Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 126–153

УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,3], Г. С. Пасічник[2,3]

([1] Національний технічний університет України "КПІ", Київ;
[2] Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці;
[3] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів)

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів

ivasyshen_sd@mail.ru, pasichnyk@mail.ru

The fundamental solution of the Cauchy problem for second order degenerate parabolic equation was constructed and its properties were investigated. Leading coefficients and lowest ones are respectively constants and increasing functions.

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів, побудовано та вивчено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші.

1. Вступ

Важливим поняттям для параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), детальна інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть крайових задач. У монографіях [1, 2] підсумовано результати, що стосуються побудови, властивостей і застосувань ФРЗК для загальних параболічних за І.Г. Петровським і за С.Д. Ейдельманом рівнянь з обмеженими коефіцієнтами, а також деяких рівнянь зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами в групі молодших членів. Якщо результати ФРЗК для рівнянь з обмеженими коефіцієнтами досить точні, то не такими вони є у випадку зростаючих коефіцієнтів. Тим часом параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні реальних процесів (наприклад, у задачах теорії випадкових процесів, статистичної радіотехніки [3, 4, 5]). Так, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [5, с. 177–179]. Такі рівняння можуть бути як невиродженими, так і виродженими.

Для деяких невироджених рівнянь указаного типу ФРЗК знайдено в явному вигляді, досліджено й застосовано до встановлення коректної рзв'язності задачі Коші в [6]. Для вироджених рівнянь, а саме рівнянь типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з однією групою змінних виродження і зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів у [7] також побудовано в явному вигляді ФРЗК та вивчено його властивості. У цій статті аналогічні результати одержано для такого самого типу рівнянь тільки з двома групами змінних виродження. Наявність додаткової групи змінних значно ускладнює відповідні міркування. Застосуванню наведених тут результатів будуть присвячені наступні публікації.

2. Основні позначення та означення

Будемо використовувати позначення: n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$;

$$\zeta'_j := \begin{cases} 1, \ j \in \{1, ..., n_3\}, \\ 0, \ j \in \{n_3+1, ..., n_1\}; \end{cases} \quad \zeta''_j := \begin{cases} 1, \ j \in \{n_3+1, ..., n_2\}, \\ 0, \ j \in \{1, ..., n_3, n_2+1, ..., n_1\}; \end{cases}$$

$$\zeta'''_j := \begin{cases} 1, \ j \in \{n_2+1, ..., n_1\}, \\ 0, \ j \in \{1, ..., n_2\}; \end{cases}$$

змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x'_1, x''_1, x'''_1)$,

$\hat{x}_1 := (x'_1, x''_1)$, де $x'_1 := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x''_1 := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x'_2, x''_2)$, де $x'_2 := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x''_2 := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$; (y, z) – скалярний добуток у дійсному евклідовому просторі, до якого належать елементи y і z; $|y| := \sqrt{(y, y)}$; i – уявна одиниця.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) := \Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \\ -b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) = 0, \quad t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

і спряжене до нього рівняння

$$(L^*v)(\tau,\xi) := -\partial_\tau v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} v(\tau,\xi) - \\ - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}} v(\tau,\xi) + b\sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\Big(\xi_{1j} v(\tau,\xi)\Big) = 0, \\ \tau < 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2. \tag{3}$$

Позначатимемо через $A_{n_l n_k}$ матрицю $(a_{js})_{j,s=1}^{n_l,n_k}$, $\{l,k\} \subset \{1,2,3\}$. Умову (3) можна переписати у вигляді

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \ (A_{n_1 n_1}\sigma_1, \sigma_1) \geq |\sigma_1|^2. \tag{4}$$

З цієї умови, очевидно, випливають також умови

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_l \in \mathbb{R}^{n_l} : \ (A_{n_l n_l}\sigma_l, \sigma_l) \geq |\sigma_l|^2, \quad l \in \{2,3\}. \tag{5}$$

Умови (4) і (5) гарантують існування обернених матриць $A^{-1}_{n_l n_l} := (a_l^{js})_{j,s=1}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, та сталої $\delta_0 > 0$ такої, що

$$\forall\, \sigma_l \in \mathbb{R}^{n_l} : \ (A^{-1}_{n_l n_l}\sigma_l, \sigma_l) \geq \delta_0|\sigma_l|^2, \quad l \in \{1,2,3\}. \tag{6}$$

Означення. *ФРЗК для рівняння* (1) *називається функція* $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

визначає розв'язок рівняння (1) *при* $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \ge 0$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

Іншими словами, ФРЗК для рівняння (1) – це розв'язок задачі Коші

$$LG(t,x;\tau,\xi) = 0, \qquad G(t,x;\tau,\xi)\Big|_{t=\tau} = \delta_\xi(x),$$

де число $\tau \ge 0$ довільне, ξ – будь-яка точка в $\mathbb{R}^n$, а δ_ξ – дельта-функція Дірака, яка зосереджена в точці ξ.

Поряд з рівнянням (1) розглядатимемо рівняння

$$\tilde{L}w := \partial_t w - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} w - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} w - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} w - \\ -b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\Big(x_{1j}w\Big) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

За допомогою заміни $w = e^{n_1 bt}u$ рівняння (7) зводиться до рівняння (1). Між ФРЗК G і $\tilde{G}$ відповідно для рівнянь (1) і (7), очевидно, існує такий зв'язок:

$$G(t,x;\tau,\xi) = e^{-n_1 b(t-\tau)}\tilde{G}(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Оскільки коефіцієнти рівнянь (1) і (7) не залежать від часової змінної t, то ФРЗК для цих рівнянь залежатимуть лише від різниці $t-\tau$, тобто

$$G(t,x;\tau,\xi) = G_0(t-\tau,x,\xi), \qquad \tilde{G}(t,x;\tau,\xi) = \tilde{G}_0(t-\tau,x,\xi), \\ 0 \le \tau < t, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

причому згідно з (8)

$$G_0(t,x,\xi) = e^{-n_1 bt}\tilde{G}_0(t,x,\xi), \quad t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Отже, для знаходження ФРЗК G досить знайти функцію $\tilde{G}_0$.

Далі будемо використовувати пряме та обернене перетворення Фур'є у такому вигляді:

$$F_{x\to\sigma}[f] := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(\sigma,x)\} f(x)\, dx, \quad \sigma\in\mathbb{R}^n,$$

$$F^{-1}_{\sigma\to x}[f] := (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\} f(\sigma)\, d\sigma, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Інші позначення будуть наводитися в подальшому тексті.

3. Знаходження функцій $\tilde{G}_0$ і G_0

Розглянемо задачу Коші

$$(\tilde{L}w)(t,x) = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{11}$$

$$w(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{12}$$

де φ вважатимемо такою функцією, що всі подальші міркування є законними, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma) := F_{x\to\sigma}[\varphi], \quad \sigma\in\mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Шукаючи розв'язок задачі (11), (12) у вигляді

$$w(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)], \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{14}$$

і використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції v задачу Коші

$$\Big(\partial_t + \sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}} + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} + \\ + b\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}\partial_{\sigma_{1j}}\Big) v(t,\sigma) = 0, \quad t>0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{15}$$

$$v(t,\sigma)|_{t=0} = \psi(\sigma), \quad \sigma\in\mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Рівняння (15) – це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик. Згідно з цим методом складаємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{21} + b\sigma_{11}} = ... = \frac{d\sigma_{1n_2}}{\sigma_{2n_2} + b\sigma_{1n_2}} = \frac{d\sigma_{21}}{\sigma_{31}} = ... = \frac{d\sigma_{2n_3}}{\sigma_{3n_3}} =$$
$$= \frac{d\sigma_{1(n_2+1)}}{b\sigma_{1(n_2+1)}} = ... = \frac{d\sigma_{1n_1}}{b\sigma_{1n_1}} = -\frac{dv}{\sum\limits_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s}v}$$

і знаходимо її $n_1 + n_3 + 1$ незалежних інтегралів. Такими інтегралами є

$$\sigma_{1j}e^{-bt} - \int\limits_0^t e^{-b\tau}\sigma_{2j}(\tau)\,d\tau = C_j, \quad j \in \{1, \dots, n_2\};$$
$$\sigma_{1j}e^{-bt} = C_j, \quad j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\};$$
$$\sigma_{2j} - t\sigma_{3j} = C'_j, \quad j \in \{1, \dots, n_3\};$$
$$v \exp\left\{ \int\limits_0^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\tau)\sigma_{1s}(\tau))\,d\tau \right\} = C'', \tag{17}$$

де C_j, C'_j, C''_j – довільні сталі. З рівностей (17) знаходимо

$$\sigma_{1j} = \left[C_j e^{bt} + C'_j\alpha_b(t) + \frac{1}{b}(\alpha_b(t) - t)\sigma_{3j} \right] \varsigma'_j$$
$$+ \left[C_j e^{bt} + \alpha_b(t)\sigma_{2j} \right] \varsigma''_j + C_j e^{b(t)}\varsigma'''_j, \quad j \in \{1, ..., n_1\},$$
$$\sigma_{2j} = \left[C'_j + t\sigma_{3j} \right] \varsigma'_j + \sigma_{2j}\varsigma''_j, \quad j \in \{1, ..., n_2\},$$
$$v = C'' \exp\left\{ -\int\limits_0^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\tau)\sigma_{1s}(\tau))\,d\tau \right\}, \tag{18}$$

де $\alpha_b(t) := \begin{cases} (e^{bt} - 1)/b, & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases} \quad t > 0.$

Нехай $\bar{\sigma}_{1j}$, $\bar{\sigma}_{2j}$ і $\bar{v}$ – значення при $t = 0$ відповідно σ_{1j}, σ_{2j} і v. Тоді $\bar{\sigma}_{1j} = C_j$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\bar{\sigma}_{2j} = C'_j$, $j \in \{1, ..., n_3\}$; $\bar{\sigma}_{2j} = \sigma_{2j}$, $j \in \{n_3+1, ..., n_2\}$; $\bar{v} = C''$. Але оскільки $\bar{v} = \psi(\bar{\sigma}_1, (\bar{\sigma}'_2, \sigma''_2), \sigma_3)$, $\bar{\sigma}_1 := (\bar{\sigma}_{11}, \ldots, \bar{\sigma}_{1n_1})$, $\bar{\sigma}'_2 := (\bar{\sigma}_{21}, \ldots, \bar{\sigma}_{2n_3})$, $\sigma''_2 := (\sigma_{2(n_3+1)}, \ldots, \sigma_{2n_2})$, то маємо

$$C'' = \psi\left(\bar{C}, (\bar{C}', \sigma''_2), \sigma_3\right), \quad \bar{C} := (C_1, \ldots, C_{n_1}), \quad \bar{C}' := (C'_1, \ldots, C'_{n_3}).$$

Враховуючи це, з рівностей (17) і (18) отримуємо

$$v(t,\sigma) = \exp\Big\{ -\int_0^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\tau)\sigma_{1s}(\tau)\, d\tau \Big\}\, \psi\left(\bar{C}, (\bar{C}', \sigma''_2), \sigma_3\right) =$$

$$= \exp\Big\{ -\int_0^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \Big[\Big(\sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2j}\beta_b(t-\tau) + \sigma_{3j}\gamma_b(t-\tau) \Big)\varsigma'_j +$$
$$+ \Big(\sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2j}\beta_b(t-\tau) \Big)\varsigma''_j + \sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)}\varsigma'''_j \Big] \times$$
$$\times \Big[\Big(\sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2s}\beta_b(t-\tau) + \sigma_{3s}\gamma_b(t-\tau) \Big)\varsigma'_s +$$
$$+ \Big(\sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2s}\beta_b(t-\tau) \Big)\varsigma''_s + \sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)}\varsigma'''_s \Big]\, d\tau \Big\} \times$$
$$\times\psi\,\Big((\sigma'_1 e^{-bt} - \sigma'_2\beta_b(t) + \sigma_3\gamma_b(t),\ \sigma''_1 e^{-bt} - \sigma''_2\beta_b(t),\ \sigma'''_1 e^{-bt}),$$
$$(\sigma'_2 - t\sigma_3,\ \sigma''_2),\ \sigma_3 \Big), \quad t > 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

де $\beta_b(t) := e^{-bt}\alpha_b(t)$, $\quad \gamma_b(t) := \begin{cases} (t-\beta_b(t))/b & b \neq 0, \\ t^2/2, & b = 0, \end{cases} \quad t > 0.$

Тоді на підставі (14) маємо

$$w(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{ i(x,\sigma) - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \int_0^t \Big[\Big(\sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)} -$$
$$-\sigma'_{2j}\beta_b(t-\tau) + \sigma_{3j}\gamma_b(t-\tau) \Big)\varsigma'_j + \Big(\sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2j}\beta_b(t-\tau) \Big)\varsigma''_j +$$
$$+\sigma_{1j}e^{-b(t-\tau)}\varsigma'''_j \Big]\Big[\Big(\sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2s}\beta_b(t-\tau) + \sigma_{3s}\gamma_b(t-\tau) \Big)\varsigma'_s +$$
$$+ \Big(\sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)} - \sigma'_{2s}\beta_b(t-\tau) \Big)\varsigma''_s + \sigma_{1s}e^{-b(t-\tau)}\varsigma'''_s \Big]\, d\tau \Big\} \times$$
$$\times\psi\,\Big((\sigma'_1 e^{-bt} - \sigma'_2\beta_b(t) + \sigma_3\gamma_b(t),\ \sigma''_1 e^{-bt} - \sigma''_2\beta_b(t),\ \sigma'''_1 e^{-bt}),$$
$$(\sigma'_2 - t\sigma_3,\ \sigma''_2),\ \sigma_3 \Big)\, d\sigma, \quad t > 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Зробивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\sigma_1 e^{-bt} - \sigma_2'\beta_b(t) + \sigma_3\gamma_b(t) = \eta_1',$$
$$\sigma_1'' e^{-bt} - \sigma_2''\beta_b(t) = \eta_1'', \qquad \sigma_1''' e^{-bt} = \eta_1''',$$
$$\sigma_2' - t\sigma_3 = \eta_2', \qquad \sigma_2'' = \eta_2'', \qquad \sigma_3 = \eta_3,$$

змінивши порядок інтегрування та скориставшись (13), прийдемо до формули

$$w(t,x) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \tilde{G}_0(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad t>0, \;\; x\in\mathbb{R}^n,$$

де

$$\tilde{G}_0(t,x,\xi) := (2\pi)^{-n} e^{n_1 bt} \int\limits_{\mathrm{R}^n} \exp\Big\{ i\left(x_1', \, \eta_1' e^{bt} + \eta_2'\alpha_b(t) - \eta_3\frac{t-\alpha_b(t)}{b} \right) +$$
$$+ i\left(x_1'', \, \eta_1'' e^{bt} + \eta_2''\alpha_b(t) \right) + i\left(x_1''', \, \eta_1''' e^{bt} \right) + i\left(x_2', \, \eta_2' + t\eta_3 \right) +$$
$$+ i\left(x_2'', \eta_2'' \right) + i\left(x_3, \eta_3 \right) - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \int\limits_0^t \Big[\Big(\eta_{1j} e^{b\tau} + \eta_{2j}\alpha_b(\tau) -$$
$$- \eta_{3j}\frac{\alpha_b(\tau)-\tau}{b} \Big)\varsigma_j' + \left(\eta_{1j} e^{b\tau} + \eta_{2j}\alpha_b(\tau) \right)\varsigma_j'' + \left(\eta_{1j} e^{b\tau} \right)\varsigma_j''' \Big] \times$$
$$\times \Big[\Big(\eta_{1s} e^{b\tau} + \eta_{2s}\alpha_b(\tau) - \eta_{3s}\frac{\alpha_b(\tau)-\tau}{b} \Big)\varsigma_s' + \left(\eta_{1s} e^{b\tau} + \eta_{2s}\alpha_b(\tau) \right)\varsigma_s'' +$$
$$+ \left(\eta_{1s} e^{b\tau} \right)\varsigma_s''' \Big] d\tau \Big\} \exp\{-i(\xi,\eta)\}\,d\eta. \tag{19}$$

У внутрішньому інтегралі з виразу (19), який позначимо через $I_0(t,\eta)$, зробимо заміну змінної інтегрування τ за допомогою рівності $\tau = t\tilde{s}$. Одержимо

$$I_0(t,\eta) = t\int\limits_0^1 \Big[\Big(\eta_{1j} e^{bt\tilde{s}} + \eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s}) + \eta_{3j}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\times$$
$$\times\Big(\eta_{1s} e^{bt\tilde{s}} + \eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s}) + \eta_{3s}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\zeta_j'\zeta_s' +$$
$$+\Big(\eta_{1j} e^{bt\tilde{s}} + \eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s}) + \eta_{3j}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\Big(\eta_{1s} e^{bt\tilde{s}} + \eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\zeta_j'\zeta_s'' +$$

$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s})+\eta_{3j}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}\Big)\zeta_j'\zeta_s'''+$$
$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s})+\eta_{3s}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\zeta_j''\zeta_s'+$$
$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\zeta_j''\zeta_s''+$$
$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2j}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}\Big)\zeta_j''\zeta_s'''+$$
$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s})+\eta_{3s}\frac{\alpha_b(t\tilde{s})-t\tilde{s}}{b}\Big)\zeta_j'''\zeta_s'+$$
$$+\Big(\eta_{1j}e^{bt\tilde{s}}\Big)\Big(\eta_{1s}e^{bt\tilde{s}}+\eta_{2s}\alpha_b(t\tilde{s})\Big)\zeta_j'''\zeta_s''+\eta_{1j}\eta_{1s}e^{2bt\tilde{s}}\,\zeta_j'''\zeta_s'''\Bigg]\,d\tilde{s},$$

а тому

$$\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}I_0(t,\eta)=$$
$$=c_1\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{1j}\eta_{1s}+c_2\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{1j}\eta_{2s}++c_4\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{1j}\eta_{3s}+$$
$$+c_2\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{2j}\eta_{1s}+c_3\sum_{j,s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{2j}\eta_{2s}+c_5\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{2j}\eta_{3s}+$$
$$+c_4\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{3j}\eta_{1s}+c_5\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{3j}\eta_{2s}+c_6\sum_{j,s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{3j}\eta_{3s},$$

де

$$c_1:=c_1(t):=t\int_0^1 e^{2bt\tilde{s}}d\tilde{s}=\alpha_{2b}(t),$$
$$c_2:=c_2(t):=t\int_0^1 \alpha_b(t\tilde{s})e^{bt\tilde{s}}\,d\tilde{s}=\frac{1}{2}\,\alpha_b^2(t),$$
$$c_3:=c_3(t):=t\int_0^1 \alpha_b^2(t\tilde{s})\,d\tilde{s}=\frac{1}{2b^3}\Big(2bt+e^{2bt}-4e^{bt}+3\Big),$$

$$c_4 := c_4(t) := \frac{t}{b}\int_0^1 e^{bt\tilde{s}}\Big(\alpha_b(t\tilde{s}) - t\tilde{s}\Big)\,d\tilde{s} = \frac{1}{2b^3}\Big(e^{2bt} - 2bte^{bt} - 1\Big),$$

$$c_5 := c_5(t) := \frac{t}{b}\int_0^1 \alpha_b(t\tilde{s})\Big(\alpha_b(t\tilde{s}) - t\tilde{s}\Big)\,d\tilde{s} = \frac{1}{2b^2}\Big(\alpha_b(t) - t\Big)^2$$

$$c_6 := c_6(t) := \frac{t}{b^2}\int_0^1 \Big(\alpha_b(t\tilde{s}) - t\tilde{s}\Big)^2\,d\tilde{s} =$$

$$= \frac{1}{2b^5}\left(2bt + e^{2bt} - 1 - 4bte^{bt} + 2b^2t^2 + \frac{2}{3}b^3t^3\right), \tag{20}$$

Підставивши отриманий результат для $\sum\limits_{j,s=1}^{n_1} a_{js} I_0(t,\eta)$ у формулу (19), матимемо

$$\tilde{G}_0(t,x,\xi) = (2\pi)^{-n} e^{n_1 bt}\int_{\mathrm{R}^n} \exp\Big\{ i\ \Big(\ e^{bt}x_1 - \xi_1, \eta_1\ \Big) +$$

$$+ i\ \Big(\ x_2 + \hat{x}_1\alpha_b(t) - \xi_2,\ \eta_2\ \Big) + i\ \Big(\ x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b}x_1' - \xi_3,\ \eta_3\ \Big) -$$

$$-\Big(\ c_1 \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\eta_{1j}\eta_{1s} + c_2\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} a_{js}\eta_{1j}\eta_{2s} + c_4\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_3} a_{js}\eta_{1j}\eta_{3s} +$$

$$+ c_2\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_1} a_{js}\eta_{2j}\eta_{1s} + c_3\sum_{j,s=1}^{n_2} a_{js}\eta_{2j}\eta_{2s} + c_5\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_3} a_{js}\eta_{2j}\eta_{3s} +$$

$$+ c_4\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_1} a_{js}\eta_{3j}\eta_{1s} + c_5\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_2} a_{js}\eta_{3j}\eta_{2s} + c_6\sum_{j,s=1}^{n_3} a_{js}\eta_{3j}\eta_{3s}\ \Big)\Big\}\,d\eta.$$

В останньому інтегралі зробивши заміну змінних інтегрування за допомогою формул $\eta_1 = (c_1)^{-1/2}\tilde{\eta}_1$, $\eta_2 = (c_3)^{-1/2}\tilde{\eta}_2$, $\eta_3 = (c_6)^{-1/2}\tilde{\eta}_3$ та замість $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$ і $\tilde{\eta}_3$ знову записавши відповідно η_1, η_2 і η_3, отримаємо рівність

$$\tilde{G}_0(t,x,\xi) = (2\pi)^{-n} e^{n_1 bt} c_1^{-n_1/2} c_3^{-n_2/2} c_6^{-n_3/2}\, I(t,x,\xi). \tag{21}$$

Тут

$$
\begin{aligned}
I(t,x,\xi) := \int\limits_{\mathrm{R}^n} \exp\Big\{ & i\,\Big(\,(c_1)^{-1/2}(e^{bt}x_1-\xi_1),\eta_1\,\Big)+\\
& +i\,\Big(\,(c_3)^{-1/2}(x_2+\hat{x}_1\alpha_b(t)-\xi_2),\;\eta_2\,\Big)+\\
& +i\,\Big(\,(c_6)^{-1/2}(x_3+tx_2'+\frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1'-\xi_3),\;\eta_3\,\Big)-\\
& -\Big[\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{1j}\eta_{1s}+\sum_{j,s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{2j}\eta_{2s}+\sum_{j,s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{3j}\eta_{3s}+\\
& +d_0\,\Big(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{1j}\eta_{2s}+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{2j}\eta_{1s}\Big)+\\
& +f_0\,\Big(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{1j}\eta_{3s}+\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_1}a_{js}\eta_{3j}\eta_{1s}\Big)+\\
& +g_0\,\Big(\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{s=1}^{n_3}a_{js}\eta_{2j}\eta_{3s}+\sum_{j=1}^{n_3}\sum_{s=1}^{n_2}a_{js}\eta_{3j}\eta_{2s}\Big)\Big]\Big\}\,d\eta, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

де

$$
d_0 := (c_1\,c_3)^{-1/2}c_2, \quad f_0 := (c_1\,c_6)^{-1/2}c_4, \quad g_0 := (c_3\,c_6)^{-1/2}c_5. \qquad (23)
$$

Перепишемо вираз [...] з (22) у вигляді

$$
\begin{aligned}
[...] =&(A_{n_1n_1}\eta_1,\eta_1)+(d_0A_{n_1n_2}\eta_1,\eta_2)+(f_0A_{n_1n_3}\eta_1,\eta_3)+\\
&+(d_0A_{n_2n_1}\eta_2,\eta_1)+(A_{n_2n_2}\eta_2,\eta_2)+(g_0A_{n_2n_3}\eta_2,\eta_3)+\\
&+(f_0A_{n_3n_1}\eta_3,\eta_1)+(A_{n_3n_3}\eta_3,\eta_3)=(\tilde{A}\eta,\eta), \qquad (24)
\end{aligned}
$$

де

$$
\tilde{A} := \begin{pmatrix} A_{n_1n_1} & d_0A_{n_1n_2} & f_0A_{n_1n_3}\\ d_0A_{n_2n_1} & A_{n_2n_2} & g_0A_{n_2n_3}\\ f_0A_{n_1n_1} & g_0A_{n_1n_2} & A_{n_1n_3} \end{pmatrix}, \quad \eta := \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix},
$$

Із (22) і (24) випливає рівність

$$
I(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \exp\Big\{\; i(Z(t,x,\xi),\eta)-(\tilde{A}\eta,\eta)\;\Big\}\;d\eta, \qquad (25)
$$

в якій

$$Z(t,x,\xi) := (Z_1, Z_2, Z_3) = \Big((c_1)^{-1/2}(x_1 e^{bt} - \xi_1),$$

$$(c_3)^{-1/2}(x_2 + \hat{x}_1\alpha_b(t) - \xi_2),\ (c_6)^{-1/2}(x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b} x_1' - \xi_3) \Big). \tag{26}$$

Для інтеграла (25) використаємо формулу (38) з книги [8, с. 172] для перетворення Фур'є функції $\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}$, $\eta \in \mathrm{R}^n$. Тоді одержимо

$$I(t,x,\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \tilde{A}}} \exp\Big\{ -\frac{1}{4}(Z(t,x,\xi),\ \tilde{A}^{-1} Z(t,x,\xi) \Big\}. \tag{27}$$

Знайдемо обернену матрицю до $\tilde{A}$. Для цього для матриці $\tilde{A}$ скористаємось такими результатами з книги [9, с. 55–57] для блочних квадратних матриць вигляду $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, де A, D – квадратні матриці:

$$\det M = \det A \cdot \det H, \tag{28}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

де $H := D - CA^{-1}B$.

Записавши

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{n_1 n_1} & \begin{pmatrix} d_0 A_{n_1 n_2} & f_0 A_{n_1 n_3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 A_{n_2 n_1} \\ f_0 A_{n_1 n_1} \end{pmatrix} & M_1 \end{pmatrix},$$

де

$$M_1 := \begin{pmatrix} A_{n_1 n_2} & g_0 A_{n_2 n_3} \\ g_0 A_{n_1 n_2} & A_{n_1 n_3} \end{pmatrix},$$

та застосувавши двічі формули (28) і (29), для блоків матриці $\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A}^{lm})_{l,m=1}^{3}$ отримаємо

$$\tilde{A}^{11} = A_{n_1 n_1}^{-1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} d_0^2 A_{n_2 n_2}^{-1} + \dfrac{p^2}{mk} \begin{pmatrix} A_{n_3 n_3}^{-1} & O_{n_3, n_2 - n_3} \\ O_{n_2 - n_3, n_3} & O_{n_2 - n_3, n_2 - n_3} \end{pmatrix} & O_{n_2, n_1 - n_2} \\ O_{n_1 - n_2, n_2} & O_{n_1 - n_2, n_1 - n_2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{12} = \begin{pmatrix} -\dfrac{d_0}{1-d_0^2} A^{-1}_{n_2 n_2} + \dfrac{p}{mk} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} & O_{n_3, n_2-n_3} \\ O_{n_2-n_3, n_3} & O_{n_2-n_3, n_2-n_3} \end{pmatrix} \\ O_{n_1-n_2, n_2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{13} = \begin{pmatrix} -\dfrac{p}{m} A^{-1}_{n_3 n_3} \\ O_{n_1-n_3, n_3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{21} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{d_0}{1-d_0^2} A^{-1}_{n_2 n_2} + \dfrac{p}{mk} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} & O_{n_3, n_2-n_3} \\ O_{n_2-n_3, n_3} & O_{n_2-n_3, n_2-n_3} \end{pmatrix} & O_{n_2, n_1-n_2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{22} = \frac{d_0}{1-d_0^2} A^{-1}_{n_2 n_2} + \frac{1}{mk} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} & O_{n_3, n_2-n_3} \\ O_{n_2-n_3, n_3} & O_{n_2-n_3, n_2-n_3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{23} = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} \\ O_{n_2-n_3, n_3} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}^{31} = -\frac{p}{m} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} & O_{n_3, n_1-n_3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{32} = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} A^{-1}_{n_3 n_3} & O_{n_3, n_2-n_3} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}^{33} = \frac{k}{m} A^{-1}_{n_3 n_3}, \tag{30}$$

де

$$l := g_0 - d_0 f_0, \quad k := \frac{1-d_0^2}{g_0 - d_0 f_0}, \quad m := (1-f_0^2)k - l, \quad p := d_0 - k f_0, \tag{31}$$

$O_{r,s}$ – нульова матриця розміру $r \times s$, і

$$\det \tilde{A} = (1-d_0)^2 \left(1 - f_0^2 - \frac{l}{k} \right) \det A_{n_1 n_1} \det A_{n_2 n_2} \det A_{n_3 n_3}. \tag{32}$$

Використовуючи вирази (30) для елементів матриці $\tilde{A}^{-1}$, запишемо

$$\begin{aligned} (Z, \tilde{A}^{-1} Z) &= (A^{-1}_{n_1 n_1} Z_1, Z_1) + d_0^2 (A^{-1}_{n_2 n_2} \hat{Z}_1, \hat{Z}_1) + \frac{p^2}{mk} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_1', Z_1') - \\ &- \frac{d_0}{1-d_0^2} (A^{-1}_{n_2 n_2} Z_2, \hat{Z}_1) - \frac{p}{mk} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_2', Z_1') + \frac{p}{m} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_3, Z_1') - \\ &- \frac{d_0}{1-d_0^2} (A^{-1}_{n_2 n_2} \hat{Z}_1, Z_2) - \frac{p}{mk} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_1', Z_2') + \frac{1}{1-d_0^2} (A^{-1}_{n_2 n_2} Z_2, Z_2) + \\ &+ \frac{1}{mk} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_2', Z_2') - \frac{1}{m} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_3, Z_2') + \frac{p}{m} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_1', Z_3) - \\ &- \frac{1}{m} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_2', Z_3) + \frac{k}{m} (A^{-1}_{n_3 n_3} Z_3, Z_3). \end{aligned} \tag{33}$$

Скориставшись позначеннями

$$e_0 := \frac{e^{bt}+1}{\alpha_b(t)}, \quad P := \frac{e^{bt}x_1 - \xi_1}{e_0}, \quad Q := x_2 + \frac{\hat{x_1} + \hat{\xi_1}}{e_0} - \xi_2,$$
$$R := x_3 + \frac{t}{2}(x_2' + \xi_2') + \frac{1}{b^2}(\frac{t}{2}e_0 - 1)(x_1' - \xi_1') - \xi_3, \tag{34}$$

з яких випливають рівності

$$e^{bt}x_1 - \xi_1 = e_0 P, \qquad \hat{P} + Q = x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1 - \xi_2,$$
$$R + \frac{t}{2}Q' + \left(\frac{e_0}{b^2} - \frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\right)P' = x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b}x_1' - \xi_3,$$

та виразами для компонент Z з (26), отримаємо

$$\begin{aligned}
(A^{-1}_{n_2n_2}\hat{Z}_1, \hat{Z}_1) =& \frac{e_0^2}{c_1}(A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P}, \hat{P}),\\
(A^{-1}_{n_3n_3}Z_1', Z_1') =& \frac{e_0^2}{c_1}(A^{-1}_{n_3n_3}P', P'),\\
(A^{-1}_{n_2n_2}Z_2, \hat{Z}_1) =& \frac{e_0}{(c_1c_3)^{1/2}}\Big[(A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P}, \hat{P}) + (A^{-1}_{n_2n_2}Q, \hat{P})\Big],\\
(A^{-1}_{n_3n_3}Z_3, Z_1') =& \frac{e_0}{(c_1c_6)^{1/2}}\Big[(A^{-1}_{n_3n_3}R, P) + \frac{t}{2}(A^{-1}_{n_3n_3}Q', P') +\\
&+ \Big(\frac{e_0}{b^2} - \frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)(A^{-1}_{n_3n_3}P', P')\Big],\\
(A^{-1}_{n_2n_2}Z_2, Z_2) =& \frac{1}{c_3}\Big[(A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P}, \hat{P}) + (A^{-1}_{n_2n_2}Q, \hat{P}) + (A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P}, Q) +\\
&+ (A^{-1}_{n_2n_2}Q, Q)\Big],\\
(A^{-1}_{n_3n_3}Z_3, Z_2') =& \frac{1}{(c_3c_6)^{1/2}}\Big[(A^{-1}_{n_3n_3}R, P') + (A^{-1}_{n_3n_3}R, Q')] +\\
&+ \frac{t}{2}\Big((A^{-1}_{n_3n_3}Q', P') + (A^{-1}_{n_3n_3}Q', Q')\Big)\\
&+ \Big(\frac{e_0}{b^2} - \frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)\Big((A^{-1}_{n_3n_3}P', P') + (A^{-1}_{n_3n_3}P', Q')\Big)\Big],\\
(A^{-1}_{n_3n_3}Z_3, Z_3) =& \frac{1}{c_6}\Big[(A^{-1}_{n_3n_3}R, R) + \frac{t}{2}\Big((A^{-1}_{n_3n_3}R, Q') + (A^{-1}_{n_3n_3}Q', R)\Big) +\\
&+ \Big(\frac{e_0}{b^2} - \frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)\Big((A^{-1}_{n_3n_3}R, P') + (A^{-1}_{n_3n_3}P', R)\Big) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{t}{2}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)\Big((A^{-1}_{n_3n_3}Q',P')+(A^{-1}_{n_3n_3}P',Q')\Big)+$$
$$+\frac{t^2}{4}(A^{-1}_{n_3n_3}Q',Q')+\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)^2(A^{-1}_{n_3n_3}P',P')\Big].$$

Використовуючи ці вирази, запишемо (27) у вигляді

$$(Z,\tilde{A}^{-1}Z)=$$
$$=\frac{e_0^2}{c_1}(A^{-1}_{n_1n_1}P,P)+(A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P},\hat{P})\Big[\frac{d_0^2e_0^2}{c_1}-\frac{2d_0e_0}{\sqrt{c_1c_3}}+\frac{1}{(1-d_0^2)c_3}\Big]+$$
$$+(A^{-1}_{n_3n_3}P',P')\frac{1}{m}\Big[\frac{(e_0p)^2}{kc_1}+\frac{2e_0p}{\sqrt{c_1c_6}}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)-\frac{2e_0p}{k\sqrt{c_1c_3}}+$$
$$+\frac{1}{c_3k}-\frac{2}{\sqrt{c_3c_6}}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)+\frac{k}{c_6}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)^2\Big]+$$
$$+\Big((A^{-1}_{n_2n_2}\hat{P},Q)+(A^{-1}_{n_2n_2}Q,\hat{P})\Big)\frac{1}{1-d_0^2}\Big[\frac{1}{c_3}-\frac{d_0e_0}{\sqrt{c_1c_3}}\Big]+$$
$$+\Big((A^{-1}_{n_3n_3}P',Q')+(A^{-1}_{n_3n_3}Q',P')\Big)\frac{1}{m}\Big[\frac{te_0p}{2\sqrt{c_1c_6}}-\frac{e_0p}{k\sqrt{c_1c_3}}+$$
$$+\frac{1}{kc_3}-\frac{1}{\sqrt{c_3c_6}}\Big(\frac{t}{2}+\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)+\frac{kt}{2c_6}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)\Big]+$$
$$+\Big((A^{-1}_{n_3n_3}R,P')+(A^{-1}_{n_3n_3}P',R)\Big)\frac{1}{m}\Big[\frac{e_0p}{\sqrt{c_1c_6}}-\frac{1}{\sqrt{c_3c_6}}+$$
$$+\frac{k}{c_6}\Big(\frac{e_0}{b^2}-\frac{2te^{bt}}{(e^{bt}-1)^2}\Big)\Big]+(A^{-1}_{n_2n_2}Q,Q)\frac{1}{c_3(1-d_0^2)}+$$
$$+(A^{-1}_{n_3n_3}Q',Q')\frac{1}{m}\Big[\frac{1}{kc_3}-\frac{t}{\sqrt{c_3c_6}}+\frac{kt^2}{4c_6}\Big]+$$
$$+\Big((A^{-1}_{n_3n_3}Q',R)+(A^{-1}_{n_3n_3}R,Q')\Big)\frac{1}{m}\Big[\frac{kt}{2c_6}-\frac{1}{\sqrt{c_3c_6}}\Big]+$$
$$+(A^{-1}_{n_3n_3}R,R)\frac{k}{c_6m}. \qquad (35)$$

За допомогою формул (20) для c_j, $j\in\{1,...,6\}$, (23) для d_0, f_0 і g_0, (31) для m, k, l і p та (34) для e_0, переконуємось, що вирази із квадратних дужок в (35) дорівнюють нулеві. Тому з (27), з урахуванням

(32), одержуємо

$$I(t,x;\tau,\xi) = \frac{\pi^{n/2}(1-d_0^2)^{-n_2/2}\Big(1-f_0^2-\dfrac{l}{k}\Big)^{-n_3/2}}{\sqrt{\det A_{n_1n_1}\cdot\det A_{n_2n_2}\det A_{n_3n_3}}}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{e_0^2}{4c_1}(A^{-1}_{n_1n_1}P,P)-\frac{1}{4c_3(1-d_0^2)}(A^{-1}_{n_2n_2}Q,Q)-$$
$$-\frac{k}{4c_6m}(A^{-1}_{n_3n_3}R,R)\Big\}. \qquad (36)$$

Скориставшись виразами (20), (23), (31), (34) і (36), згідно з (21) остаточно отримуємо

$$\tilde G_0(t,x,\xi) = (4\pi)^{-n/2}(\det A_{n_1n_1}\det A_{n_2n_2}\det A_{n_3n_3})^{-1/2}\times$$
$$\times(p(t))^{-n_1/2}(q(t))^{-n_2/2}(r(t))^{-n_3/2}e^{n_1bt}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4p(t)}\sum_{j,l=1}^{n_1}a_1^{jl}\left(e^{bt}x_{1j}-\xi_{1j}\right)\left(e^{bt}x_{1l}-\xi_{1l}\right)-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n_2}a_2^{jl}\times$$
$$\times\Big(\,x_{2j}-\xi_{2j}+f(t)(x_{1j}+\xi_{1j})\,\Big)\Big(\,x_{2l}-\xi_{2l}+f(t)(x_{1l}+\xi_{1l})\,\Big)-$$
$$-\frac{1}{4r(t)}\sum_{j,l=1}^{n_3}a_3^{jl}\,\Big(\,x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+g(t)(x_{1j}-\xi_{1j})\,\Big)\times$$
$$\times\Big(\,x_{3l}-\xi_{3l}+\frac{t}{2}(x_{2l}+\xi_{2l})+g(t)(x_{1l}-\xi_{1l})\,\Big)\Big\},$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n, \qquad (37)$$

де

$$p(t) := \frac{e^{2bt}-1}{2b},\quad q(t) := \frac{t}{b^2}-\frac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)},$$
$$r(t) := \frac{t}{b^4}+\frac{t^3}{12b^2}-\frac{t^2}{b^3}\frac{e^{bt}+1}{2(e^{bt}-1)}, \qquad (38)$$
$$f(t) := \frac{e^{bt}-1}{b(e^{bt}+1)},\quad g(t) := \frac{1}{b^2}\Big(\frac{tb(e^{bt}+1)}{2(e^{bt}-1)}-1\Big).$$

З рівностей (10) і (37) випливає така остаточна формула для функції G_0:

$$G_0(t,x,\xi) = (4\pi)^{-n/2}(\det A_{n_1n_1}\det A_{n_2n_2}\det A_{n_3n_3})^{-1/2}\times$$
$$\times(p(t))^{-n_1/2}(q(t))^{-n_2/2}(r(t))^{-n_3/2}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4p(t)}\sum_{j,l=1}^{n_1}a_1^{jl}(e^{bt}x_{1j}-\xi_{1j})(e^{bt}x_{1l}-\xi_{1l})-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n_2}a_2^{jl}\times$$
$$\times\Big(x_{2j}-\xi_{2j}+f(t)(x_{1j}+\xi_{1j})\Big)\Big(x_{2l}-\xi_{2l}+f(t)(x_{1l}+\xi_{1l})\Big)-$$
$$-\frac{1}{4r(t)}\sum_{j,l=1}^{n_3}a_3^{jl}\Big(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+g(t)(x_{1j}-\xi_{1j})\Big)\times$$
$$\times\Big(x_{3l}-\xi_{3l}+\frac{t}{2}(x_{2l}+\xi_{2l})+g(t)(x_{1l}-\xi_{1l})\Big)\Big\},$$
$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{39}$$

4. Властивості ФРЗК для рівняння (1)

Наведемо властивості функції G, означеної формулами (9) і (39). З цих властивостей випливатиме, що ця функція G є справді ФРЗК для рівняння (1), який має встановлені властивості.

Спочатку зауважимо, що з умов (6) випливає, що

$$\frac{1}{4p(t)}\sum_{j,l=1}^{n_1}a_1^{jl}(e^{bt}x_{1j}-\xi_{1j})(e^{bt}x_{1l}-\xi_{1l})+\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n_2}a_2^{jl}\times$$
$$\times\Big(x_{2j}-\xi_{2j}+f(t)(x_{1j}+\xi_{1j})\Big)\Big(x_{2l}-\xi_{2l}+f(t)(x_{1l}+\xi_{1l})\Big)+$$
$$+\frac{1}{4r(t)}\sum_{j,l=1}^{n_3}a_3^{jl}\Big(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+g(t)(x_{1j}-\xi_{1j})\Big)\times$$
$$\times\Big(x_{3l}-\xi_{3l}+\frac{t}{2}(x_{2l}+\xi_{2l})+g(t)(x_{1l}-\xi_{1l})\Big)\geq\delta_0\rho(t,x,\xi), \tag{40}$$

де

$$\rho(t,x,\xi):=\frac{1}{4p(t)}|e^{bt}x_1-\xi_1|^2+\frac{1}{4q(t)}|x_2-\xi_2+f(t)(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)|^2+$$
$$+\frac{1}{4r(t)}|x_3-\xi_3+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+g(t)(x_1'-\xi_1')|^2,$$

Покладемо

$$X_1(t) := e^{bt}x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1,$$
$$X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b}x_1' \tag{41}$$

і запишемо $\rho(t, x, \xi)$ у вигляді

$$\rho(t, x, \xi) = \frac{1}{4p(t)}|X_1(t) - \xi_1|^2 + \frac{1}{4q(t)}|X_2(t) - \xi_2 + f(t)(\hat{X}_1(t) - \hat{\xi}_1)|^2 +$$
$$+ \frac{1}{4r(t)}|X_3(t) - \xi_3 - \frac{t}{2}(X_2'(t) - \xi_2') + g(t)(X_1'(t) - \xi_1')|^2.$$

Скориставшись нерівністю $|a + b|^2 \geq 2^{-1}|a|^2 - |b|^2$ з $a = X_2(t) - \xi_2$ і $b = f(t)(\hat{X}_1(t) - \hat{\xi}_1)$ та нерівністю $|a + b + c|^2 \geq 4^{-1}|a|^2 - 2^{-1}|b|^2| - |c|^2$ з $a = X_3(t) - \xi_3$ і $b = -t(X_2' - \xi_2')/2$, $c = g(t)(X_1'(t) - \xi_1')$, маємо

$$\rho(t, x, \xi) \geq \frac{1}{4p(t)}|X_1(t) - \xi_1|^2 +$$
$$+ \frac{\delta_1}{q(t)}\Big(\frac{1}{2}|X_2(t) - \xi_2|^2 - (f(t))^2|\hat{X}_1(t) - \hat{\xi}_1|^2\Big) +$$
$$+ \frac{\delta_2}{r(t)}\Big(\frac{1}{4}|X_3(t) - \xi_3|^2 - \frac{t^2}{8}|X_2'(t) - \xi_2'|^2 - (g(t))^2|X_1'(t) - \xi_1'|^2\Big) =$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta_1 p(t)(f(t))^2}{q(t)} - \frac{\delta_2 p(t)(g(t))^2}{r(t)}\right)\frac{|X_1(t) - \xi_1|^2}{p(t)} +$$
$$+ \left(\frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2 t^2 q(t)}{8r(t)}\right)\frac{|X_2(t) - \xi_2|^2}{q(t)} + \frac{\delta_2|X_3(t) - \xi_3|^2}{4r(t)}, \tag{42}$$

де $\delta_j \in (0, 1/4)$, $j \in \{1, 2\}$, буде підібрано нижче. Оцінимо зверху вирази

$$B_b(t) := \frac{p(t)\,(f(t))^2}{q(t)}, \quad \Gamma_b(t) := \frac{p(t)\,(g(t))^2}{r(t)}, \quad D_b(t) := \frac{\delta_2 t^2\, q(t)}{4r(t)},$$
$$t > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

У [7] доведено, що

$$B_b(t) = \begin{cases} \dfrac{(e^{bt} - 1)^3}{2(e^{bt}(bt - 2) + bt + 2)}, \; t > 0, \; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 3, \quad t > 0, \; b = 0. \end{cases} \leq$$

$$\leq \begin{cases} M, \ t > 0, \ \ b \leq 0, \\ M_T, \ \ t \in (0, T], \ \ b > 0, \end{cases} \tag{44}$$

де T – довільно фіксоване додатне число, M і M_T – додатні сталі, причому M_T залежить від T.

Аналогічно, використовуючи (38) і те, що за допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{b\to 0} p(t) = t, \quad \lim_{b\to 0} q(t) = \frac{t^5}{720}, \quad \lim_{b\to 0} g(t) = \frac{t^2}{12},$$

маємо

$$\Gamma_b(t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(e^{bt}+1)(e^{2bt}(b^2t^2-4bt+4)+2e^{bt}(b^2t^2-4)+b^2t^2+4bt+4)}{\frac{2}{3}b\,(e^{bt}(12t+b^2t^3-6bt^2)-12t-b^2t^3-6bt^2)}, \\ \hfill t > 0, \quad b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 5, \quad t > 0, \ \ b = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що функція $\Gamma_b(t)$, $t > 0$, є додатною і неперервною, причому за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{t\to 0} \Gamma_b(t)) = 5$, $b \in \mathbb{R}$, і

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma_b(t)) = \begin{cases} \infty, \ \text{якщо } b > 0, \\ 0, \ \text{якщо } b < 0. \end{cases}$$

Тому справджуються нерівності

$$\Gamma_b(t)) \leq \begin{cases} K, \ t > 0, \ \text{якщо } b \leq 0, \\ K_T, \ \ t \in (0, T], \ \text{якщо } b > 0, \end{cases} \tag{45}$$

де T – довільно фіксоване додатне число, M і K_T – додатні сталі, причому K_T залежить від T і $K_T > 0$.

Аналогічно розглядаємо

$$D_b(t) = \begin{cases} \dfrac{3tb\,(e^{bt}-1)(e^{bt}(bt-2)+bt+2)}{(e^{bt}+1)(e^{bt}(12+b^2t^2-6bt)-12-b^2t^2-6bt)}, \\ \hfill t > 0, \ \ b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 15, \ \ t > 0, \ \ b = 0. \end{cases}$$

Оскільки при $b \neq 0$ $\lim\limits_{t\to 0} D_b(t)) = 21$ і $\lim\limits_{t\to\infty} D_b(t)) = 3$, то

$$D_b(t) \leq 21, \quad t > 0. \tag{46}$$

З (42)–(46) випливає оцінка

$$\rho(t,x,\xi) \geq \bar{C}_b \frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{p(t)} + \bar{\bar{C}}_b \frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{q(t)} + \frac{\delta_2}{4} \frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{r(t)},$$
$$t \in H_b, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де

$$\bar{C}_b := \frac{1}{4} - M\delta_1 - K\delta_2, \quad H_b := (0,\infty) \text{ для } b \leq 0;$$
$$\bar{C}_b := \frac{1}{4} - M_T\delta_1 - K_T\delta_2, \quad H_b := (0,T] \text{ для } b > 0;$$
$$\bar{\bar{C}}_b := \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2} 21.$$

Якщо тепер узяти δ_1 і δ_2 такими, щоб $\bar{C}_b > 0$ і $\bar{\bar{C}}_b > 0$, то отримаємо

$$\rho(t,x,\xi) \geq C_b\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{p(t)} + \frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{q(t)} + \frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{r(t)}\Big),$$
$$t \in H_b, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{47}$$

де $C_b := \min\{\bar{C}_b, \bar{\bar{C}}_b, \delta_2/4\}$.

Властивість 1. *Для довільного $T > 0$ і будь-яких мультиіндексів $\{k_l, m_l\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \leq C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3} \times$$
$$\times (p(t-\tau))^{-(n_1+|k_1|+|m_1|)/2} \; (q(t-\tau))^{-(n_2+|k_2|+|m_2|)/2} \times$$
$$\times (r(t-\tau))^{-(n_3+|k_3|+|m_3|)/2} \; E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{48}$$

де $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b > 0$;

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{p(t)} + \frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{q(t)} + \frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{r(t)}\Big)\Big\}. \tag{49}$$

Доведення. Для $k_l = 0$ і $m_l = 0$, $l \in \{1,2,3\}$, оцінка (48) безпосередньо випливає з (9), (39), (40) і (47).

Оцінки (48) у загальному випадку випливають із результатів диференціювання виразу для G, оцінок (40) і (47) та такого твердження:

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, C_r > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^p : \ \ |z|^r \exp\{-c_1|z|^2\} \le C_r \exp\{-c|z|^2\}, \tag{50}$$

де c – фіксована стала з проміжку $(0, c_1)$. $\rhd$

Властивість 2. *Функція* $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *як функція* t *і* x *є розв'язком рівняння* (1), *а як функція* τ *і* ξ *– розв'язком рівняння* (2).

Твердження доводиться безпосереднім підрахунком.

Властивість 3. *Справджуються рівності*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 1, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{51}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, dx = e^{-n_1 b(t-\tau)}, \quad t > \tau, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{52}$$

Доведення. Згідно з формулами (9), (10), (21), (25) і (26) маємо

$$\begin{aligned} G(t, x; \tau, \xi) =& e^{-n_1 b(t-\tau)} \tilde{G}(t, x; \tau, \xi) = \\ &= (2\pi)^{-n} e^{n_1 bt} \bar{c}_1^{-n_1/2} \bar{c}_3^{-n_2/2} \bar{c}_6^{-n_3/2}\, I(t-\tau, x, \xi) = \\ &= \bar{c}_1^{-n_1/2} \bar{c}_3^{-n_2/2} \bar{c}_6^{-n_3/2}\, F^{-1}_{\eta \to Z(t-\tau, x, \xi)}[\exp\{-(\tilde{A}\eta, \eta)\}], \end{aligned} \tag{53}$$

де $\bar{c}_i := c_i(t-\tau)$, $i \in \{1, 3, 6\}$.

Розглянемо інтеграл із (51). Використаємо рівність (53) і зробимо заміну змінних інтегрування $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ за формулами

$$\begin{aligned} &(\bar{c}_1)^{-1/2}(x_1 e^{b(t-\tau)} - \xi_1) = \hat{\xi}_1; \\ &(\bar{c}_3)^{-1/2}(x_2 + \hat{x}_1 \alpha_b(t-\tau) - \xi_2) = \hat{\xi}_2; \\ &(\bar{c}_6)^{-1/2}\Big(x_3 + (t-\tau)x_2' + \frac{\alpha_b(t-\tau) - (t-\tau)}{b} x_1' - \xi_3\Big) = \hat{\xi}_3, \\ &\hat{\xi} := (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3). \end{aligned}$$

Маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta \to \hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta, \eta)\}]\, d\hat{\xi} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(0,\hat{\xi})\} F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]\,d\hat{\xi} = \\
&= F_{\hat{\xi}\to 0}[F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]] = \exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}\Big|_{\eta=0} = 1.
\end{aligned}
$$

Аналогічно за допомогою заміни змінних інтегрування $x = (x_1, x_2, x_3)$ за формулами

$$
\begin{aligned}
&(\bar{c}_1)^{-1/2}(x_1 e^{b(t-\tau)} - \xi_1) = \hat{x}_1, \\
&(\bar{c}_3)^{-1/2}(x_2 + \hat{x}_1 \alpha_b(t-\tau) - \xi_2) = \hat{x}_2, \\
&(\bar{c}_6)^{-1/2}(x_3 + (t-\tau)x_2' + \frac{\alpha_b(t-\tau)-(t-\tau)}{b} x_1' - \xi_3) = \hat{x}_3, \\
&\hat{x} := (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3),
\end{aligned}
$$

маємо

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,dx &= e^{-n_1 b(t-\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta\to\hat{x}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]\,d\hat{x} = \\
&= e^{-n_1 b(t-\tau)} F_{\hat{x}\to 0}[F^{-1}_{\eta\to\hat{x}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]] = \\
&= e^{-n_1 b(t-\tau)} \exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}\Big|_{\eta=0} = e^{-n_1 b(t-\tau)}. \quad \triangleright
\end{aligned}
$$

Властивість 4. *Для будь-якої неперервної та обмеженої в* $\mathbb{R}^n$ *функції* φ *функція*

$$
u(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad t > \tau,\ x \in \mathbb{R}^n,
$$

задовольняє умову

$$
\lim_{t\to\tau} u(t,x;\tau) = \varphi(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{54}
$$

а функція

$$
v(\tau,\xi;t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(x)\,dx, \quad \tau < t,\ \ \xi \in \mathbb{R}^n,
$$

– умову

$$
\lim_{\tau\to t} v(\tau,\xi;t) = \varphi(\xi),\ \ \xi \in \mathbb{R}^n.
$$

Доведення. Доведемо тільки співвідношення (54). Нехай $B_\delta(x)$ – куля в просторі $\mathbb{R}^n$ з центром у точці x радіуса $\delta > 0$. Використавши рівність (51), запишемо

$$\begin{aligned} u(t,x;\tau) - \varphi(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi(x))\, d\xi = \\ &= \int\limits_{B_\delta(x)} G(t,x;\tau,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi(x))\, d\xi + \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^x \setminus B_\delta(x)} G(t,x;\tau,\xi)(\varphi(\xi) - \varphi(x))\, d\xi =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{55}$$

Оскільки функція φ є рівномірно неперервною в $B_\delta(x)$, то маємо $|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \le \omega(\delta)$, де $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, а оскільки вона обмежена, то існує стала $\Phi > 0$ така, що

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \le |\varphi(\xi) + \varphi(\xi)| \le 2\Phi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x).$$

Тоді з використанням оцінки (48), рівності (51), позначень $M(\lambda) := \max\{p(\lambda), q(\lambda), r(\lambda)\}$ і

$$J := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (p(t-\tau))^{-n_1/2} (q(t-\tau))^{-n_2/2} (r(t-\tau))^{-n_3/2} E_{c/2}(t-\tau, x, \xi)\, d\xi,$$

одержуємо

$$|I_1| \le \omega(\delta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi = \omega(\delta), \tag{56}$$

$$\begin{aligned} |I_2| \le\, & 2\Phi C_0 (p(t-\tau))^{-n_1/2} (q(t-\tau))^{-n_2/2} (r(t-\tau))^{-n_3/2} \times \\ & \times \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x)} E_c(t-\tau, x, \xi)\, d\xi \le C_1 \exp\Big\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\Big\} J = \\ =\, & C_2 \exp\Big\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\Big\}, \end{aligned} \tag{57}$$

якщо $0 < t - \tau \le \gamma$, $\gamma > 0$ – досить мале число.

Тут використано те, що J – стала та існує число $\gamma \in (0,1)$ таке, що для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash B_\delta(x)$ і $\lambda \in (0,\gamma)$ справджується нерівність

$$E_{c/2}(\lambda, x, \xi) \leq \exp\Big\{-\frac{c\delta^2}{8M(\lambda)}\Big\}. \tag{58}$$

Для обчислення інтеграла J скористаємося означенням (49) і заміною змінних інтегрування ξ_1, ξ_2, та ξ_3 за формулами

$$\frac{\sqrt{c/2}|X_1(t-\tau)-\xi_1|}{\sqrt{p(t-\tau)}} = y_1, \quad \frac{\sqrt{c/2}|X_2(t-\tau)-\xi_2|}{\sqrt{q(t-\tau)}} = y_2,$$
$$\frac{\sqrt{c/2}|X_3(t-\tau)-\xi_3|}{\sqrt{r(t-\tau)}} = y_3.$$

Тоді одержимо

$$J = \Big(\frac{c}{2}\Big)^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-|y_1|^2}\, dy_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-|y_2|^2}\, dy_2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} e^{-|y_3|^2}\, dy_3 = \Big(\frac{c\pi}{2}\Big)^{n/2}.$$

Доведемо нерівність (58). Досить установити існування такого числа $\gamma \in (0,1)$, що

$$K := \frac{|X_1(\lambda)-\xi_1|^2}{p(\lambda)} + \frac{|X_2(\lambda)-\xi_2|^2}{q(\lambda)} + \frac{|X_3(\lambda)-\xi_3|^2}{r(\lambda)} \geq \frac{\delta^2}{4M(\lambda)},$$
$$\xi \in \mathbb{R}^n \backslash B_\delta(x), \ \ \lambda \in (0,\gamma).$$

Нехай $X(\lambda) := (X_1(\lambda), X_2(\lambda), X_3(\lambda))$. Для $\lambda \in (0,\gamma)$, $\gamma < 1$ і $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash B_\delta(x)$ маємо

$$K \geq \frac{|\xi - X(\lambda)|^2}{M(\lambda)} \geq \frac{(|\xi - x| - |x - X(\lambda)|)^2}{M(\lambda)} \geq \frac{(\delta - |x - X(\lambda)|)^2}{M(\lambda)},$$

$$|x - X(\lambda)| = \Big|\Big((1-e^{b\lambda})x_1, -\alpha_b(\lambda)\hat{x}_1, -\lambda x_2' - \frac{\alpha_b(\lambda)-\lambda}{b}x_1'\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \Big((1-e^{b\lambda})^2|x_1|^2 + (\alpha_b(\lambda))^2|\hat{x}_1|^2 + \lambda^2|x_2'|^2 + \Big(\ \frac{\alpha_b(\lambda)-\lambda}{b}\ \Big)^2 |x_1'|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big((1-e^{b\lambda})^2 + (\alpha_b(\lambda))^2 + \lambda^2 + \Big(\ \frac{\alpha_b(\lambda)-\lambda}{b}\ \Big)^2\Big)^{1/2}|x| \leq$$

$$\leq A(\lambda)|x| \leq A(\gamma)|x| \leq \frac{\delta}{2},$$

$$K \geq \frac{(\delta-\delta/2)^2}{M(\lambda)} = \frac{\delta^2}{4M(\lambda)},$$

якщо $\gamma < 1$ вибрати так, щоб

$$A(\gamma)|x| := \Big(|1-e^{b\gamma}| + \alpha_b(\gamma) + \gamma + \frac{1}{b}(\alpha_b(\gamma)-\gamma)\Big)|x| \le \frac{\delta}{2}.$$

Щоб завершити доведення співвідношення (54), треба за довільним $\varepsilon > 0$ вибрати δ так, щоб $\omega(\delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, потім узяти $t-\tau$ настільки малим, щоб

$$C_2 \exp\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\} < \varepsilon/2$$

і скористатися (55)–(57). $\quad\triangleright$

З властивостей 2 і 4 випливає, що згідно з означенням функція G є справді ФРЗК для рівняння (1) і що ФРЗК має таку властивість нормальності.

Властивість 5. *Функція*

$$G^*(\tau,\xi;t,x) := G(t,x;\tau,\xi), \quad \tau < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{59}$$

є ФРЗК для рівняння (2).

Наступні властивості ФРЗК встановлюватимуться за допомогою відповідної формули Гріна–Остроградського, яку ми наводимо нижче.

Нехай $z := (z_1, z_2, z_3)$ – точка в $\mathbb{R}^n$, де $z_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$; B_R – куля $\{z \in \mathbb{R}^n \,|\, |z| \le R\}$, Γ_R – її межа; L і L^* – диференціальні вирази з (1) і (2). Легко переконатися в правильності такої дивергентної рівності для підходящих функцій u і v:

$$\begin{gathered}(v\,Lu - u\,L^*v)(\theta,z) = \\ = \partial_\theta(uv)(\theta,z) - \sum_{j=1}^{n_1}\partial_{z_{1j}}\sum_{l=1}^{n_1}a_{jl}(v\,\partial_{z_{1l}}u - u\,\partial_{z_{1l}}v)(\theta,z) - \\ -b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{z_{1j}}(z_{1j}vu)(\theta,z) - \sum_{j=1}^{n_2}\partial_{z_{2j}}(z_{1j}vu)(\theta,z) - \sum_{j=1}^{n_3}\partial_{z_{3j}}(z_{2j}vu)(\theta,z).\end{gathered}$$

Зінтегрувавши цю рівність за $\theta \in (t_1,t_2)$, $t_1 < t_2$, і $z \in B_R$, одержимо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} (v\,Lu - u\,L^*v)(\theta, z)\,dz = \int_{B_R} (uv)(\theta, z)\Big|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2} dz -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(v\,\partial_{z_{1l}} u - u\,\partial_{z_{1l}} v)(\theta, Z)\mu_{1j}\,dS_z -$$
$$-b \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} (vu)(\theta, z) z_{1j}\mu_{1j}\,dS_z$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \Big(\sum_{j=1}^{n_2} z_{1j}\mu_{2j} - \sum_{j=1}^{n_3} z_{2j}\mu_{3j}\Big)(vu)(\theta, z)\,dS_z, \qquad (60)$$

де $(\mu_{11}, ..., \mu_{1n_1}, \mu_{21}, ..., \mu_{2n_1}, \mu_{31}, ..., \mu_{3n_3})$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R.

Перехід у формулі (60) до границі при $R \to 0$ для функцій u і v, для яких інтеграли по Γ_R прямують до нуля, приводить до формули

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (v\,Lu - u\,L^*v)(\theta, Z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} (uv)(\theta, z)\Big|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2} dz, \qquad (61)$$

яка далі безпосередньо використовується для встановлення наступних властивостей ФРЗК.

Властивість 6. *Є правильною формула згортки*

$$G(t, x; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \gamma, z) G(\gamma, z; \tau, \xi)\,dz, \quad \tau < \gamma < t,\ \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (62)$$

Доведення. Покладемо в (61) $u(\theta, z) = G(\theta, z; \tau, \xi)$, $v(\theta, z) = G^*(\theta, z; t, x)$, $t_1 = \gamma$ і $t_2 = t - \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ таке, що $\gamma < t - \varepsilon$. Одержимо

$$\int\limits_{\gamma}^{t-\varepsilon} d\theta \int\limits_{\mathrm{R}^n} \Big(G^*(\theta,z;t,x)\, LG(\theta,z;\tau,\xi) - G(\theta,z;\tau,\xi) L^* G^*(\theta,z;t,x) \Big)\, dz =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}^n} G(\theta,z;\tau,\xi)\, G^*(\theta,z;t,x) \Big|_{\theta=\gamma}^{\theta=t-\varepsilon} dz =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}^n} \Big[G(t-\varepsilon,z;\tau,\xi)\, G^*(t-\varepsilon,z;t,x) - G(\gamma,z;\tau,\xi) G^*(\gamma,z;t,x) \Big]\, dz.$$

Використавши властивість 2, отримаємо

$$\int\limits_{\mathrm{R}^n} G(\gamma,z;\tau,\xi) G^*(\gamma,z;t,x)\, dz = \int\limits_{\mathrm{R}^n} G(t-\varepsilon,z;\tau,\xi) G^*(t-\varepsilon,z;t,x)\, dz. \quad (63)$$

У формулі (63) перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$. Скориставшись властивістю 4 і формулою (59), одержимо потрібну рівність (62). $\rhd$

За допомогою формули (61) подібно до [7] доводяться ще такі властивості.

Властивість 7. *Існує тільки один ФРЗК для рівняння* (1), *який має попередні властивості.*

Властивість 8. *Коефіцієнти* a_{jl} *рівняння* (1) *виражаються через ФРЗК* G *за формулами*

$$a_{jl} = \frac{1}{2} \lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int\limits_{\mathrm{R}^n} (\xi_{1j} - e^{b(t-\tau)} x_{1j})(\xi_{1l} - e^{b(t-\tau)} x_{1l})\, G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi,$$

$$\{j,l\} \subset \{1,...,n_1\}.$$

Література

[1] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[2] *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

[3] *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.

[4] *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.

[5] *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

[6] *Заболотько Т.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т. – 2012. – **2**, №2–3. – С. 81–89.

[7] *Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т. – 2011. – **1**, №1–2.– С. 13–24.

[8] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[9] *Гантмахер Ф.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.