеют локально ограниченную вариацию на (a, b); (b) $\mathbf{p}_{j,k} = 0$ при $k > j + 1$; (c) существуют такие операторные функции $t \to p_{j,j+1}(t)$ с нормами $t \to \|p_{j,j+1}(t)\| \in L_{1,loc}(a, b)$, что $\mathbf{p}_{j,j+1}(\Delta) = \int_{\Delta} p_{j,j+1}(t)dt$ для любого борелевского множества Δ (т.е. меры $\mathbf{p}_{j,j+1}$ абсолютно непрерывны) и операторы $p_{j,j+1}(t)$ имеют ограниченные обратные при всех t; (d) $(J\mathbf{P})^* = -J\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – матрица с элементами $\mathbf{p}_{j,k}$, $J = i^{r+1}\Lambda$, Λ – матрица порядка r, у которой на побочной диагонали последовательно (сверху вниз) стоят $-E$, E,...,$(-1)^r E$ (E – тождественный оператор), остальные элементы Λ равны нулю (условие (d) означает, что система (1) формально самосопряженная).

В случае, если все меры абсолютно непрерывны, система (1) переходит в квазидифференциальное уравнение, где квазипроизводные понимаются в смысле работ [5], [6]. В статьях [7] – [9] изучались операторы, порожденные такими квазидифференциальными уравнениями в скалярном случае, и, в частности, в терминах граничных значений дано описание обобщенных резольвент.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$, определенную на таких борелевских множествах Δ, что $\overline{\Delta} \subset (a,b)$, и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на (a,b) (см., например, [10, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство

$$\mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}(\Delta_n)$$

со слабо сходящимся рядом. Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ обозначим

$$\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_j \|\mathbf{p}(\Delta_j)\|,$$

где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ. Если $\mathbf{V}_{[a_1,b_1]}(\mathbf{p}) < \infty$ на любом отрезке $[a_1,b_1] \subset (a,b)$, то говорят, что $\mathbf{p}$ имеет локально ограниченную вариацию на (a,b).

Если мера $\mathbf{p}$ имеет локально ограниченную вариацию на (a,b), то для ρ-почти всех $\xi \in (a,b)$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества Δ, $\overline{\Delta} \subset (a,b)$, справедливо равенство

$$\mathbf{p}(\Delta) = \int_\Delta \Psi(\xi)\, d\rho. \tag{2}$$

Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры. Интеграл (2) сходится в смысле обычной нормы операторов ([10, гл. 5, с. 325]). Из (2) следует, что измеримые по

Борелю ограниченные функции со значениями в H локально интегрируемы по мере $\mathbf{m}$.

Конец a назовем регулярным, если $a > -\infty$, меры $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ определены на борелевских множествах $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset [a,b)$ и имеют ограниченную вариацию на отрезке $[a,b_1]$ для любого $b_1 < b$. Конец a назовем сингулярным, если он не является регулярным. Аналогично определяются регулярность и сингулярность конца b. Если конец a сингулярный, полагаем $a_0 = a$. В случае регулярного конца a фиксируем конечное $a_0 < a$ и расширяем меры $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ на интервал $[a_0,b)$, полагая $\mathbf{p}_{j,k}(\Delta)=\mathbf{m}(\Delta)=0$ для любого борелевского множества $\Delta\subset[a_0,b)\backslash[a,b)$. Аналогично определяется число b_0 для конца b.

Сведем систему (1) к интегральному уравнению в пространстве H^r. С этой целью введем следующие обозначения: $\mathbf{P}_\lambda$ – матрица, получающаяся из $\mathbf{P}$ заменой $\mathbf{p}_{r,1}$ на $\mathbf{p}_{r,1}+\lambda i^{-r}\mathbf{m}$; $\mathcal{P}_\lambda = iJ\mathbf{P}_\lambda$; $\widehat{y}$, C, $\breve{h}$ столбцы: $\widehat{y}=\mathrm{col}(y_0,...,y_{r-1})$, $C = \mathrm{col}(c_1,....c_r)$, $\breve{h} = \mathrm{col}(h,0,...,0)$ (столбец длины r), где h – функция со значениями в H. Тогда система (1) запишется в виде

$$\widehat{y}(t) = C - iJ\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathcal{P}_\lambda)\widehat{y}(s) - iJ\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{m})\breve{f}(s). \tag{3}$$

В [11] установлено, что уравнение (3) имеет единственное решение для любой локально интегрируемой по мере $\mathbf{m}$ функции f и любого элемента $C \in H^r$. Решение $\widehat{y}$ непрерывно слева и $C = \widehat{y}(t_0)$. Пусть система функций $\widehat{y}=\mathrm{col}(y_0,...,y_{r-1})$ является решением (1) с локально интегрируемой по мере $\mathbf{m}$ функцией f. Тогда функции y_j непрерывны слева и связаны равенствами

$$\int\limits_{t_0}^{t} p_{j,j+1}(s)y_j(s)ds = y_{j-1}(t) - y_{j-1}(t_0) - \sum_{k=1}^{j}\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_{j,k})y_{k-1}(s). \tag{4}$$

Левая (и, следовательно, правая) часть (4) является абсолютно непрерывной функцией. Следовательно,

$$y_j(t) = p_{j,j+1}^{-1}(t)\,\frac{d}{dt}\left(y_{j-1}(t) - y_{j-1}(t_0) - \sum_{k=1}^{j}\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_{j,k})y_{k-1}(s)\right), \quad j = 1,...,r-1. \tag{5}$$

Из формулы (5) вытекает, что функции y_j $(j = 1, ..., r-1)$ однозначно определяются по y_0. Поэтому говорим, что функция $y = y_0$ является решением системы (1). Функцию y_j называем *квазипроизводной* порядка j от y, обозначаем $y_j = y^{[j]}$, $\widehat{y} = \mathrm{col}(y^{[0]}, ..., y^{[r-1]})$. Пусть $(u_1, ..., u_\alpha)$ – какая-либо система функций, имеющих квазипроизводные до порядка $r-1$ включительно. Тогда $\widehat{u}$ – матрица со столбцами $\widehat{u}_k$ $(k = 1, ..., \alpha)$. Аналогичные обозначения вводятся для операторных функций. Отметим, что если все меры $\mathbf{p}_{jk}$ абсолютно непрерывны, то равенства (5) определяют квазипроизводные в смысле работ [5], [6].

Пусть $W_m(t, \lambda)$ – операторное решение (1) при $f = 0$, удовлетворяющее условию $W_m^{[j-1]}(t_0, \lambda) = \delta_{jm} E$ $(j, m = 1, ..., r)$. Через $W(t, \lambda)$ обозначим операторную однострочную матрицу $(W_1(t, \lambda), ..., W_r(t, \lambda))$.

Следующие леммы 1, 2 и формула (8) следуют из [11].

Лемма 1. *Пусть функции y, f связаны равенством* (3), *а функции z, g – тем же равенством с заменой y на z, f на g, λ на $\bar{\lambda}$, где f, g – локально интегрируемые по мере* $\mathbf{m}$ *функции. Тогда справедлива формула* (*аналог формулы Лагранжа*)

$$\int_\alpha^\beta ((d\mathbf{m})f(t), z(t)) - \int_\alpha^\beta (y(t), (d\mathbf{m})g(t)) = \\ = (iJ\widehat{y}(\beta), \widehat{z}(\beta)) - (iJ\widehat{y}(\alpha), \widehat{z}(\alpha)), \tag{6}$$

где $a_0 < \alpha \leqslant \beta < b_0$.

Замечание 1. Если конец a регулярен, то в равенстве (6) можно взять $\alpha = a_0$. Аналогичное утверждение справедливо для конца b.

В лемме 1 возьмем $y(t) = W(t, \lambda)c$, $z(t) = W(t, \bar{\lambda})d$, где $c, d \in H^r$. Тогда $f = g = 0$. Из (6) следует $(J\widehat{W}(\beta, \lambda)c, \widehat{W}(\beta, \bar{\lambda})d) = (J\widehat{W}(\alpha, \lambda)c, \widehat{W}(\alpha, \bar{\lambda})d)$. Полагая здесь $\beta = t$, $\alpha = t_0$ и учитывая произвольность $c, d \in H^r$, получим

$$\widehat{W}^*(t, \bar{\lambda}) J \widehat{W}(t, \lambda) = J, \quad \widehat{W}(t, \lambda) J \widehat{W}^*(t, \bar{\lambda}) = J.$$

Лемма 2. *Функция y тогда и только тогда является решением системы* (1) *с локально интегрируемой по мере* $\mathbf{m}$ *функцией f, когда*

$$y(t) = W(t, \lambda)c - W(t, \lambda)\, iJ \int_{t_0}^{t} W^*(s, \bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s), \tag{7}$$

где $c = \widehat{y}(t_0) \in H^r$.

Если y имеет вид (7), то

$$\widehat{y}(t) = \widehat{W}(t,\lambda)c - \widehat{W}(t,\lambda)\, iJ \int\limits_{t_0}^{t} W^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s). \tag{8}$$

3. Основные результаты

Далее под линейным отношением T понимается любое линейное многообразие $\mathrm{T} \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ – банаховы пространства. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [12]. Далее используем обозначения: $\{x_1, x_2\}$ – упорядоченная пара, составленная из элементов x_1, x_2; $\ker \mathrm{T}$ – ядро T, т.е. множество таких элементов $x \in \mathbf{B}_1$, что пара $\{x, 0\} \in \mathrm{T}$. Пусть $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}$ – гильбертово пространство. Отношение T^*, сопряженное к $\mathrm{T} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, определяется как отношение, состоящее из таких пар $\{z_1, z_2\} \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, что равенство $(x_2, z_1)_{\mathbf{H}} = (x_1, z_2)_{\mathbf{H}}$ выполняется для всех пар $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{T}$. Отношение T называется симметрическим, если $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$, и самосопряженным, если $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Линейные операторы считаются линейными отношениями. Все отношения, встречающиеся в дальнейшем, являются линейными, поэтому слово "линейное" часто будет опускаться.

На множестве финитных ступенчатых на (a_0, b_0) функций введем квазискалярное произведение

$$(x, y)_{\mathbf{m}} = \int\limits_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})x(t), y(t)).$$

Отождествляя с нулем функции y, для которых $(y, y)_{\mathbf{m}} = 0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$. Элементы $\mathfrak{H}$ – это классы функций, отождествленных между собой по норме $\|y\|_{\mathbf{m}} = (y, y)_{\mathbf{m}}^{1/2}$. Чтобы излишне не усложнять терминологию, класс функций с представителем y обозначаем тем же символом и пишем $y \in \mathfrak{H}$. Равенства между функциями из $\mathfrak{H}$ понимаются как равенства соответствующих классов эквивалентности. Отметим, что пространство $\mathfrak{H}$ не изменится, если интервал (a_0, b_0) заменить на (a'_0, b'_0), где точки a'_0, b'_0 вводятся так же, как a_0, b_0.

Пусть L_0' – отношение, состоящее из пар $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых существует такая пара $\{y,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$, что функция y финитна на (a_0,b_0) и y является решением (1) на (a_0,b_0) при $\lambda=0$. Замыкание L_0 отношения L_0' назовем *минимальным отношением*, порожденным системой (1). Отношение L_0^* назовем *максимальным.* Введенные отношения, вообще говоря, не являются операторами, так как может случиться, что функция y отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$, а f отлична от нуля. Отношения L_0, L_0^* не изменятся, если точки a_0, b_0 заменить на a_0', b_0', где a_0', b_0' определяются так же, как a_0, b_0.

В случае, когда оба конца интервала (a,b) регулярны, определим отношение L как замыкание отношения L', состоящего из пар $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых существует такая пара $\{y,f\}$, что пары $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$, $\{y,f\}$ отождествлены между собой в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ и y является решением (1) на (a_0,b_0) при $\lambda=0$.

Для описания ядра максимального отношения недостаточно функций $t\to W(t,\lambda)c$ при $c\in H^r$. Поэтому с целью изучения введенных отношений определим функции $t\to W(t,\lambda)c$ для элементов c, принадлежащих некоторому более широкому пространству, чем H^r. Обозначим через Q_0 множество таких элементов $c\in H^r$, что функция $t\to W(t,\mu)c$ $(\mu\in\mathbb{C})$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$. Из леммы 2 получаем равенство

$$W(t,\mu)c=W(t,\lambda)c-(\mu-\lambda)W(t,\lambda)\,iJ\int_{t_0}^{t}W^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})W(s,\mu)c, \quad (9)$$

из которого следует, что Q_0 не зависит от замены μ на λ $(\lambda\in\mathbb{C})$.

Положим $Q=H^r\ominus Q_0$. Пусть последовательность интервалов $[\alpha_n,\beta_n]$ обладает свойствами: $a_0<\alpha_{n+1}<\alpha_n<\beta_n<\beta_{n+1}<b_0$ и $\alpha_n\to a_0$, $\beta_n\to b_0$ при $n\to\infty$. Введем в Q систему полунорм

$$p_n(x)=\left(\int_{[\alpha_n,\beta_n]}((d\mathbf{m})W(s,\mu)c,W(s,\mu)c)\right)^{1/2}, \quad \mu\in\mathbb{C},\quad c\in Q. \quad (10)$$

Пополнение Q по этой системе обозначим Q_-. Пространство Q_- является пространством Фреше, так как оно порождается счетной системой полунорм [13, гл. 2, с. 66]. Из (9) следует, что замена в (10) μ на

$\lambda \in \mathbb{C}_0$ приводит к изоморфному пространству. Отметим, что в случае регулярных концов пространство Q_- гильбертово. Оно является пополнением Q по норме

$$\|c\|_- = \|W(\cdot,\mu)c\|_{\mathbf{m}} = \left(\int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})W(s,\mu)c, W(s,\mu)c) \right)^{1/2},$$

где $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in Q$.

Определим функцию $t \to W(t,\lambda)c$ для любого $c \in Q_-$. Предположим сначала, что оба конца интервала (a,b) регулярны. Пусть последовательность элементов $c_n \in Q$ сходится в Q_- к $c \in Q_-$. Тогда последовательность функций $t \to W(t,\lambda)c_n$ фундаментальна в $\mathfrak{H}$ и, следовательно, сходится к некоторому элементу из $\mathfrak{H}$. Этот элемент обозначаем $t \to W(t,\lambda)c$. В регулярном случае через $\mathbf{W}(\lambda)$ обозначим оператор $c \to W(t,\lambda)c$, где $c \in Q_-$. Пространство Q_- можно рассматривать как пространство с негативной нормой относительно Q. Соответствующее пространство с позитивной нормой обозначим Q_+ [10, гл. 1, с. 46]. Оператор $\mathbf{W}(\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает Q_- в $\mathfrak{H}$ и имеет замкнутую область значений. Поэтому сопряженный оператор $\mathbf{W}^*(\lambda)$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}$ на Q_+. Найдем вид $\mathbf{W}^*(\lambda)$.

Для любых $x \in Q$, $f \in \mathfrak{H}$ имеем

$$(f, \mathbf{W}(\lambda)x)_{\mathbf{m}} = \int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})f(s), W(s,\lambda)x) =$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} (W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s), x) = (\mathbf{W}^*(\lambda)f, x).$$

Отсюда, учитывая плотность Q в Q_-, получим

$$\mathbf{W}^*(\lambda)f = \int_{a_0}^{b_0} W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s). \tag{11}$$

Таким образом, установлена

Лемма 3. *Оператор* $\mathbf{W}^*(\lambda)$ *непрерывно отображает* $\mathfrak{H}$ *на* Q_+ *и действует по формуле* (11).

Предположим теперь, что хотя бы один из концов интервала (a, b) является сингулярным. Обозначим $\mathfrak{H}_n = L_2(H, d\mathbf{m}; [\alpha_n, \beta_n])$. Пусть $Q_0(n)$ – множество таких элементов $c \in Q$, что функция $t \to W(t, \lambda)c$ отождествлена с нулем в пространстве $\mathfrak{H}_n$, и пусть $Q(n) = Q \ominus Q_0(n)$. Очевидно, $Q(n) \supset Q(m)$ при $n \geqslant m$. Если $c \in Q(n)$, то $p_n(c) > 0$. Следовательно, p_n является нормой на $Q(n)$. Обозначим ее $\|\cdot\|_-^{(n)}$. Пусть $Q_-(n)$ – пополнение $Q(n)$ по норме $\|\cdot\|_-^{(n)}$. Определим линейные отображения $h_{mn} : Q_-(n) \to Q_-(m)$ $(n \geqslant m)$ следующим образом. Положим $h_{mn}c_1 = c_1$, $h_{mn}c_0 = 0$, если $c_1 \in Q(m)$, $c_0 \in Q(n) \ominus Q(m)$. Используя равенство $p_m(c_0) = 0$, получим

$$\|h_{mn}(c_1 + c_0)\|_-^{(m)} = \|c_1\|_-^{(m)} = p_m(c_1) = p_m(c_1 + c_0) \leqslant \|c_1 + c_0\|_-^{(n)}.$$

Отсюда следует, что отображения h_{mn} можно расширить по непрерывности на все пространство $Q_-(n)$.

Практически дословным повторением соответствующих рассуждений из [13, гл. 2, п. 5.4, с. 71] доказывается, что пространство Q_- изоморфно проективному пределу $\lim(pr)h_{mn}Q_-(n)$ семейства пространств $\{Q_-(n); n \in \mathbb{N}\}$ относительно отображений h_{mn} $(m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n)$. Из определения проективного предела [13, гл. 2, с. 70] следует, что Q_- является подпространством произведения $\prod_n Q_-(n)$ и Q_- состоит из таких элементов $c = \{c_n\}$, что $c_m = h_{mn}c_n$ для всех m, n, где $m \leqslant n$. Поэтому при $m \leqslant n$ сужение функции $t \to W(t, \lambda)c_n$ на $[\alpha_m, \beta_m]$ совпадает с функцией $t \to W(t, \lambda)c_m$ в пространстве $\mathfrak{H}_m$. Далее $t \to W(t, \lambda)c$ обозначает функцию, совпадающую с функцией $t \to W(t, \lambda)c_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Пространство $Q_-(n)$ рассматриваем как пространство с негативной нормой относительно $Q(n)$ [10, гл. 1, с. 46]. Через $Q_+(n)$ обозначим соответствующее пространство с позитивной нормой. Тогда $Q_+(m) \subset Q_+(n)$ при $m \leqslant n$ и вложение $Q_+(m)$ в $Q_+(n)$ непрерывно. Это вложение совпадает с сопряженным к h_{mn} отображением $h_{mn}^+ : Q_+(m) \to Q_+(n)$. Обозначим через Q_+ индуктивный предел $\lim(ind)h_{mn}^+Q_+(n)$ [13, гл. 2, с. 76] семейства пространств $\{Q_+(n); n \in \mathbb{N}\}$ относительно отображений h_{mn}^+. Согласно [13, гл. 4, с. 178], Q_+ является сопряженным пространством к Q_-. Пространство Q_+ можно рассматривать как объединение $Q_+ = \cup_n Q_+(n)$ с сильнейшей топологией, при которой все вложения $Q_+(n)$ в Q_+ непрерывны [13, гл. 2, с. 76].

Оператор $c_n \to W(t, \lambda)c_n$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $Q_-(n)$ в $\mathfrak{H}_n$ и имеет замкнутую область значений. Этот оператор обозначим $\mathbf{W}_n(\lambda)$. Из леммы 3 следует, что сопряженный оператор $\mathbf{W}_n^*(\lambda)$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}_n$ на $Q_+(n)$ и

$$\mathbf{W}_n^*(\lambda)f = \int\limits_{[\alpha_n,\beta_n]} W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s).$$

Следовательно, для всех $f \in \mathfrak{H}$ и всех $\alpha, \beta \in (a_0, b_0)$

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s) \in Q_+. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть оба конца интервала* (a, b) *регулярны. Пара* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *тогда и только тогда принадлежит отношению* $L - \lambda E$, *когда существует такая пара* $\{y, f\}$, *отождествленная в* $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *с* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, *что справедливо равенство*

$$y(t) = W(t,\lambda)c_\lambda - W(t,\lambda)\, iJ \int\limits_{a_0}^{t} W^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s), \tag{13}$$

где $c_\lambda \in Q_-$.

Доказательство. Из определения пространства Q_- и леммы 2 следует, что пара $\{y, f\}$, удовлетворяющая (13), принадлежит $L - \lambda E$. Обратно, пусть пара $\{y, f\} \in L - \lambda E$. Тогда существует такая последовательность пар $\{y_n, f_n\} \in L' - \lambda E$, сходящаяся в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ к $\{y, f\}$, что

$$y_n(t) = W(t,\lambda)c_{\lambda,n} - W(t,\lambda)\, iJ \int\limits_{a_0}^{t} W^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})f_n(s), \tag{14}$$

где $c_{\lambda,n} \in Q$. Из (14) и (2) (где $\mathbf{p}$ заменено на $\mathbf{m}$) следует, что последовательность функций $t \to W(t,\lambda)c_{\lambda,n}$ сходится в $\mathfrak{H}$ к некоторой функции $t \to W(t,\lambda)c_\lambda$, где $c_\lambda \in Q_-$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Оператор* $\mathbf{W}(\lambda)$ *непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство* Q_- *на* $\ker(L - \lambda E)$.

Замечание 2. Если в равенстве (13) $c_\lambda \in Q$, то пара $\{y, f\} \in L' - \lambda E$.

Теорема 2. *Пусть оба конца интервала* (a,b) *регулярны. Отношение* L_0 *совпадает с сужением отношения* L' *на множество таких пар* $\{y,f\}$*, что* y *является решением системы* (1) *на* (a_0,b_0) *при* $\lambda=0$ *и*

$$\widehat{y}(a_0)=\widehat{y}(b_0)=0. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть пара $\{y,f\}\in L'-\lambda E$. Из (8) вытекает, что равенства (15) выполняются тогда и только тогда, когда в (13)

$$c_\lambda=0,\quad \int\limits_{a_0}^{b_0} W^*(s,\bar\lambda)(d\mathbf{m})f(s)=0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что сужение L' на множество пар $\{y,f\}$ со свойством (15) замкнуто, и равенства (15) одновременно выполняются для всех точек a_0', b_0', построенных по тому же правилу, что и a_0, b_0. Поэтому в регулярном случае $L_0=L_0'$. Отсюда следует требуемое утверждение.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 2 и способа построения точек a_0, b_0 вытекает, что равенства (15) равносильны следующим $\lim\limits_{t\to a-0}\widehat{y}(t)=\lim\limits_{t\to b+0}\widehat{y}(t)=0.$

Следствие 2. *В случае регулярных концов интервала* (a,b) *область значений отношения* $L_0-\lambda E$ *состоит из функций* $f\in\mathfrak{H}$*, удовлетворяющих второму равенству* (16).

Теорема 3. *Отношение* L_0 *симметрическое. В случае регулярных концов интервала* (a,b) *выполняется равенство* $L=L_0^*$.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что отношение L_0' (и, следовательно, L_0) симметрическое. Предположим, что концы интервала (a,b) регулярны. Из той же леммы 1 получаем $L'\subset L_0^*$. Поэтому $L\subset L_0^*$. Докажем обратное включение. Из следствий 1, 2 вытекает, что $\mathfrak{N}_\lambda=\ker(L-\bar\lambda E)$, где $\mathfrak{N}_\lambda$ – дефектное подпространство отношения L_0, т.е ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к области значений отношения $L_0-\lambda E$. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda$ множество пар вида $\{z,\bar\lambda z\}$, где $z\in\mathfrak{N}_\lambda$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq0)$. Из теоремы 1 и равенства $L_0^*=L_0\dotplus\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda\dotplus\widehat{\mathfrak{N}}_{\bar\lambda}$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq0)$ следует, что $L_0^*\subset L$. Теорема доказана.

В следующей лемме рассматривается случай произвольных концов (не обязательно, регулярных).

Лемма 4. *Для любой пары* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L_0^* - \lambda E$ *существует такая пара* $\{y, f\}$*, отождествленная в* $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *с* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$*, что справедливо равенство* (7)*, в котором* $c \in Q_-$*,* $t_0, t \in (a_0, b_0)$.

Доказательство. Рассмотрим введенную выше (перед формулой (10)) последовательность интервалов $[\alpha_n, \beta_n] \subset (a_0, b_0)$. Пусть $L_{0,n}$ – минимальное отношение, порожденное системой (1) в пространстве $\mathfrak{H}_n = L_2(H, d\mathbf{m}; [\alpha_n, \beta_n])$ и пусть пара $\{z, g\} \in L_{0,n}$. Продолжим функции z, g нулем на интервал (a_0, b_0). Тогда из замечания 3 следует, что пара, составленная из продолженных функций, принадлежит L_0'. Из теорем 1, 3 получаем, что для каждой пары $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L_0^* - \lambda E$ найдется пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$ и представимая на каждом отрезке $[\alpha_n, \beta_n]$ в виде

$$y(t) = W(t, \lambda)c_n - W(t, \lambda)\, iJ \int\limits_{t_0}^{t} W^*(s, \bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s), \tag{17}$$

где $c_n \in Q_-(n)$. Из (12), (17) следует, что при $m \leqslant n$ (т.е. при $[\alpha_m, \beta_m] \subset [\alpha_n, \beta_n]$) сужение функции $t \to W(t,\lambda)c_n$ на $[\alpha_m,\beta_m]$ совпадает с функцией $t \to W(t,\lambda)c_m$ в пространстве $\mathfrak{H}_m$. Отсюда получается (7), где $c \in Q_-$. Лемма доказана.

Напомним определение обобщенной резольвенты. Пусть $\mathbf{H}$ – гильбертово пространство, T_0 – замкнутое симметрическое линейное отношение, $T_0 \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Операторная функция $\lambda \to R(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ называется обобщенной резольвентой отношения T_0, если существуют такое гильбертово пространство $\widetilde{\mathbf{H}} \supset \mathbf{H}$ и такое самосопряженное отношение $T \supset T_0$, $T \subset \widetilde{\mathbf{H}} \times \widetilde{\mathbf{H}}$, что $R(\lambda) = P(T - \lambda E)^{-1}|_{\mathbf{H}}$ для всех λ, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, где P – ортопроектор $\widetilde{\mathbf{H}}$ на $\mathbf{H}$.

Теорема 4. *Всякая обобщенная резольвента* $R(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ *отношения* L_0 *является интегральным оператором*

$$(R(\lambda)f)(t) = \int\limits_{a_0}^{b_0} K(t, s, \lambda)d\mathbf{m}(s)f(s) \tag{18}$$

с ядром

$$K(t, s, \lambda) = W(t, \lambda)\Big(M(\lambda) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(s - t)iJ\Big)W^*(s, \bar{\lambda}),$$

где $M(\lambda)\colon Q_+ \to Q_-$ *– непрерывный оператор при каждом* λ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ *такой, что* $M^*(\lambda) = M(\bar{\lambda})$ *и* $(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}(M(\lambda)x, x) \geqslant 0$ *при всяком* $x \in Q_+$. *Операторная функция* $\lambda \to M(\lambda)x$ *голоморфна для любого* $x \in Q_+$ *при* $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$. *Интеграл в* (18) *сходится по крайней мере слабо в пространстве* $\mathfrak{H}$.

Доказательство с учетом леммы 4 и построений, приведенных перед теоремой 1, не отличается от доказательства аналогичной теоремы из [2], где изучались линейные отношения, порожденные дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией.

Список литературы

[1] *Штраус А. В.* Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Известия АН СССР. Серия матем. – 1957. – **21**, № 6. – С. 785–808.

[2] *Bruk V. M.* Generalized Resolvents of Symmetric Relations Generated on Semi-axis by a Differential Expression and a Nonnegative Operator Function // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2006. – **2**, № 4. – P. 372–387.

[3] *Брук В. М.* Об обратимых сужениях отношений, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией // Матем. заметки. – 2007. – **82**, № 5. – С. 652–664.

[4] *Khrabustovsky V. I.* On the Characteristic Operators and Projections and on the Solutions of Weil Type of Dissipative and Accumulative Operator Systems. 1. General case; 2. Abstract Theory; 3. Separated Boundary Conditions // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2006. – **2**, № 2, № 3, № 4. – P. 149–175, 299–317, 449–473.

[5] *Шин Д.* О казидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1943. – **13**, № 1. – С. 39–70.

[6] *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 3. – P. 453–474.

[7] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Регуляризация двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом //

Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 49–67.

[8] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом // Укр. матем. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1190–1205.

[9] *Goriunov A., Mikhailets V., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – **2013**, № 101. – P. 1–16.

[10] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.

[11] *Bruk V.M.* On the Characteristic Operator of an Integral Equation with a Nevanlinna Measure in the Infinite-dimensional Case // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2014. – **10**, № 2. – P. 163–188.

[12] *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи матем. наук. – 2013. – **68**, № 1. – С. 77–128.

[13] *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.