Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 66–99

УДК 517.956.4

Я. І. Грушка

(Інститут математики НАН України, Київ)

Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин

grushka@imath.kiev.ua

Analogs of set-theoretic inclusion relation and set-theoretic operation of union for basic changeable sets are introduced, and their properties are studied.

Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин та досліджено їхні властивості.

1. Вступ

Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта, залишається відкритою і по сьогодні [1–3]. В роботах [4–9] було запропоновано новий математичний апарат для розв'язання зазначеної проблеми — математичну теорію мінливих множин. В роботах [4,10,11] показано, що теорія мінливих множин може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонних розширень. З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (зокрема змінювати свої властивості в часі, розпадатись на частини, чи навпаки — об'єднуватись в одне

ціле). Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження (тобто від області сприймання або системи відліку).

Базові мінливі множини з одного боку служать основою для визначення загальних мінливих множин, а з іншого боку самі можуть трактуватись, як найпростіший частинний випадок мінливих множин, у яких існує лише одна область сприймання.

В фізиці часто зустрічаються міркування, коли до фізичної системи подумки долучають додаткові, реально не існуючі в ній компоненти. Наприклад, під час виведення формул перетворень Лоренца для систем відліку з паралельними осями використовується метод "світлової сфери", тобто припускається, що в нульовий момент часу на початку відліку "спалахнуло світло", і світлові промені розходяться від початку відліку у всіх напрямках (див., наприклад, [12, стор. 25]). Таке припущення зовсім не означає, що в довільній моделі еволюції в рамках спеціальної теорії відносності (СТВ) мусить існувати "світлова сфера". Просто робиться припущення, що перетворення координат не зміниться, коли ми до будь-якої еволюційної моделі в рамках СТВ долучимо світлову сферу, тобто коли замість даної моделі розглянемо "розширену" модель, в якій світлова сфера вже присутня.

В даній роботі робиться спроба математично строгого обґрунтування в рамках теорії базових мінливих множин процедури долучення до вихідної моделі нових "віртуальних" еволюціонуючих об'єктів за припущення, що еволюція цих, нових, об'єктів **не впливає** на еволюцію вихідної системи. З цією метою вводяться аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин.

2. Базові мінливі множини та їх властивості

2.1. Основні поняття і означення

Теорію базових мінливих множин детально викладено в роботах [5,9]. В даній роботі буде дано більш лаконічне, ніж в [5,9], хоча й більш штучне, означення поняття базової мінливої множини. В роботі [4, теорема 2.2 та зауваження 2.6] показано, що обидва означення базової мінливої множини — еквівалентні.

Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина (в сенсі [13, с. 12], [14, с. 212]) і $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної пари $\omega = (t, x) \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ будемо використовувати позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t. \tag{1}$$

Тут $\mathbf{T} \times \mathcal{X} = \{(t, x) \mid t \in \mathbf{T},\, x \in \mathcal{X}\}$ — декартовий добуток множин $\mathbf{T}$ і $\mathcal{X}$.

Означення 1. Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина і $\mathcal{X}$ — довільна непорожня множина.

Бінарне відношення $\leftarrowtriangle$, визначене на непорожній множині $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$, будемо називати *базою елементарних процесів* для $\mathbb{T}$ і $\mathbf{B}$, якщо виконуються такі умови:

1. Відношення $\leftarrowtriangle$ рефлексивне на $\mathbf{B}$ (тобто $\forall \omega \in \mathbf{B}\ \omega \leftarrowtriangle \omega$);
2. Для довільних $\omega, \omega_2 \in \mathbf{B}$ з умов $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$ випливає, що $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$, де $<$ — відношення строгого порядку, породжене нестрогим порядком $\leq$.

Якщо бінарне відношення $\leftarrowtriangle$ є базою елементарних процесів для $\mathbb{T}$ і $\mathbf{B}$, то трійку:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{B}, \mathbb{T}, \leftarrowtriangle)$$

будемо називати *базовою мінливою множиною.*

Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B} = (\mathbf{B}, \mathbb{T}, \leftarrowtriangle)$, де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ і $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$, введемо наступні позначення:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathbf{B}; & \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) := \mathbb{T}; & \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) := \mathbf{T}; \\ \leq_{\mathcal{B}} := \trianglelefteq & \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} := \leftarrowtriangle; & \end{array}$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{B}}$,$<_{\mathcal{B}}$,$>_{\mathcal{B}}$ для позначення оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого нестрогим порядком $\leq_{\mathcal{B}}$. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ будемо називати *множиною моментів часу* $\mathcal{B}$, а відношення $\leq_{\mathcal{B}}$,$<_{\mathcal{B}}$,$\geq_{\mathcal{B}}$,$>_{\mathcal{B}}$ будемо називати відповідно відношеннями нестрогого, строго, нестрогого оберненого і строгого оберненого *часового порядку* на $\mathcal{B}$. Множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати множиною *всіх елементарно-часових станів* базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Елементи множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати *елементарно-часовими станами* $\mathcal{B}$, а відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ будемо називати *базою елементарних процесів* $\mathcal{B}$. Множину

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\} \qquad (2)$$

будемо називати множиною *всіх елементарних станів* базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Зауваження 1. З означення 1 впливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 2. Нехай $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільні елементарні стани. Будемо вважати, що $x_2 \overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} x_1$ тоді і тільки тоді, коли існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що

$$\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1,\ \mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2 \text{ і } \omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} \omega_1$$

Бінарне відношення $\overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ будемо називати *напрямним відношенням змін* $\mathcal{B}$.

Надалі через 2^M будемо позначати множину всіх підмножин довільної множини M. Відображення $\psi_{\mathcal{B}} : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \mapsto 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$, що задається формулою:

$$\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}),\ \mathsf{tm}\,(\omega) = t\}$$

будемо називати *часом* на $\mathcal{B}$ (зокрема $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \emptyset$, якщо не існує $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ таких, що $\mathsf{tm}\,(\omega) = t$). У випадку, коли зрозуміло, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова в позначеннях $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$, $\overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$, $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$, $\geq_{\mathcal{B}}$, $>_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}}$ символ $\mathcal{B}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно. Крім того, для елементарних (елементарно-часових) станів $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ $(\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ замість позначення $x_2 \overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow} x_1$ $(\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow} \omega_1)$ будемо часто застосовувати позначення $x_2 \leftarrow x_1$ $(\omega_2 \leftarrow \omega_1)$ відповідно.

З означень 1 та 2 випливають наступні *властивості базових мінливих множин* (у властивостях 1-5 символ $\mathcal{B}$ позначає довільну базову мінливу множину).

Властивості 1.

1. Для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ справедливе співвідношення $\omega \leftarrow \omega$.
2. Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, то $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Якщо, додатково, $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.
3. Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.
4. Якщо для базових мінливих множин $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$ мають місце рівності:

   $$\mathbf{1})\ \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2)\,; \quad \mathbf{2})\ \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)\,; \quad \mathbf{3})\ \underset{\mathcal{B}_1}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\longleftarrow}} = \underset{\mathcal{B}_1}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\longleftarrow}},$$

   то $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

2.2. Базові мінливі множини, породжені системами абстрактних траєкторій

Означення 3. Нехай M — довільна множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна непорожня ($\mathbf{T} \neq \emptyset$) лінійно упорядкована множина.

1. Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ ($\mathfrak{D}(r) \neq \emptyset$) будемо називати *абстрактною траєкторією* з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення траєкторії r).
2. *Системою абстрактних траєкторій* з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що

   $$\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}\,(r) = M$$

   (де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 1 ([5,9])**.** *Для довільної системи абстрактних $\mathcal{R}$ траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1) $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)=\mathbb{T}$*;*

2) $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))=\bigcup_{r\in\mathcal{R}}r$*, де довільну абстрактну траєкторію* $r\in\mathcal{R}$ *слід розуміти як множину (тобто* $r=\{(t,r(t))\mid t\in\mathfrak{D}(r)\}$*);*

3) *Для довільних* $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))$ *умова* $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right)\leq\mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$ *і існує траєкторія* $r\in\mathcal{R}$ *така, що* $\omega_1,\omega_2\in r$.

2.3. Лінії долі та елементарні процеси базових мінливих множин

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.

Означення 4. Непорожня підмножина $N\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ називається *транзитивною* в $\mathcal{B}$, якщо для довільних $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in N$ з умов $\omega_3\leftarrow\omega_2$ і $\omega_2\leftarrow\omega_1$ випливає $\omega_3\leftarrow\omega_1$.

Транзитивна підмножина $L\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ називається *ланцюгом* в $\mathcal{B}$, якщо для довільних $\omega_1,\omega_2\in L$ має місце хоч одне із співвідношень $\omega_2\leftarrow\omega_1$ або $\omega_1\leftarrow\omega_2$. Множину всіх ланцюгів $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$:

$$\mathbb{L}l(\mathcal{B})=\left\{\mathcal{L}\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\mid\mathcal{L}\text{ є ланцюгом }\mathcal{B}\right\}.$$

Ланцюг $L\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ називається *лінією долі* $\mathcal{B}$, якщо він є максимальним ланцюгом, тобто якщо не існує ланцюга $L_1\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такого, що $L\subset L_1$, де символ "$\subset$" означає строге включення множин. Множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$:

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B})=\left\{\mathcal{L}\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\mid\mathcal{L}\text{ є лінією долі }\mathcal{B}\right\}.$$

Будь-яку лінію долі $L\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})$, що містить елементарно-часовий стан $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати *власною* лінією долі елементарно-часового стану ω (в $\mathcal{B}$).

Твердження 1. *Якщо* $\mathcal{R}$ *— система абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T}$ *в* M*, то*

$$\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right).$$

Доведення. Нехай, $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$ в M і $r\in\mathcal{R}$. Тоді, згідно з теоремою 1, $r\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$ і для довільних $\omega_1,\omega_2\in r$ умова $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Отже, оскільки $(\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною, множина r є ланцюгом в $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$. □

Твердження 2 ([5, 9])**.** *Довільний елементарно-часовий стан* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *має хоч одну власну лінію долі.*

Теорема 2 ([5, 9])**.** *Для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *множина* $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ *є системою абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ *в* $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$*. При цьому:*

$$\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\, \mathbb{L}d(\mathcal{B})) = \mathcal{B}.$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є підмножиною множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому $\mathcal{L}$ є бінарним відношенням з множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ в множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, теорема 2, зокрема стверджує, що це відношення є функцією, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Означення 5. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.

1. Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати *мінливою системою* базової мінливої множини $\mathcal{B}$.
2. Довільне відображення $s : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \mapsto 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ будемо називати *процесом* базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Нехай, $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільна мінлива система довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in S\}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}). \tag{3}$$

Легко бачити, що $S^{\sim}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Отже, за означенням 5, $S^{\sim}$ є процесом базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 6. Процес $S^{\sim}$ будемо називати *процесом трансформацій* мінливої системи S.

Твердження 3 ([5, 9])**.** *Нехай,* $\mathcal{B}$ *— базова мінлива множина.*

1. Для довільних мінливих систем $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *рівність* $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $S_1 = S_2$*.*

2. Для довільного процесу s *базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *існує, причому єдина, мінлива система* $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *така, що* $s = S^{\sim}$*.*

Отже, відображення $(\cdot)^{\sim}$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між мінливими системами і процесами базової мінливої множини. Тому, поняття мінливої системи і процесу довільної базової мінливої множини можна в певному сенсі “ототожнити”.

Означення 7. Процес $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати *елементарним процесом* $\mathcal{B}$.

В роботах [5, 9] обґрунтовано, що на елементарний процес можна дивитись, як на аналог елемента звичайної (статичної) множини. Зауважимо, що за елементарними процесами, користуючись теоремою 2, можна відновити всю базову мінливу множину, подібно до того, як звичайну множину можна відновити за її елементами.

3. Означення і властивості еволюційного розширення та еволюційного об’єднання.

Означення 8. Базові мінливі множини $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ будемо вважати **хронологічно спорідненими**, якщо $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_0) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1)$.

Означення 9. Базову мінливу множину $\mathcal{B}_1$ будемо називати *еволюційним розширенням* базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, якщо:

1. $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ хронологічно споріднені;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$;
3. Для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0)$ з умови $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$ випливає, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$, тобто $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ (де на бінарні відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}}$ та $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ слід дивитись як на множини пар, зокрема $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} = \{(\omega_2, \omega_1) \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0)\,,\ \omega_2 \leftarrow \omega_1\}$).

Якщо базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ є еволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, то будемо, також говорити, що $\mathcal{B}_0$ еволюційно включається в $\mathcal{B}_1$ і позначати цей факт через $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$ або через $\mathcal{B}_1 \underset{\leftarrow}{\supset} \mathcal{B}_0$.

Означення 10. Базову мінливу множину $\mathcal{B}_1$ будемо називати *суперееволюційним розширенням* базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, якщо:

1. $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ хронологічно споріднені;

2. $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$, тобто будь-який елементарний процес $\mathcal{B}_0$ є елементарним процесом $\mathcal{B}_1$.

Якщо базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ є супереволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, то будемо, також говорити, що $\mathcal{B}_0$ супереволюційно включається в $\mathcal{B}_1$ і позначати цей факт через $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}_1$ або через $\mathcal{B}_1 \underset{\leftarrow}{\sqsupset} \mathcal{B}_0$.

В твердженнях 4,5 $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ — довільні хронологічно споріднені базові мінливі множини.

Твердження 4. *Якщо* $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$, *то:*

1. $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_1)$*;*

2. $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$, *тобто для довільних* $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0)$ *з умови* $x_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} x_1$ *випливає, що* $x_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} x_1$.

Доведення. 1. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$, то, за означенням 9 (пункт 2), $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$. Отже, використовуючи рівність (2), отримуємо:

$$\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0)\} \subseteq \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)\} = \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_1)\,.$$

2. Нехай, $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0)$ і $x_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} x_1$. Тоді, згідно з властивістю 1(3), існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0)$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_i) = x_i$ $(i = 1, 2)$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$, то, за означенням 9 (пункти 2,3), $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$. Отже, маємо $\mathsf{bs}\,(\omega_i) = x_i$ $(i = 1, 2)$, де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$, тобто, з властивістю 1(3), $x_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} x_1$. □

Твердження 5. *Будь-яке супереволюційне розширення довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}_0$ *є її еволюційним розширенням, тобто якщо* $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}_1$, *то* $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$.

Доведення. **1**. Згідно з теоремою 2, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ маємо:

$$\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})) = \mathcal{B}, \tag{4}$$

а отже, за теоремою 1 (пункт 2),

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B}))) = \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} L. \tag{5}$$

2.1. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$, то $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$. Отже, використовуючи рівність (5), отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0) = \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}_0)} L \subseteq \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}_1)} L = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)\,.$$

2.2. Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_0)$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, згідно з (4) і теоремою 1 (пункт 3), маємо $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0)$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in L$. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$, то, за означенням 10, $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$. Отже, $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$. Таким чином, $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і $\omega_1, \omega_2 \in L$, де $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$ $(L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1))$. Тобто, згідно з (4) і теоремою 1 (пункт 3), $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$.

З підпунктів 2.1 і 2.2 випливає, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. ☐

Надалі домовимось через $M^{\times 2}$ позначати декартовий квадрат множини M, $\quad M^{\times 2} = M \times M$.

Наступний приклад покаже, що твердження, обернене до твердження 5 не справедливе.

Приклад 1. Нехай, $\mathcal{R}_0 = \{r_0\}$, $\mathcal{R}_1 = \{r_1\}$ — системи абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, де:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\,(r_0) = [0, \infty), \quad r_0(t) = t,\ t \in \mathfrak{D}\,(r_0)\,; \\ \mathfrak{D}\,(r_1) = \mathbb{R}, \quad r_1(t) = t,\ t \in \mathfrak{D}\,(r_1)\,. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ складаються лише з однієї траєкторії, то $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ є системами індивідуальних траєкторій в сенсі [9]. Покладемо:

$$\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_0)\,; \qquad \mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_1)\,,$$

де $\mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)$ і $\leq$ — стандартний порядок поля дійсних чисел.

Оскільки $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ — системи індивідуальних траєкторій, то, згідно з [9, теоерма 3.2],

$$\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0) = \mathcal{R}_0; \quad \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1) = \mathcal{R}_1.$$

І, оскільки $\mathcal{R}_0 \nsubseteq \mathcal{R}_1$, то, $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0) \nsubseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1)$. Отже, за означенням 10, $\mathcal{B}_1$ не може бути суперменеволюційним розширенням $\mathcal{B}_0$, тобто $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$.

З іншої сторони, враховуючи, що $r_0 \subseteq r_1$, згідно з теоремою 1, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{R}_{ord} = \mathbf{Tm}\left(\mathcal{B}_1\right);\\
&\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}_0} r = r_0 \subseteq r_1 = \bigcup_{r\in\mathcal{R}_1} r = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right);\\
&\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} = \Big\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \left(\exists r \in \mathcal{R}_0 \left(\omega_1,\omega_2 \in r\right)\right)\Big\} = \\
&= \Big\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \left(\omega_1,\omega_2 \in r_0\right)\Big\} \subseteq \\
&\subseteq \Big\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \left(\omega_1,\omega_2 \in r_1\right)\Big\} = \\
&= \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}},
\end{aligned}
$$

де $\wedge$ — знак логічної операції кон'юнкції.

Отже, ми довели, що $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right)$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ і $\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \subseteq \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}$. Тому, за означенням 9, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_1$. Таким чином, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\subset} \mathcal{B}_1$, хоча $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_1$.

Твердження 6. *Еволюційне включення має такі властивості:*

1. $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*;*
2. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_1$ *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$*;*
3. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_3$ *то* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_3$.

Доведення. **1.** Співвідношення $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}$ є тривіальним наслідком означення 9.

2. Нехай $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}_1$. Тоді, за означенням 9,

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right); \tag{6}$$

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}; \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}.$$

Отже,

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}. \tag{7}$$

З рівностей (6),(7) і властивості 1(4) випливає рівність $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

3. Нехай $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_3$. Тоді, за означенням 9, $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$ та $\mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_3$ — хронологічно споріднені. Отже, $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_3$ — також хронологічно споріднені. За означенням 9, із еволюційних включень $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_3$, випливають включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right); \ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}; \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_3\right); \ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_3}{\leftarrow}}.$$

Отже, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_3\right)$ і $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_3}{\leftarrow}}$. Тому, за означенням 9, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_3$. □

В роботі [9, твердження 3.5] було доведено, що для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$, $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$.

Твердження 7. *Якщо для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}$ виконується співвідношення $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ де $\mathcal{R} \neq \emptyset$, то*

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right) \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}.$$

Доведення. Нехай, виконується умова твердження. Покладемо:

$$\mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right).$$

Оскільки $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}) \subseteq 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$, то, за теоремою 1:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}). \tag{8}$$

Розглянемо довільні елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ такі, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, за теоремою 1,

$$\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right) \tag{9}$$

і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$. Оскільки $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то $r \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Тому, r — ланцюг $\mathcal{B}$. Отже, хоч одна з умов $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ або $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ мусить виконуватись. Тому, якщо припустити, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$, то отримаємо $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ і, за властивістю 1(1), $\omega_1 \neq \omega_2$. Звідси, за властивістю 1(2), $\mathsf{tm}\left(\omega_2\right) < \mathsf{tm}\left(\omega_1\right)$, що суперечить нерівності (9). Отже, припущення про те, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$ — помилкове. Тому $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Звідси, враховуючи включення (8), за означенням 9, отримуємо $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}$. □

Твердження 8. *Якщо $\mathcal{R}_i$ $(i \in \{1,2\})$ — системи абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M_i і при цьому $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, то*

$$\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_2)\,.$$

Доведення. Нехай, $\mathcal{R}_i$ $(i \in \{1,2\})$ — системи абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M_i і $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Покладемо:

$$\mathcal{B}_i := \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_i) \qquad (i \in \{1,2\}).$$

За теоремою 1:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}_1} r \subseteq \bigcup_{r\in\mathcal{R}_2} r = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)\,. \tag{10}$$

Розглянемо для довільні $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ такі, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$. Згідно з теоремою 1, $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}_1$ така, що $\omega_1,\omega_2 \in r$. Оскільки $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, то $r \in \mathcal{R}_2$. Отже, за теоремою 1, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$. Звідси, враховуючи включення (10), за означенням 9, отримуємо $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$. ☐

Твердження 9. *Для довільних хронологічно споріднених базових мінливих множин $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$, наступні твердження рівносильні:*

1. $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$;
2. $\mathbb{L}l\,(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l\,(\mathcal{B}_2)$;
3. $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l\,(\mathcal{B}_2)$;

Доведення. **1**. Доведемо імплікацію 1⇒2. Нехай, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$. Розглянемо довільний ланцюг $L \in \mathbb{L}l\,(\mathcal{B}_1)$. Оскільки, за означенням 9, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)$, то $L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)$. Необхідно довести, що відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$ на L задовольняє наступні умови:

1. $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$ є транзитивним відношенням на L;
2. для довільних $\omega_1,\omega_2 \in L$ справедливе хоч одне із співвідношень $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_2$.

Оскільки $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_1\right)$, то відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ задовольняє умови 1,2. За означенням 9, для $\omega_1, \omega_2 \in L$ з умови $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$ випливає співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$. Отже, бажаного результату буде досягнуто, коли ми покажемо, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L$ із співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$ випливає співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$.

Нехай $\omega_1, \omega_2 \in L$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$. Оскільки L — ланцюг в $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$, то хоч одна з умов $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_2$ повинна мати місце. Припустимо, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\not\leftarrow} \omega_1$. Тоді, оскільки бінарне відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ є рефлексивним, $\omega_1 \neq \omega_2$. Отже, маємо $\omega_1 \neq \omega_2$ і $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_2$. Тому, згідно з властивістю 1(2), $\mathsf{tm}\left(\omega_2\right) < \mathsf{tm}\left(\omega_1\right)$. З іншої сторони, оскільки $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$, то, згідно з властивістю 1(2), $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$. Отже, ми приходимо до суперечності, яка доводить, що припущення про те, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\not\leftarrow} \omega_1$ — неправильне. Таким чином, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$, що й потрібно було довести.

2. Нехай, $\mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_2\right)$. Враховуючи, що кожна лінія долі базової мінливої множини є її ланцюгом отримуємо $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_2\right)$.

3. Доведемо імплікацію 3⇒1. Нехай, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_2\right)$. Тоді, згідно з теоремою 2 і твердженням 7 отримаємо, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right), \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right), \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$. □

Твердження 10. *Суперееволюційне включення має такі властивості:*

1. $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*;*
2. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$*;*
3. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$ *то* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$.

Доведення. Перша властивість — тривіальна. Друга властивість випливає з тверджень 5 та 6. Доведемо третю властивість. Якщо $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$ то, за означенням 10, базові мінливі множини $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_3$ — хронологічно споріднені. Крім того, за означенням 10, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_2\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_3\right)$. Отже, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$. □

Означення 11. Індексовану сім'ю $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ базових мінливих множин будемо називати *хронологічно спорідненою*, якщо будь-які дві базові мінливі множини $\mathcal{B}_\alpha$,$\mathcal{B}_\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathcal{A})$ є хронологічно спорідненими.

Означення 12. Нехай, $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Базову мінливу множину $\mathcal{B}$ будемо називати *еволюційним об'єднанням* сім'ї $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, якщо:

(EO$_1$) $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}$ для довільного $\alpha\in\mathcal{A}$.

(EO$_2$) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$ при всіх $\alpha\in\mathcal{A}$, то $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$.

Твердження 11. *Довільна сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ має не більш, ніж одне еволюційне об'єднання.*

Доведення. Справді, нехай базові мінливі множини $\mathcal{B}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}$ є еволюційним об'єднанням сім'ї базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Тоді, за означенням 12, $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $\widetilde{\mathcal{B}} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}$. Отже, за твердженням 6, $\mathcal{B}=\widetilde{\mathcal{B}}$. ☐

Враховуючи твердження 11 (тобто єдиність еволюційного об'єднання), еволюційне об'єднання $\mathcal{B}$ сім'ї базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{B}=\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A}=\{1,...n\}$ $(n\in\mathbb{N})$, то будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \cdots \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_n := \overset{\overleftarrow{n}}{\bigcup_{k=1}} \mathcal{B}_k := \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Зауваження 3. З означень 12 та 9 випливає, що якщо $\mathcal{B}=\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$, то сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є хронологічно спорідненою, причому $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})=\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$.

Нехай $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина ($\mathcal{A}$ — довільна непорожня множина індексів), і для довільного індексу $\alpha\in\mathcal{A}$ визначена система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_\alpha$ з $\mathbb{T}$ в M_α. У такому випадку індексовану сім'ю систем абстрактних траєкторій $\left(\mathcal{R}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ будемо називати $\mathbb{T}$-*хронологічно спорідненою.* Множина $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{R}_\alpha$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}M_\alpha$. Отже, згідно з теоремою

1, існує базова мінлива множина $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right)$. За цією ж теоремою, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right) = \mathbb{T}$ (для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$). Отже, за означеннями 8 і 11, $\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є хронологічно спорідненою сім'єю базових мінливих множин.

Твердження 12. *Нехай* $\left(\mathcal{R}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *—* $\mathbb{T}$*-хронологічно споріднена сім'я систем абстрактних траєкторій. Тоді існує еволюційне об'єднання* $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)$*, причому:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right)$$

Доведення. Нехай, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{R}_\alpha$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M_α. Покладемо:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right) \quad (\alpha \in \mathcal{A}), \qquad \mathcal{B} := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right).$$

а) Оскільки $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\beta$ для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$, то, згідно з твердженням 8,

$$\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{A}).$$

б) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то, використовуючи твердження 1 і 9 для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ отримуємо:

$$\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right) = \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}'\right).$$

Звідси, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}'\right)$. Отже, згідно з твердженням 7, $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$.

З пунктів а) і б), за означенням 12, випливає, що $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$. □

Наслідок 1. *Довільна хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин* $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *(*$\mathcal{A} \neq \emptyset$*) має еволюційне об'єднання* $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$*, причому:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right),$$

де $\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ *(*$\alpha \in \mathcal{A}$*).*

Доведення. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Покладемо, $\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}\right)$. Оскільки $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин, то $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) = \mathbb{T}$, для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$. Згідно з [9, твердження 3.5] для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$ множина $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ в $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. Отже, $\left(\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — $\mathbb{T}$-хронологічно споріднена сім'я систем абстрактних траєкторій. Причому, згідно з теоремою 2, $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right), \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right)$, для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$. Отже, згідно з твердженням 12, існує еволюційне об'єднання $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha = \overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right)$, причому:

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha \quad = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right) \quad = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right).$$

☐

Наслідок 2. *Якщо* $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$, *то:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right); \qquad \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_\alpha}{\leftarrow}}.$$

Доведення випливає з наслідку 1 та теореми 1. ☐

Твердження 13 (про властивості еволюційного об'єднання)**.** *Нехай* $\left(\mathcal{B}_i\right)_{i\in\{1,2,3\}}$ *та* $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *(*$\mathcal{A} \neq \emptyset$*) — дві хронологічно споріднені сім'ї базових мінливих множин. Операція еволюційного об'єднання має такі властивості:*

1. $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1$.

2. *Якщо* $\mathcal{A} = \{\alpha_0\}$, *то* $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$.

3. *Якщо множина індексів* $\mathcal{A}$ *розпадається на диз'юнктне об'єднання непорожніх множин індексів* $\mathcal{A}_\gamma$ $(\gamma \in \mathcal{G})$, *тобто* $\mathcal{A} = \bigsqcup_{\gamma\in\mathcal{G}}\mathcal{A}_\gamma$, *то*

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}}\left(\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}}\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Зокрема якщо $\mathbf{card}\,(\mathcal{A}) \geq 2$, *то для довільного* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *має місце рівність*

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}} \mathcal{B}_\alpha \right), \qquad (11)$$

а у випадку $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ *маємо рівність.*

$$\left(\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3\right) = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3. \qquad (12)$$

4. *Якщо, для деякої базової мінливої множини* $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}'$ *(для довільного* $\alpha \in \mathcal{A}$*), то* $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}'$.

5. *Якщо для деякого* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *при всіх* $\alpha \in \mathcal{A}$ *справедливе еволюційне включення* $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_{\alpha_0}$ *то* $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$. *Зокрема* $\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B} = \mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$.

Зауваження 4. У твердженні 13 $\mathbf{card}\,(\mathcal{A})$ означає потужність множини $\mathcal{A}$.

Доведення. **1.** За означенням, $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 = \overleftarrow{\bigcup}_{i\in\{1,2\}} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1$.

2. Друга властивість — тривіальний наслідок означення 12.

3. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$. Покладемо $\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. Оскільки $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин, то $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{T}$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$. Отже, згідно із зауваженням 3, еволюційні об'єднання $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma} \mathcal{B}_\alpha$ $(\forall\gamma \in \mathcal{G})$ та $\overleftarrow{\bigcup\limits_{\gamma\in\mathcal{G}}}\left(\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{B}_\alpha\right)$ визначені коректно. Далі, використовуючи наслідок 1, твердження 12 та теорему 2, отримуємо:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}\ \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\right) =$$

$$= \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\right) = \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}}\left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha))\right) =$$

$$= \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}}\left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{B}_\alpha\right).$$

Зокрема, у випадку **card** $(\mathcal{A}) \geq 2$, для довільного фіксованого індексу $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, використовуючи пункт 2, даного твердження отримуємо:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\{\alpha_0\}\sqcup(\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\})}}\mathcal{B}_\alpha = \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\{\alpha_0\}}}\mathcal{B}_\alpha\right) \overleftarrow{\cup} \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in(\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\})}}\mathcal{B}_\alpha$$
$$= \mathcal{B}_{\alpha_0} \overleftarrow{\cup} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}}\mathcal{B}_\alpha\right),$$

тобто рівність (11). Рівність (12) випливає з рівності (11) у частинному випадку $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ з використанням комутативності операції еволюційного об'єднання.

4. Четвертий пункт даного твердження є тривіальним наслідком означення 12.

5. Нехай $\mathcal{B}_\alpha \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$ для деякого (фіксованого) $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Тоді, згідно з попереднім пунктом даного твердження, $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$. З іншого боку, за означенням 12, $\mathcal{B}_{\alpha_0} \underset{\to}{\subseteq} \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$. Отже, за твердженням 6 (пункт 2), $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$. ☐

Нехай $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ $(\mathsf{A}, \mathsf{B} \neq \emptyset)$ — двопараметрична індексована сім'я базових мінливих множин. Сім'ю $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ будемо називати *хронологічно спорідненою*, якщо для довільних індексів $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathsf{A}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathsf{B}$ базові мінливі множини $\mathcal{B}_{\alpha_1\beta_1}, \mathcal{B}_{\alpha_2\beta_2}$ є хронологічно спорідненими. Якщо сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ $(\mathsf{A}, \mathsf{B} \neq \emptyset)$ є хронологічно спорідненою, то для довільних фіксованих $\alpha_0 \in \mathsf{A}$, $\beta_0 \in \mathsf{B}$ однопараметричні сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_{\alpha_0\beta})_{\beta\in\mathsf{B}}$ та $(\mathcal{B}_{\alpha\beta_0})_{\alpha\in\mathsf{A}}$ будуть хронологічно споріднені, а отже, згідно з наслідком 1, існують еволюційні об'єднання $\mathcal{U}_{\alpha_0,*} = \overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathsf{B}}\mathcal{B}_{\alpha_0\beta}$ та $\mathcal{U}_{*,\beta_0} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathsf{A}}\mathcal{B}_{\alpha\beta_0}$. Причому, за зауваженням 3, базові мінливі множини $\mathcal{U}_{\alpha_0,*}$ та $\mathcal{U}_{*,\beta_0}$ хронологічно споріднені з базовою мінливою множиною $\mathcal{B}_{\alpha_0,\beta_0}$. Тому, враховуючи хронологічну спорідненість сім'ї $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$, бачимо, що сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{U}_{\alpha,*})_{\alpha\in\mathsf{A}}$ та $(\mathcal{U}_{*,\beta})_{\beta\in\mathsf{B}}$ також є хронологічно спорідненими. Це означає, що можна визначити подвійні еволюційні об'єднання $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathsf{A}}\mathcal{U}_{\alpha,*} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathsf{A}}\overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathsf{B}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ та $\overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathsf{B}}\mathcal{U}_{*,\beta} = \overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathsf{B}}\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathsf{A}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}$. Доведемо, що в подвійному еволюційному об'єднанні можна змінювати порядок об'єднування. Справді, зафіксуємо довільну пару індексів $\alpha_0 \in \boldsymbol{\mathsf{A}}$, $\beta_0 \in \boldsymbol{\mathsf{B}}$. Покладемо $\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_{\alpha_0\beta_0}\right)$. Використовуючи теорему 2 та твердження 12, отримуємо:

$$\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} =$$

$$= \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_{\alpha\beta}\right)\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_{\alpha\beta}\right)\right) =$$

$$= \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_{\alpha\beta}\right)\right) = \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_{\alpha\beta}\right)\right) =$$

$$= \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}.$$

Враховуючи доведене вище, надалі для подвійного еволюційного об'єднання будемо використовувати позначення:

$$\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}},\,\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} := \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} = \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\beta\in\boldsymbol{\mathsf{B}}}}\;\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{\mathsf{A}}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}.$$

Аналогічно вводиться поняття хронологічної спорідненості для багатопараметричної сім'ї базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right)_{\alpha_1\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_1,\ldots,\alpha_n\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathsf{A}}_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. Еволюційним об'єднанням сім'ї $\left(\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right)_{\alpha_1\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_1,\ldots,\alpha_n\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_n}$ будемо називати базову мінливу множину:

$$\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha_1\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_1,\ldots,\alpha_n\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_n}}\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha_1\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_1}}\cdots\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha_n\in\boldsymbol{\mathsf{A}}_n}}\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}.$$

Аналогічно, як і для випадку двопараметричної сім'ї доводиться, що об'єднання в правій частині останньої рівності існує, і не залежить від порядку розташування знаків еволюційного об'єднання.

Означення 13. Нехай, $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ — довільна хронологічно споріднена індексована сім'я базових мінливих множин. Базову мінливу множину $\mathcal{B}$ будемо називати *суперееволюційним об'єднанням* сім'ї $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, якщо:

(cEO$_1$) $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$.

(cEO$_2$) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}'$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.

З означення 13 і твердження 6 (пункт 2) випливає наступний наслідок.

Наслідок 3. *Якщо суперееволюційне об'єднання хронологічно споріднeної сім'ї базових мінливих множин* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *($\mathcal{A} \neq \emptyset$) існує, то воно єдине.*

Супереволюційне об'єднання $\mathcal{B}$ сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha .$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A} = \{1, ...n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, то замість позначення $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ будемо використовувати позначення $\overset{\leftarrow}{\bigvee}{}_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k$ або просто $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \cdots \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_n$:

$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{k=1}^{n}} \mathcal{B}_k := \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \cdots \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_n := \overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha .$$

Наступне твердження можна інтерпретувати як певний аналог теореми про те, що кожна обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню грань.

Твердження 14. *Якщо для хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *($\mathcal{A} \neq \emptyset$) існує, така базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}}$, що для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливе включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \widetilde{\mathcal{B}}$, то супереволюційне об'єднання $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує, причому має місце рівність:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha .$$

Доведення. Покладемо:

$$\mathcal{B} := \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha .$$

Доведемо, що:

$$\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \left(\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \right). \tag{13}$$

Припустимо супротивне. Тоді існують індекс $\beta \in \mathcal{A}$ та лінія долі $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\beta)$ такі, що $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$.

Згідно з означенням 12, $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$. Отже, згідно з твердженням 9, $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Тому, оскільки $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, існує ланцюг $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ такий, що $L \subset L_1$. Оскільки $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 5, для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$ $\quad \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{B}}$. Отже, згідно з твердженням 13 (пункт 4) $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{B}}$. Оскільки $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то, згідно з твердженням 9, $L_1 \in \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.

Таким чином, ми довели існування ланцюга $L_1 \in \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$ такого, що $L \subset L_1$. А це означає, що $L \notin \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$. З іншої сторони, оскільки $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\beta)$, то, за означенням 10, співвідношення $L \in \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$ мусить виконуватись.

Отримана суперечність доводить співвідношення (13). Із співвідношення (13), за означенням 10, випливає, що

$$\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \left(\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}\right).$$

Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умову ($\mathbf{cEO}_1$) означення 13.

Доведемо, що умова ($\mathbf{cEO}_2$) означення 13 для $\mathcal{B}$ також виконується. Справді, нехай для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}'$ маємо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}'$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$. Тоді, згідно з твердженням 5, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Отже, за твердженням 13 (пункт 4), $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B}'$. ☐

Наслідок 4. *Якщо існує супер携еволюційне об'єднання* $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, *то воно співпадає з відповідним еволюційним об'єднанням, тобто:*

$$\overleftarrow{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Доведення. Справді, якщо для хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ існує суперэволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, то базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ задовольнятиме умови твердження 14. ☐

Як буде видно з наступного прикладу, на відміну від еволюційного об'єднання, суперевολюційне об'єднання довільної хронологічно споріднено сім'ї базових мінливих множин існує не завжди.

Приклад 2. Нехай системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_0 = \{r_0\}$, $\mathcal{R}_1 = \{r_1\}$ ті ж самі, що й в прикладі 1. Як було показано в прикладі 1, для базових мінливих множин

$$\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_0\right); \qquad \mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_1\right)$$

справедливе еволюційне включення $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Отже, згідно з твердженням 13, пункт 5, $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1$. З іншої сторони суперевολюційного об'єднання $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$ не існує. Справді, припустимо супротивне. Тоді, згідно з наслідком 4, $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1$. Проте, як було показано в прикладі 1, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubset} \mathcal{B}_1$. Отже, за означенням 13, $\mathcal{B}_1$ не може бути суперевολюційним об'єднанням $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$. Одержана суперечність доводить, що суперевολюційного об'єднання $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$ не існує.

Означення 14. Хронологічно споріднену сім'ю базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ будемо називати *еволюційно насиченою*, якщо:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha\right). \tag{14}$$

Зауваження 5. З означень 14 та 10 випливає, що хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ є еволюційно насиченою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$ $(\forall \beta \in \mathcal{A})$.

Твердження 15. *Суперевολюційне об'єднання* $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ *хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин* $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ *існує тоді і тільки тоді, коли ця сім'я є еволюційно насиченою.*

Доведення. Припустимо, що суперевολюційне об'єднання $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує. Тоді, за означенням 13, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Отже, за означенням 10, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, тобто $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Але, за наслідком 4, $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Отже, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha\right)$.

Навпаки, припустимо, що хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ є еволюційно насиченою, тобто виконується рівність (14). Покладемо $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Згідно (14), $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Отже, за означенням 10, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Тому, згідно з твердженням 14, суперeволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує. $\square$

Лема 1 (про властивості еволюційної насиченості)**.** *Нехай,* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *$(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ — довільна хронологічно споріднена індексована сім'я базових мінливих множин.*

1. *Якщо існує така базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}}$, що для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливе включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$, то сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.*

2. *Якщо $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.*

3. *Якщо $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при умові $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$, то сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.*

4. *Якщо сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою і $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, то підсім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}_1}$ також є еволюційно насиченою.*

Доведення. 1. Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 14, існує суперeволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, а отже, за твердженням 15, сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

2. Якщо $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 10, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Тому за попереднім пунктом, сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

3. Нехай, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при умові $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$. Покладемо, $\mathcal{B} := \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Нехай, $L \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)$. Тоді існує індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такий, що $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Оскільки, за означенням 12, $\mathcal{B}_{\alpha_0} \underset{\rightarrow}{\subset} \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$, то, за твердженням 9, $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Доведемо, що $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Припустимо супротивне. Тоді існує ланцюг $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ $(L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ такий, що $L \subset L_1$. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан $\omega \in L_1$. Оскільки L — лінія долі $\mathcal{B}_{\alpha_0}$, то, згідно з твердженням 2 і зауваженням 1, $L \neq \emptyset$. Отже, існує елементарно-часовий ω_0 такий, що $\omega_0 \in L$.

Оскільки $L \subset L_1$, то $\omega_0 \in L_1$. Оскільки L_1 — ланцюг $\mathcal{B}$ і $\omega, \omega_0 \in L_1$, то хоч одна з умов $\omega_0 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega$ або $\omega \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_0$ мусить виконуватись. Отже, за наслідком 2, існує індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ такий, що $\omega_0 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega$ або $\omega \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega_0$. Але, оскільки відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow}}$ діє на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$, із обох співвідношень випливає, що $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. І, враховуючи, що, за умовою, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\alpha_0} = \mathcal{B}_{\alpha_1}$. Отже, $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Таким чином, довільний елемент $\omega \in L_1$ належить до $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Тому, $L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Доведемо, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L_1$ співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$. Якщо $\omega_1, \omega_2 \in L_1$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$, то, за наслідком 2, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Навпаки, нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ (де $\omega_1, \omega_2 \in L_1$). Оскільки $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, то, за наслідком 2, існує індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ такий, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega_1$. Отже, оскільки відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow}}$ діє на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$, то $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. І, враховуючи, що, за умовою, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\alpha_0} = \mathcal{B}_{\alpha_1}$. Отже, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$, що й треба було довести. Оскільки, згідно із щойно доведеним, бінарні відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ та $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow}}$ на множині L_1 співпадають, і L_1 є ланцюгом у $\mathcal{B}$ (відносно відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$), то L_1 також буде ланцюгом і у $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ (відносно відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow}}$). Таким чином, припущення про те, що $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ приводить до існування ланцюга $L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$ в $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ такого, що $L \subset L_1$, що суперечить тому факту, що $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Тому, $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Отже, довільна лінія долі $L \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)$ належить до $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Тобто, за означенням 14, сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

4. Якщо сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою, то, за твердженням 15, існує супереволюційне об'єднання $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Тому, за означенням 13, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ будемо мати, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$. Тому, згідно з першим пунктом леми, підсім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_1}$ є еволюційно насиченою. $\square$

З твердження 13 і означення 13, враховуючи наслідок 4, твердження 15 та лему 1, отримуємо наступне твердження.

Твердження 16 (про властивості суперeволюційного об'єднання)**.** *Нехай* $\left(\mathcal{B}_i\right)_{i\in\{1,2,3\}}$ *та* $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *(*$\mathcal{A}\neq\emptyset$*) — дві еволюційно насичені сім'ї базових мінливих множин. Операція суперeволюційного об'єднання має такі властивості:*

1. $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$.
2. *Якщо* $\mathcal{A}=\{\alpha_0\}$, *то* $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{B}_{\alpha_0}$.
3. *Якщо множина індексів* $\mathcal{A}$ *розпадається на диз'юнктне об'єднання непорожніх множин індексів* $\mathcal{A}_\gamma$ *(*$\gamma\in\mathcal{G}$*), тобто* $\mathcal{A}=\bigsqcup_{\gamma\in\mathcal{G}}\mathcal{A}_\gamma$ *то*
$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha=\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}}\left(\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}}\mathcal{B}_\alpha\right). \tag{15}$$
Зокрема, якщо $\mathbf{card}\,(\mathcal{A})\geq 2$, *то для довільного* $\alpha_0\in\mathcal{A}$ *має місце рівність*
$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{B}_{\alpha_0}\overset{\leftarrow}{\cup}\left(\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}}\mathcal{B}_\alpha\right), \tag{16}$$
а у випадку $\mathcal{A}=\{1,2,3\}$ *маємо рівність:*
$$\left(\mathcal{B}_1\overset{\leftarrow}{\vee}\mathcal{B}_2\right)\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{B}_3=\mathcal{B}_1\overset{\leftarrow}{\cup}\left(\mathcal{B}_2\overset{\leftarrow}{\vee}\mathcal{B}_3\right)=\mathcal{B}_1\overset{\leftarrow}{\vee}\mathcal{B}_2\overset{\leftarrow}{\vee}\mathcal{B}_3. \tag{17}$$
4. *Якщо, для деякої базової мінливої множини* $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}_\alpha\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}'$ *(для довільного* $\alpha\in\mathcal{A}$*), то* $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}'$.
5. *Якщо для деякого* $\alpha_0\in\mathcal{A}$ *при всіх* $\alpha\in\mathcal{A}$ *справедливе еволюційне включення* $\mathcal{B}_\alpha\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_{\alpha_0}$ *то* $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{B}_{\alpha_0}$. *Зокрема* $\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\vee}\mathcal{B}=\mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$.

Виявляється, що в пункті 3 твердження 16 (точніше, в рівностях (15),(16) та (17)) знак еволюційного об'єднання не можна замінити на знак суперeволюційного об'єднання, крім того, в пункті 4 еволюційне включення не можна замінити на суперeволюційне. І, як покаже наступний приклад, незважаючи на те, що довільна підсім'я еволюційно насиченої сім'ї $\left(\mathcal{B}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ базових мінливих множин сама є еволюційно насиченою, сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_{\alpha_0},\left(\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}\mathcal{B}_\alpha\right)\right)$

при $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ може бути вже не еволюційно насиченою (тобто суперееволюційного об'єднання $\mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\vee} \left(\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}} \mathcal{B}_\alpha\right)$, взагалі кажучи, може не існувати, незважаючи на те, що супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує).

Приклад 3. Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, де $\mathbf{T} = \{0,1,2,3\}$ і $\leq$ — стандартний порядок на множині натуральних чисел. Визначимо абстрактні траєкторії r_i $(i \in \{1, \cdots, 4\})$ з $\mathbb{T}$ в множину $M = \{0,1,2\}$ за допомогою наступних таблиць.

t	$r_1(t)$
0	1
1	0
2	0
3	0

Таблиця 1.

t	$r_2(t)$
0	0
1	1
2	0
3	1

Таблиця 2.

t	$r_3(t)$
0	0
1	0
2	1
3	2

Таблиця 3.

t	$r_4(t)$
0	0
1	0
2	0
3	1

Таблиця 4.

Довільна одноелементна множина траєкторій $\mathcal{R}_i = \{r_i\}$, $(i \in \{1, \cdots, 4\})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в множину M_i, де $M_1 = M_2 = M_4 = \{0,1\}$, $M_3 = M = \{0,1,2\}$. Покладемо:

$$\mathcal{B}_i := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_i\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \{r_i\}\right) \qquad (i \in \{1, \cdots, 4\}).$$

Сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^4$ є хронологічно спорідненою. Доведемо, що ця сім'я є еволюційно насиченою. Покладемо, $\mathcal{B} := \overleftarrow{\bigcup}_{i=1}^4 \mathcal{B}_i$. Згідно з твердженням 12,

$$\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup_{i=1}^{4}} \mathcal{B}_i = \overleftarrow{\bigcup_{i=1}^{4}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \{r_i\}\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \{r_1, r_2, r_3, r_4\}\right). \tag{18}$$

Згідно з означенням 12 (пункт $(\mathbf{EO}_1)$):

$$\mathcal{B}_i \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \overleftarrow{\bigcup_{j=1}^{4}} \mathcal{B}_j = \mathcal{B} \qquad (i \in \{1, \ldots, 4\}). \tag{19}$$

Необхідно довести включення:

$$\bigcup_{i=1}^{4} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_i\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}\right). \tag{20}$$

Оскільки довільна система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_i$ $(i \in \{1, \ldots, 4\})$ складається лише з однієї траєкторії r_i, то всі $\mathcal{R}_i$ є системами індивідуальних траєкторій. Отже, за [9, теорема 3.2],

$$\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_i) = \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R}_i)) = \mathcal{R}_i = \{r_i\} \quad (i \in \{1, \ldots, 4\}). \qquad (21)$$

Враховуючи (18) та твердження 1, для довільного $i \in \{1, \ldots, n\}$ маємо:

$$r_i \in \mathbb{L}l\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \{r_1, r_2, r_3, r_4\})) = \mathbb{L}l(\mathcal{B}) \quad (i \in \{1, \ldots, 4\}).$$

Оскільки кожна траєкторія r_i визначена на всій множині $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, 3\}$, де згідно з рівністю (18), $\mathbf{T} = \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, то її не можна "розширити" в $\mathcal{B}$, додаючи до області визначення нові моменти часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Тому $r_i \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ $(i \in \{1, \ldots, 4\})$. Отже, $\bigcup_{i=1}^{4} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_i) = \bigcup_{i=1}^{4} \{r_i\} \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Включення (20) доведено.

Отже, за означенням 14, сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^{4} = (\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \{r_i\}))_{i=1}^{4}$ є еволюційно насиченою. Тому, згідно з твердженням 15, існує супереволюційне об'єднання $\overset{\leftarrow}{\bigvee}{}_{i=1}^{4} \mathcal{B}_i$, причому, за наслідком 4, $\overset{\leftarrow}{\bigvee}{}_{i=1}^{4} \mathcal{B}_i = \overset{\leftarrow}{\bigcup}{}_{i=1}^{4} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$. Тому

$$\mathcal{B}_i \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B} \quad (i \in \{1, \ldots, 4\}). \qquad (22)$$

Покладемо:

$$\mathcal{B}_0 := \overset{\leftarrow}{\bigvee_{i=1}^{3}} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_3,$$

і доведемо, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}$.

Згідно з теоремою 1, для довільного $i \in \{1, \ldots, 4\}$ мають місце рівності:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_i) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \{r_i\})) = r_i; \qquad (23)$$

$$\underset{\mathcal{B}_i}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}} = \left\{(\omega_2, \omega_1) \in r_i^{\times 2} \mid (\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2))\right\}. \qquad (24)$$

Покладемо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_1 := (0,0)\,, \quad \mathbf{w}_2 := (1,0)\,, \quad \mathbf{w}_3 := (2,0)\,, \quad \mathbf{w}_4 := (3,0)\,, \\ &\mathbf{w}_5 := (0,1)\,, \quad \mathbf{w}_6 := (1,1)\,, \quad \mathbf{w}_7 := (3,1)\,, \quad \mathbf{w}_8 := (2,1)\,, \\ &\mathbf{w}_9 := (3,2)\,. \end{aligned}$$

$$\mathbf{W} := \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_9\}\,.$$

Тоді, враховуючи рівності (23),(24) отримуємо:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = r_1 = \left\{\mathbf{w}_5, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\right\}; & \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_6, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_7\right\}; \\ \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_3\right) = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_8, \mathbf{w}_9\right\}; & \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_4\right) = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_7\right\}; \end{array} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \quad &= \quad \mathsf{\mathbf{diag}}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)\right) \cup \left\{\left(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2\right)\right\} \cup \\ &\qquad \cup \left\{\left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_3\right)\right\} \end{aligned}$$

(де $\mathsf{\mathbf{diag}}(\mathsf{\mathbf{K}}) = \{(\omega, \omega) \mid \omega \in \mathsf{\mathbf{K}}\}$, $\mathsf{\mathbf{K}}$ – довільна множина);

$$\begin{aligned} \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}} \quad &= \quad \mathsf{\mathbf{diag}}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)\right) \cup \left\{\left(\mathbf{w}_6, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_6\right)\right\} \cup \\ &\qquad \cup \left\{\left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_6\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_3\right)\right\}; \\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_3}{\leftarrow}} \quad &= \quad \mathsf{\mathbf{diag}}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_3\right)\right) \cup \left\{\left(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_8, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_8, \mathbf{w}_2\right)\right\} \cup \\ &\qquad \cup \left\{\left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_8\right)\right\}; \\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_4}{\leftarrow}} \quad &= \quad \mathsf{\mathbf{diag}}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_4\right)\right) \cup \left\{\left(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2\right)\right\} \cup \\ &\qquad \cup \left\{\left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_3\right)\right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Отже, згідно з наслідком 4, наслідком 2 та рівністю (2):

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\overset{\overset{3}{\leftarrow}}{\underset{i=1}{\bigcup}} \mathcal{B}_i\right) = \bigcup_{i=1}^{3} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_i\right) = \left\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_9\right\} = \mathbf{W}; \tag{27}$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) = \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)\right\} = \{0, 1, 2\} = M;$$

$$\xleftarrow[\mathcal{B}_0]{\mathbb{B}\mathfrak{s}} = \xleftarrow[\overset{\overset{3}{\leftarrow}}{\underset{i=1}{\bigcup}} \mathcal{B}_i]{\mathbb{B}\mathfrak{s}} = \bigcup_{i=1}^{3}\left(\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_i}{\leftarrow}}\right) = \mathsf{\mathbf{diag}}(\mathbf{W}) \cup$$

$$\begin{aligned} &\cup \left\{\left(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\right), \left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_3\right), \right. \\ &\quad \left(\mathbf{w}_6, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_6\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_6\right), \left(\mathbf{w}_7, \mathbf{w}_3\right), \\ &\left. \left(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_8, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_8, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_1\right), \left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_2\right), \left(\mathbf{w}_9, \mathbf{w}_8\right)\right\} \end{aligned} \tag{28}$$

Розглянемо множину $L_0 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)$. Із співвідношення (28) випливає, що для $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \in L_0$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ умова $\mathbf{w}_j \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \mathbf{w}_i$ виконується тоді і тільки тоді, коли $i \leq j$ тому (оскільки стандартний порядок натуральних чисел на множині $\{1, 2, 3\}$ є лінійним) множина $L_0 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ є ланцюгом в $\mathcal{B}_0$. Доведемо, що L_0 є лінією долі $\mathcal{B}_0$. Припустимо супротивне. Тоді у множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)$ існує ланцюг L_1 такий, що $L_0 \subset L_1$. Згідно з [9, твердження 3.5], L_0 та L_1 є абстрактними траєкторіями з $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_0) = \mathbf{T} = \{0,1,2,3\}$ в $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0) = \{0,1,2\}$. Оскільки $\mathfrak{D}\,(L_0) = \{0,1,2\}$, то строге включення $L_0 \subset L_1$ може виконуватись лише за умови $\mathfrak{D}\,(L_1) = \{0,1,2,3\} = \mathbf{T}$. Тому можливими є лише такі три випадки $L_1(3) = 0$, $L_1(3) = 1$, $L_1(3) = 2$. Проте:

Випадок 1 ($L_1(3) = 0$) є неможливим, оскільки в цьому випадку $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_4 \in L_1$ ($\mathbf{w}_1 \in L_0 \subset L_1$), де, згідно (28), $\mathbf{w}_4 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_1$ і $\mathbf{w}_1 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_4$.

Випадок 2 ($L_1(3) = 1$) є неможливим, оскільки в цьому випадку $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_7 \in L_1$ ($\mathbf{w}_2 \in L_0 \subset L_1$), де, згідно (28), $\mathbf{w}_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_7$ і $\mathbf{w}_7 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_2$.

Випадок 3 ($L_1(3) = 2$) є неможливим, оскільки в цьому випадку $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_9 \in L_1$ ($\mathbf{w}_3 \in L_0 \subset L_1$), де, згідно (28), $\mathbf{w}_3 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_9$ і $\mathbf{w}_9 \underset{\mathcal{B}_0}{\nleftarrow} \mathbf{w}_3$.

Отже, жоден з перелічених випадків не є можливим. Тому зроблене припущення помилкове, тобто $L_0 \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0)$. Проте, $L_0 \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, оскільки, згідно (21) та (20) $r_4 \in \{r_4\} = \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_4) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ і при цьому $r_4 \supset L_0$.

Таким чином, $L_0 \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_0)$ і $L_0 \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Тобто, $\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}$. Отже, в пункті 4 твердження 16 знак “$\underset{\rightarrow}{\subsetneq}$” не можна замінити на знак “$\underset{\rightarrow}{\sqsubseteq}$” (оскільки, згідно (22), $\mathcal{B}_i \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$ ($i \in \{1,2,3\}$), але $\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}$). Крім того, сім’я з двох базових мінливих множин $\left(\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i,\, \mathcal{B}_4\right)$ не є еволюційно насиченою, згідно із зауваженням 5. Тому суперdroеволюційного об’єднання $\left(\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i\right) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_4$ не існує, хоча існує об’єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{4} \mathcal{B}_i$, причому, згідно з твердженням 16, $\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{4} \mathcal{B}_i = \left(\overleftarrow{\bigvee}_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_4$.

4. Про існування еволюційних розширень базових мінливих множин.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M.*

Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R})$ є еволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.

Доведення. Щоб переконатись у правильності теореми досить скористатись твердженням 1, означенням 12 та твердженням 9. □

Означення 15. Систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M будемо називати:

- *Еволюційно насиченою*, якщо $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}))$.
- *Еволюційно насиченою відносно* базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:
  - **1)** $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$;
  - **2)** $\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \cup \mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)$.

Твердження 17.

1. *Якщо система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ еволюційно насичена відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$, то вона є еволюційно насиченою.*
2. *Якщо система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M є еволюційно насиченою і при цьому $\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$ де $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$, то $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою відносно $\mathcal{B}$.*

Доведення. **1.** Нехай, система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M еволюційно насичена відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді, за означенням 15, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$.

Згідно з твердженням 1, довільна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ належить до $\mathbb{L}l\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}))$. Припустимо, що r не є лінією долі в $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$. Тоді існує ланцюг $L \in \mathbb{L}l\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}))$ такий, що $r \subset L$. Оскільки, за означенням 12, $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$, то, за твердженням 9, $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)$. Отже, в базовій мінливій множині $\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$ існує ланцюг $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)$ такий, що $r \subset L$. Тому $r \notin \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)$. Проте, з іншої сторони, оскільки $\mathcal{R}$ еволюційно насичена відносно $\mathcal{B}$, за означенням 15, співвідношення $r \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})\right)$ для траєкторії $r \in \mathcal{R}$ мусить виконуватись. Отримана суперечність показує, що $r \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}))$ $(\forall r \in \mathcal{R})$. Тому система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою.

2. Нехай, система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M є еволюційно насиченою і при цьому $\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$ де $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$. Тоді, згідно

з теоремою 1, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)\cap\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})=\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}}r\right)\cap\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})=\emptyset$. Отже, за лемою 1 (пункт 3), сім'я з двох базових мінливих множин $(\mathcal{B},\ \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right))$ є еволюційно насиченою. Тому, за означенням 14, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)\cup\mathbb{L}d(\mathcal{B})\subseteq\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Оскільки система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою, то, за означенням 15, $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Отже, $\mathcal{R}\cup\mathbb{L}d(\mathcal{B})\subseteq\mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)\cup\mathbb{L}d(\mathcal{B})\subseteq\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$, що, за означенням 15, означає, що система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою відносно $\mathcal{B}$. ☐

Теорема 4. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M, еволюційно насичена відносно $\mathcal{B}$.*

Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)$ є суперреволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.

Доведення. Покладемо, $\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)$. Згідно з твердженням 12:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\bigcup_{r\in\mathcal{R}}\{r\}\right)=\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\overleftarrow{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}}\mathcal{B}_r,\\ \text{де}\quad\mathcal{B}_r=\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\{r\}\right)\quad(r\in\mathcal{R}).\end{gathered}\tag{29}$$

Оскільки для довільного $r\in\mathcal{R}$ однотраєкторна система $\mathcal{R}_r=\{r\}$ є системою індивідуальних траєкторій в сенсі [9, означення 3.3], то згідно з [9, теорема 3.2], $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_r\right)=\{r\}$ $(\forall\, r\in\mathcal{R})$. Отже, беручи до уваги означення 15, та рівність (29) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}d(\mathcal{B})\cup\bigcup_{r\in\mathcal{R}}\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_r\right)&=\mathbb{L}d(\mathcal{B})\cup\bigcup_{r\in\mathcal{R}}\{r\}=\mathbb{L}d(\mathcal{B})\cup\mathcal{R}\subseteq\\ &\subseteq\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)\right)=\mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)=\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\overleftarrow{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}}\mathcal{B}_r\right).\end{aligned}\tag{30}$$

Тому, згідно з твердженням 15, існує суперреволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$, де $\mathcal{A}=\mathcal{R}\bigsqcup\{\alpha_0\}$, $\mathcal{B}_{\alpha_0}=\mathcal{B}$ і α_0 — довільний індекс такий, що $\alpha_0\notin\mathcal{R}$ (наприклад в якості α_0 можна взяти довільний елемент завідомо непорожньої множини $2^{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}$). Згідно з наслідком 4 та рівністю

(29):

$$\overset{\longleftarrow}{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha=\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{B}_{\alpha_0}\overset{\leftarrow}{\cup}\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}}\mathcal{B}_r=\mathcal{B}\overset{\leftarrow}{\cup}\overset{\longleftarrow}{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}}\mathcal{B}_r=\widetilde{\mathcal{B}}.$$

Отже, за означенням 13, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\alpha_0}\underset{\rightarrow}{\sqsubseteq}\widetilde{\mathcal{B}}$. Тобто $\widetilde{\mathcal{B}}$ є суперocc еволюційним розширенням $\mathcal{B}$. При цьому, згідно з (30), $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d(\mathcal{B})\cup\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$. $\square$

Література

[1] *Проблемы Гильберта* / под ред. П. С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 240 с.

[2] *Гладун А. Д.* Шестая проблема Гильберта // Потенциал. – 2006. – № 3. (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert)

[3] *Petunin Yu. I., Klyushin Yu. I.* A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory Probab. Math. Statist. – 2005. – № 71. – С. 165–179.

[4] *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – С. 192–227.

[5] *Grushka Ya. I.* Abstract concept of changeable set // Preprint arXiv:1207.3751v1. – 2012. – 54 p.

[6] *Грушка Я. І.* Видимість у мінливих множинах // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 122–145.

[7] *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх властивості // Доповіді НАН України. – 2012. – № 5. – С. 12–18.

[8] *Грушка Я. І.* Примітивні мінливі множини та їх властивості // Математичний вісник НТШ. – 2012. – **9**. – С. 52–80.

[9] *Грушка Я. І.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1198–1218.

[10] *Grushka Ya.I.* Tachyon generalization for Lorentz transforms // Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **20**, № 2. – С. 127-145.

[11] *Грушка Я. І.* Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 138–169.

[12] *Паули В.* Теория относительности. – Москва: Наука, 1991. – 325 с.

[13] *Биркгоф Г.* Теория решёток. – Москва: Наука, 1984. – 567 с.

[14] *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – Москва: Мир, 1970. – 416 с.