Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 154–179

УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп

(Національний університет „Львівська політехніка“, Львів)

Про розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння в уточненій соболєвській шкалі

ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua

We establish conditions for the one-valued solvability of the non-local boundary value problem with one parameter for a differential equation with the differential operator $B = (z_1\,\partial/\partial z_1, \ldots, z_p\,\partial/\partial z_p)$ in the Hörmander Hilbert spaces. The latter consist of functions of several complex variables and form a refined Sobolev scale. We prove the metric-type theorems about lower estimations of small denominators, which arise in the construction of the solution to this ill-posed problem. It follows from these theorems that the problem is one-valued solvable for almost all vectors composed of the coefficients of the equation and the parameter in the boundary conditions.

Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі з одним параметром для диференціального рівняння з оператором диференціювання $B = (z_1\,\partial/\partial z_1, \ldots, z_p\,\partial/\partial z_p)$ у гільбертових просторах Хермандера. Останні складаються з функцій багатьох комплексних змінних і утворюють уточнену соболєвську шкалу. Доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку цієї некоректної задачі. З них випливає її однозначна розв'язність для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та параметра нелокальних умов.

1. Вступ

В останні роки посилюється інтерес до розширення і поглиблення досліджень задач для рівнянь і систем диференціальних рівнянь з частинними похідними у різних класах функціональних просторів, зокрема у просторах, для яких показником гладкості їх елементів служить не числовий, а деякий функціональний параметр [1, 2]. Широкі класи таких просторів були введені і систематично вивчені Л. Хермандером [3]. Частинним випадком цих просторів є сім'я гільбертових просторів, у яких числовий параметр задає основну гладкість, а функціональний параметр (повільно змінна на нескінченності функція) визначає допоміжну гладкість. Ця сім'я функціональних просторів носить назву уточненої соболєвської шкали.

Ще одним з важливих напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є дослідження задач з нелокальними крайовими умовами та встановлення умов їх коректності і розв'язності. У шкалах соболєвських просторів такі нелокальні задачі у дійсній області розглядалися багатьма авторами [4, 5, 6, 7].

Інтерес представило поширення результатів теорії нелокальних задач для дифференціальних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними на класи гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу у разі функцій комплексних змінних.

Праця [8] присвячена дослідженню у соболєвській шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних задачі з нелокальними двоточковими умовами для рівняння з частинними похідними з оператором диференціювання $B = (B_1, \ldots, B_p)$, де оператор узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j\, \partial/\partial z_j$, $j = 1, \ldots, p$, діє за комплексною змінною z_j. Дана робота поширює результати роботи [8] з шкали соболєвських просторів на уточнену шкалу Соболєва. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі у відповідному функціональному просторі Хермандера, доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

2. Введення основних позначень та постановка задачі

Введемо наступні позначення: $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, тобто $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область

$[0,T]\times\mathcal{S}^p$, де $T>0$, $p\geq 2$.

Нехай $\mathbf{W}$ — лінійний простір кратних скінченних сум вигляду

$$P(z)=\sum_k P_k z^k=\sum_{k_1}\dots\sum_{k_p} P_{k_1,\dots,k_p} z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p},$$

де $z{=}(z_1,\dots,z_p){\in}\mathcal{S}^p$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k{=}(k_1,\dots,k_p){\in}\mathbb{Z}^p$. Елементи цього простору є многочленами $2p$ комплексних змінних z_1, …, z_p, z_1^{-1}, …, z_p^{-1}, також вони є дробово-раціональними функціями векторної змінної z.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений з простором $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами Лорана

$$Q(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Q_k z^k,$$

що діють на основну функцію $P\in\mathbf{W}$ за правилом

$$\langle Q,P\rangle=\sum_k Q_k\overline{P}_k.$$

Позначимо через $\mathcal{M}_1$ множину всіх повільно змінних на ∞ за Караматою функцій, тобто множину таких функцій ψ, для яких

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)}=1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda>0.$$

Наведемо приклади повільно змінних функцій.

Приклад 1. $\psi(t)=r(t)$, де $r(t)=(\ln t)^{r_1}(\ln\ln t)^{r_2}\dots(\ln\dots\ln t)^{r_k}$ при $t>1$ для $k\in\mathbb{N}$ дійсних чисел $r_1,r_2,\dots,r_k$.

Приклад 2. $\psi(t)=\exp r(t)$ при $t\gg 1$, де функція $r(t)$ задається формулою з прикладу 1 при $r_1<1$.

Приклад 3. $\psi(t)=(\ln t)^{m(t)}$, де $m(t)=\alpha+\beta\sin\ln^\gamma t$ при $t>1$, числа α, β, γ є дійсними, причому $\beta\neq 0$, $0<\gamma<1$.

Приклад 4. $\psi(t)=t^{s(t)}$, де $s(t){=}\alpha(\ln t)^{-\beta}\sin\ln^\gamma t$ при $t>1$, числа α, β, γ є дійсними, причому $\alpha{\neq}0$, $0<\gamma<\beta<1$.

Приклад 5. $\psi\equiv 1$.

Позначимо через $\mathcal{M}$ множину всіх вимірних за Борелем на півосі $[1,\infty)$ функцій $\psi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ з $\mathcal{M}_1$ таких, що функції ψ і $1/\psi$ обмежені на кожному відрізку $[1;b]$, де $1 < b < \infty$.

Введемо шкалу просторів $\{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\ \psi\in\mathcal{M}}$. Нехай $\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathcal{M}$, — гільбертів простір функцій $v = v(z)$ з простору $\mathbf{W}'$ із заданим в ньому скалярним добутком

$$(v,w)_{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q}\psi^2(\tilde{k})v_k\bar{w}_k,$$

де $\tilde{k} = \sqrt{1+k_1^2+\ldots+k_p^2}$, який стандартним чином породжує норму $\|v\|^2_{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)} = (v,v)_{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)}$. У шкалі $\{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ числовий параметр q визначає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр ψ — допоміжну гладкість, тобто параметр ψ уточнює основну q-гладкість.

В частинному випадку при $\psi\equiv 1$ простір $\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$ співпадає з соболєвським простором $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, який використовувався у роботі [8]. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливими є неперервні вкладення

$$\mathbf{W}\subset \mathbf{H}_{q+\varepsilon}(\mathcal{S}^p)\hookrightarrow \mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)\hookrightarrow \mathbf{H}_{q-\varepsilon}(\mathcal{S}^p)\subset \mathbf{W}'.$$

Варто відмітити, що в силу властивостей повільно змінних функцій [1] для кожного $\psi\in\mathcal{M}$ існує додатна функція $\psi_\infty\in C^\infty\big([1;\infty)\big)\cap\mathcal{M}$ така, що $\psi(t)\asymp\psi_\infty(t)$ на півосі $[1;\infty)$, і отже, простори $\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$ і $\mathbf{H}_q^{\psi_\infty}(\mathcal{S}^p)$ рівні з точністю до еквівалентності норм (запис $\psi\asymp\psi_\infty$ означає, що обидві функції $\dfrac{\psi}{\psi_\infty}$ і $\dfrac{\psi_\infty}{\psi}$ обмежені на промені $[1;\infty)$). Таким чином, можна обмежитися нескінченно-диференційовними функціями у множині $\mathcal{M}$.

Зауважимо, що для довільних функцій $\psi,\psi_1\in\mathcal{M}$ їх добуток $\psi\psi_1$ є також функцією з класу $\mathcal{M}$ [1] та для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується неперервне і щільне вкладення $\mathbf{H}_{q+\varepsilon}^{\psi_1}(\mathcal{S}^p)\hookrightarrow\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$, а також справедливим є твердження, що функція $\psi(t)/\psi_1(t)$ обмежена в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{H}_q^{\psi_1}(\mathcal{S}^p)\hookrightarrow\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$.

Введемо шкалу просторів $\{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\ \psi\in\mathcal{M}}$ для функцій з області $\mathcal{D}^p$, де $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u=u(t,z)$ таких, що похідні

$$\frac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t)z^k, \quad r=0,1,\ldots,n,$$

для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}^{\psi}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$ дає формула

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \Big\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \Big\|^2_{\mathbf{H}^{\psi}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

У просторі $\mathbf{W}'$ запровадимо оператори узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j\,\partial/\partial z_j$, а також степені даних операторів $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1}u)$ $(j = 1,\ldots,p,\ l = 1,\ldots,n)$, а також відмітимо, що $B_j(z^k) = k_j z^k$. З операторів $B_1, \ldots, B_p$ складемо векторний оператор $B = (B_1,\ldots,B_p)$ і позначимо $B^s = B_1^{s_1}\ldots B_p^{s_p}$.

Введемо функції $\omega_j : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ наступним чином:

$$\omega_j(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-p}\psi_j^{-r}(\tilde{k}), \quad j = 1,2, \tag{1}$$

де $\psi_j \in \mathcal{M}$, число $r \in \mathbb{R}$ та $\omega_1\big(2/(n-1)\big) < \infty$, $\omega_2(2) < \infty$. Функції ψ_1 та ψ_2 з такими властивостями існують і зокрема, можуть бути взяті з прикладу 1. Якщо справджується співвідношення $\psi_1\psi_2 = \psi_2^n$, то умови $\omega_1\big(2/(n-1)\big) < \infty$, $\omega_2(2) < \infty$ виконуються одночасно.

Позначимо $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R із центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$.

В області D^p розглянемо задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big)u = \sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f, \tag{2}$$

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

де $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 = \varphi_0(z)$, $\varphi_1 = \varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(z)$, $f = f(t,z)$ — задані функції, а $u = u(t,z)$ — шукана функція.

Означення. Під розв'язком задачі (2), (3) будемо розуміти функцію $u = u(t,z)$ із значеннями $u(t,\cdot)$ у просторі $\mathbf{W}'$ для $t \in [0,T]$, яка задовольняє рівняння (2) і умови (3) та належить до простору $\mathbf{H}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$.

Розв'язок задачі (2), (3) можна представити у вигляді суми

$$u = v + w, \tag{4}$$

де $v{=}v(t,z)$ — розв'язок задачі для однорідного рівняння, а $w{=}w(t,z)$ — розв'язок відповідної задачі з однорідними крайовими умовами. Таким чином, задача (2), (3) зводиться до двох задач, які розглянемо у наступних параграфах.

3. Умови розв'язності задачі для однорідного рівняння

В області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу з двоточковими нелокальними умовами (3) для однорідного диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0. \tag{5}$$

Для встановлення достатніх умов на функції φ_0, φ_1, …, φ_{m-1}, за яких обернений оператор задачі (5), (3), що відображає їх у функцію u — розв'язок даної задачі з простору $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, існує та є неперервним в уточненій шкалі Соболєва, використовуємо метричний підхід [6].

Розглядаємо множину задач (5), (3), що параметризується коефіцієнтами $a_{s_0,s}$ рівняння (5). Вважаємо, що всі коефіцієнти $a_{s_0,s}$ розглядаються у крузі $\mathcal{O}_A \subset \mathbb{C}$, параметр μ — у крузі $\mathcal{O}_M \subset \mathbb{C}$, де A та M — додатні фіксовані числа. Для обчислення мір множин комплексних чисел, ототожнюємо простір $\mathbb{C}$ з дійсним простором $\mathbb{R}^2$ з плоскою мірою Лебега.

Розв'язок задачі (5), (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) z^k, \tag{6}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (5) у вигляді одинарної суми

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} b_j(B) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}},$$

де

$$b_j(B)=\sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s}B^s, \quad j=1,\dots,n.$$

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (6) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ є класичним розв'язком такої задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = 0, \tag{7}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \qquad m = 0,1,\dots,n-1, \tag{8}$$

де

$$b_j(k) = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s} k^s,$$

а φ_{mk} є коефіцієнтами Фур'є функцій φ_m, тобто $\varphi_{mk} = \langle \varphi_m(z), z^k \rangle$ та

$$\varphi_m(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{mk} z^k.$$

Якщо для якогось k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (7), (8), то існує безліч таких розв'язків $\hat{u}_k$, а однорідна задача (5), (3) також має нетривіальні розв'язки, які визначає формула $\hat{u}(t,z) = \hat{u}_k(t) z^k$. Тому єдиність розв'язку u_k задачі (7), (8) у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{W}'$.

Побудуємо розв'язок задачі (7), (8). Для цього подамо коефіцієнти $b_j(k)$, $j = 0,1,\dots,n$, рівняння (7) у вигляді $b_j(k) = \tilde{k}^j \tilde{b}_j(k)$. Величини $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,s}$, які у рівнянні (5) є коефіцієнтами при

$$B^s \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}}, \quad |s| \le j,$$

і рівномірно обмежені за k, j і $a_{s_0,s}$. Тому для величини $\tilde{b}_j(k)$ можна записати такі рівномірні нерівності: для тих $k \neq 0$ при яких $\tilde{k} \neq \sqrt{2}$

$$|\tilde{b}_j(k)| \leq \max_{|s|\leq j} |a_{n-j,s}| \frac{1}{\tilde{k}^j} \sum_{|s|=0}^{j} |k^s| \leq A \sum_{\sigma=0}^{j} \frac{1}{\tilde{k}^{j-\sigma}} \sum_{|s|=\sigma} \prod_{l=1}^{p} \left(\frac{|k_l|}{\tilde{k}} \right)^{s_l} \leq$$

$$\leq A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{k}^{\sigma-j} \sum_{|s|=\sigma} 1 = A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{k}^{\sigma-j} C^{\sigma}_{\sigma+p-1} \leq A C^{j}_{p+j},$$

$|\tilde{b}_j(k)| = |a_{n-j,0}| \leq A$ при $k = 0$, а для тих k, при яких $\tilde{k} = \sqrt{2}$

$$|\tilde{b}_j(k)| \leq (j+1) 2^{-j/2} A \leq \frac{3}{2} A.$$

Нехай величини $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ є коренями многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k) \lambda^{n-j}.$$

Вони є неперервними функціями від $a_{s_0,s}$, обмеженими, зокрема [9]

$$|\lambda_j(k)| \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1(k)|, \ldots, |\tilde{b}_n(k)|\} < A_1 = 1 + C^{n}_{p+n} A. \tag{9}$$

Очевидно, що $\gamma_j = \tilde{k} \lambda_j(k)$ є коренями характеристичного рівняння

$$L(\gamma, k) = \gamma^n + b_1(k) \gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$$

для диференціального рівняння (7).

Позначимо через K_Δ множину тих $k \in \mathbb{Z}^p$, при яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратні корені. Ця множина залежить від коефіцієнтів $a_{s_0,s}$ рівняння (5).

У випадку різних коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, тобто $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$, загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl} e^{\tilde{k} \lambda_l(k) t}, \tag{10}$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі з простору $\mathrm{C}^n[0, T]$.

Якщо функції $u_k(t)$ є класичним розв'язком задачі (7), (8), то числа $\tilde{C}_{kl} = (\mu - e^{\tilde{k} \lambda_l(k) T}) C_{kl}$, $l = 1, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{k1} \\ \tilde{C}_{k2} \\ \tilde{C}_{k3} \\ \dots \\ \tilde{C}_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k}/\tilde{k} \\ \varphi_{2k}/\tilde{k}^2 \\ \dots \\ \varphi_{n-1,k}/\tilde{k}^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

з невиродженою матрицею Вандермонда $(\lambda_j^{\alpha-1})_{j,\alpha=1}^n$ і навпаки, якщо $\tilde{C}_{k1}, \tilde{C}_{k2}, \dots, \tilde{C}_{kn}$ утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11) і числа

$$C_{kl} = \tilde{C}_{kl}/(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T})$$

існують, то функція $u_k(t)$, що визначається формулою (10), є розв'язком задачі (7), (8). Розв'язавши систему (11) за правилом Крамера, одержимо

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}, \qquad l = 1, \dots, n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta,$$

де

$$\Delta(k) = \prod_{1 \le r < q \le n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k)) \neq 0$$

є визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення.

Для того, щоб задача (7), (8) мала єдиний розв'язок у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$ необхідно і достатньо, щоб для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ виконувалась умова

$$\mu \notin \{e^{\tilde{k}\lambda_1(k)T}, \dots, e^{\tilde{k}\lambda_n(k)T}\}.$$

Звідси для довільних $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ і $l = 1, \dots, n$ випливає, що

$$\lambda_l(k) \neq \frac{\ln \mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}.$$

У протилежному ж випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деяких k та l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що

$$\lambda_l(k) = \frac{\ln \mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}.$$

Таким чином, справедливою є рівність

$$\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(k)\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{k}^{n-j}} = 0$$

чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(k)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{12}$$

У випадку кратних коренів загальний розв'язок рівняння (7) також буде мати вигляд (10), але замість коефіцієнтів C_{kl} будуть многочлени $C_{kl}(t)$ степеня на одиницю меншого від кратності кореня $\lambda_l(k)$. Тому розв'язність у цілих числах m і $k_1, \dots, k_p$ рівняння (12) є умовою неєдиності розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{W}'$ і для цього випадку.

Сформулюємо теорему єдиності розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{W}'$, доведення якої наведено у роботі [8].

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (5), (3) *у просторі* $\mathbf{W}'$ *необхідно і достатнъо, щоб рівняння* (12) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* $k_1, \dots, k_p$.

В умовах цієї теореми для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (7), (8) існує, а при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}. \tag{13}$$

Оцінимо квадрат абсолютної величини похідної по t порядку r даної функції

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \le \frac{n^3}{|\Delta(k)|^2}\max_{j,l}|\Delta_{jl}(k)|^2 \max_{1<l<n}\left|\frac{|\lambda_l(k)|^{2r}e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right|^2 \sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}|^2.$$

З теореми 1 отримаємо існування єдиного розв'язку задачі (5), (3) з простору $\mathbf{W}'$, який за формулами (6) і (13) має вигляд ряду

$$\begin{gathered} u(t,z) = \sum_{k\in K_\Delta} u_k(t)z^k + \\ + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K_\Delta}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}z^k. \end{gathered} \tag{14}$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ — визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то з (9) маємо

$$|\Delta_{jl}(k)| < (n-1)! A_1^{n(n-1)/2}. \tag{15}$$

Сформулюємо і доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай задача* (5), (3) *має єдиний розв'язок у просторі* $\mathbf{W}'$, *тобто справджуються умови теореми* 1, *та для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq \tilde{\psi}_1^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{16}$$

$$\left| \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right| \leq \tilde{\psi}_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}, \quad l = 1, \dots, n, \tag{17}$$

для деяких дійсних чисел η_1, η_2 *та функцій* $\tilde{\psi}_1$ *і* $\tilde{\psi}_2$ *з* $\mathcal{M}$. *Якщо*

$$\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p), \quad \varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p),$$

де $\gamma = \eta_1 + \eta_2$, $\widehat{\psi} = \psi\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (5), (3) *з простору* $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* φ_0, φ_1, $\dots$, φ_{n-1}.

Доведення. Позначимо через K скінченну множину тих $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких не виконується хоча б одна з нерівностей (16) або (17), і в записі розв'язку (14) замінимо множину K_Δ на скінченну множину K. Оскільки $\Delta(k) = 0$ для $k \in K_\Delta$, то $K_\Delta \subset K$.

З умов теореми маємо існування розв'язку u_k задачі (7), (8) з простору $\mathrm{C}^n[0,T]$, причому з оцінок (15)–(17) випливають нерівності

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq C_1\tilde{\psi}_1^2(\tilde{k})\tilde{\psi}_2^2(\tilde{k})\tilde{k}^{2\eta_1+2\eta_2}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}|^2, \quad r = 0, 1, \dots, n, \tag{18}$$

для $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K$, де

$$C_1 = n^3 A_1^{n(n-1)+2r}\big((n-1)!\big)^2, \quad t \in [0,T].$$

Оскільки $\widehat{\psi} \in \mathcal{M}$, то $\mathbf{H}_q^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$ є простором із введеної шкали просторів і з формул (14) і (18) одержимо нерівність

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)} \leq C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}^{\widehat{\psi}}_{q+\gamma-j}(\mathcal{S}^p)},$$

де $C_2 > 0$ — величина, яка залежить від параметрів задачі (5), (3).

Теорему доведено.

Розглянемо умови, при яких виконується нерівність (16). Для цього використаємо раніше введену функцію ψ_1 і позначимо вектор $\vec{a}{=}(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}){\in}\mathcal{O}_A^p$, від якого лінійно залежить ліва частина Lu рівняння (5), тобто

$$Lu = a_{0,n,0,\ldots,0} B_1^n u + \ldots + a_{0,0,\ldots,n} B_p^n u + L_1 u.$$

Теорема 3. *Нехай $\eta_1 = p(n{-}1)/2$, $\psi_1 \in \mathcal{M}$ і $\omega_1(2/(n-1)) < \infty$, тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ нерівність* (16) *виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$.*

Доведення. Величина

$$\Delta^2(k) = \prod_{1 \leq r < q \leq n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))^2$$

є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$, який визначається за коефіцієнтами цього полінома [10]:

$$D(k) = (-1)^{n(n-1)/2} \det \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

де $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ — квадратна матриця, яка складається з блоків $V_1 = \left(v^1_{j-i}(k)\right)$ і $V_2 = \left(v^2_{j-i}(k)\right)$ з $n-1$ і n рядками відповідно, де можливі ненульові значення дають формули

$$v_j^1(k) = \begin{cases} \tilde{b}_j(k), & 1 \leq j \leq n; \\ 1, & j = 0; \end{cases}$$

$$v_j^2(k) = \begin{cases} (n-j)\tilde{b}_j(k), & 1 \leq j \leq n; \\ n, & j = 0. \end{cases}$$

Доведемо, що для майже всіх векторів $\vec{a}$, які належать множині $\mathcal{O}_A^p$, за досить великих $\tilde{k}$ справджується оцінка

$$|\mathrm{Re}\, D(k)| \geq \psi_1^{-2}(\tilde{k})\tilde{k}^{-2\eta_1}. \tag{20}$$

Позначимо через $\mathrm{E}\Psi$ множину векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$, для яких протилежна до (20) нерівність

$$|\mathrm{Re}\, D(k)| < \psi_1^{-2}(\tilde{k})\tilde{k}^{-2\eta_1} \tag{21}$$

виконується для безлічі векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а через $\mathrm{E}\Psi_k$ — множину тих векторів $\vec{a}$, для яких нерівність (21) правильна при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Вважатимемо, не порушуючи загальності, що $|k_1| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |k_i|$. Коефіцієнт $a_{0,n,0,\ldots,0}$ позначимо через $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, де α_1 — дійсна, а α_2 — уявна частини α. Із (19) при $k \neq 0$ можна отримати, що

$$D(k) = (-1)^{n(n-1)} n^n \tilde{b}_n^{n-1}(k) + F =$$
$$= (-1)^{n(n-1)} n^n \left(\left(\frac{k_1}{\tilde{k}}\right)^n \alpha + \ldots \right)^{n-1} + \tilde{F},$$

де F і $\tilde{F}$ містять степені $\tilde{b}_n(k)$ і α менші за $n-1$. Запишемо дійсну частину величини $D(k)$ у вигляді

$$\mathrm{Re} D(k) = (-1)^{n(n-1)} n^n \big(\mathrm{Re}\, \tilde{b}_n(k)\big)^{n-1} + F_1 =$$
$$= (-1)^{n(n-1)} n^n \left(\frac{k_1}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \alpha_1^{n-1} + \tilde{F}_1,$$

де F_1 і $\tilde{F}_1$ містять степені $\mathrm{Re}\, \tilde{b}_n(k)$ і α_1 менші за $n-1$. Позначимо через $\mathrm{E}\Psi_k^1$ множину значень α_1 векторів $\vec{a} \in \mathrm{E}\Psi_k$, для яких фіксованими є дійсні та уявні частини компонент, крім α_1, і знайдемо оцінку її міри. Оскільки виконується нерівність

$$\left| \frac{\partial^{n-1} \mathrm{Re}\, D(k)}{\partial \alpha_1^{n-1}} \right| = n^n (n-1)! \left(\frac{|k_1|}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \geq C_3,$$

де

$$C_3 = n^n (n-1)! (p+1)^{-\frac{n(n-1)}{2}},$$

то за лемою з [11] справджується оцінка

$$\mathrm{meas}\, \mathrm{E}\Psi_k^1 \leq \min \left\{ 2\sqrt{A^2 - \alpha_2^2},\ C_4(n) \left(\frac{1}{C_3} \psi_1^{-2}(\tilde{k}) \tilde{k}^{-2\eta_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\},$$

де $C_4(n) = 2n$ [12], або точне значення $C_4(n) = 4\sqrt[n]{\dfrac{n!}{2}}$ [13]. Проінтегрувавши останню оцінку в області $[-A, A]\times\mathcal{O}_A^{p-1}$, отримаємо, що

$$\operatorname{meas} \mathrm{E}\Psi_k \leq C_5\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\frac{2}{n-1}}\tilde{k}^{-\frac{2\eta_1}{n-1}},$$

де $C_5 = C_5(n, p, A) > 0$. Оскільки

$$\operatorname{meas} \mathrm{E}\Psi \leq \sum_{|k|>0} \operatorname{meas} \mathrm{E}\Psi_k \quad \text{і} \quad \frac{2\eta_1}{n-1} = p,$$

то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} \mathrm{E}\Psi_k \leq C_5\omega_1\Big(\frac{2}{n-1}\Big) < \infty.$$

Отже, згідно з формулою (1) і лемою Бореля-Кантеллі [7] міра множини $\mathrm{E}\Psi$ дорівнює нулеві.

Якщо $\vec{a} \notin \mathrm{E}\Psi$, тобто для майже всіх векторів $\vec{a}$, то з формул (20) і $|\Delta(k)|^2 = |D(k)| \geq |\operatorname{Re} D(k)|$ отримаємо, що оцінка (16) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ (крім скінченного числа, яке залежить від $a_{s_0,s}$).

Теорему доведено.

Розглянемо умови виконання нерівності (17), для чого використаємо методику з [4] та раніше введену функцію $\psi_2 \in \mathcal{M}$. Позначимо

$$\rho(\lambda, t) = \frac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda T}},$$

тоді дроби з (17) дорівнюватимуть $\rho(\lambda_l(k), t)$, де $l = 1, \ldots, n$. Послідовність знаменників функції $\rho(\lambda_l(k), t)$ може мати збіжні до нуля підпослідовності. Для оцінювання величини $\rho(\lambda_l(k), t)$ побудуємо винятковi множини малої міри на комплексній площині для параметра μ, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [6].

Виберемо додатні числа η_2 і χ з умов $\eta_2 = p/2$, $\chi^2 32nT^2\omega_2(2) = \pi$. Нехай $\varepsilon < 1$ і $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$, якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується

$$\ln 2/(2\chi T) = \ln 2\sqrt{8n\omega_2(2)/\pi} \geq \sqrt{8n/\pi}/2 = \sqrt{2n/\pi} > 1,$$

тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$.

Позначимо

$$\chi_1=\chi_1(k)=\sqrt{\varepsilon}\chi\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2},\quad \mu_l(k)=e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T},\quad \mu(k)=e^{\tilde{k}\lambda T}.$$

Враховуючи ці позначення, отримаємо, що

$$\rho(\lambda,t)=\frac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu-\mu(k)}.$$

Для тих $l=1,\ldots,n$ та $k\in\mathbb{Z}^p$, що задовільняють умову $|\mu_l(k)|<2M$, виберемо множини $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ наступним чином:

$$\mathrm{V}\Psi_l(k)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}\,(\lambda-\lambda_l(k))|<\frac{\chi_1}{2},\ |\mathrm{Im}\,(\lambda-\lambda_l(k))|<\frac{\chi_1}{2}\Big\}.$$

Кожна множина $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ — це квадрат (рис. 1) зі стороною χ_1, центром $\lambda_l(k)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} зображають відповідно такі комплексні числа:

$$\lambda_l(k)-(1+i)\chi_1/2,\quad \lambda_l(k)-(1-i)\chi_1/2,$$
$$\lambda_l(k)+(1+i)\chi_1/2,\quad \lambda_l(k)+(1-i)\chi_1/2.$$

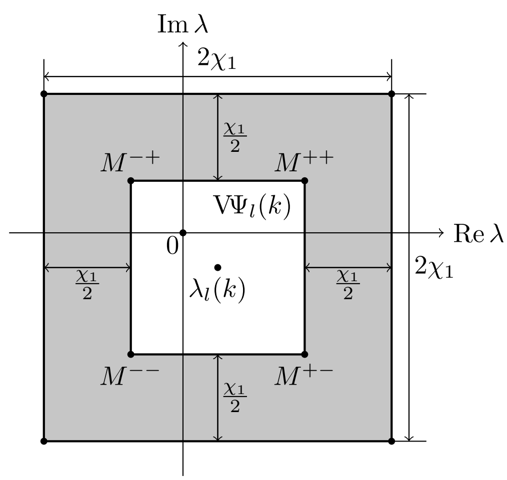

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(k)$: квадрат $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ зі стороною χ_1 та квадрат із стороною $2\chi_1$.

Образ квадрата $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$ позначимо через

$$\mathrm{V}\Psi_{l,2}(k) = \Big\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T/2} \le \Big|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \le e^{\chi_1 T/2}, \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \le \chi_1 T/2\Big\},$$

а образ концентричного до $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ квадрата зі стороною $2\chi_1$ — через $\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k)$ (див. рис. 2). Множину $\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k)$ можна задати формулою

$$\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k) = \Big\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T} \le \Big|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \le e^{\chi_1 T}, \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \le \chi_1 T\Big\}.$$

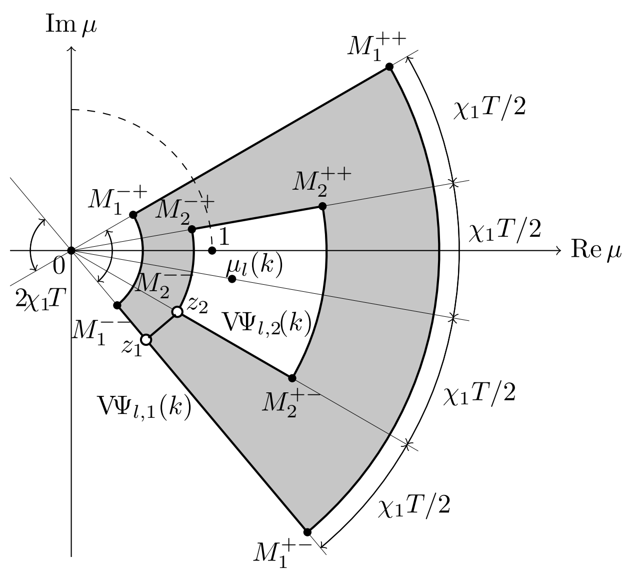

Рис. 2. Образи квадратів з рис. 1 при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$ і мінімальна відстань $|z_1 - z_2|$ між ними.

Множину $\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k)$ назвемо винятковою множиною для заданого k і обчислимо її міру

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k) &= \frac{2\chi_1 T}{2\pi}\big(\pi|\mu_l(k)|^2 e^{2\chi_1 T} - \pi|\mu_l(k)|^2 e^{-2\chi_1 T}\big) = \\ &= \chi_1 T|\mu_l(k)|^2\big(e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}\big).\end{aligned}$$

Так як $e^{2\chi_1 T} < 2$ і

$$\frac{e^{y_2\chi_1 T} - e^{y_1\chi_1 T}}{y_2 - y_1} = \chi_1 T e^{y_3\chi_1 T} \leq \chi_1 T e^{y_2\chi_1 T}, \quad y_3 \in (y_1; y_2),$$

то

$$\operatorname{meas} \mathrm{V}\Psi_{l,1}(k) = 4\chi_1 T |\mu_l(k)|^2 \frac{e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}}{4} \leq$$
$$\leq 4\big(\chi_1 T |\mu_l(k)|\big)^2 e^{2\chi_1 T} \leq 4(2\chi_1 TM)^2 e^{2\chi_1 T} < 32(\chi_1 TM)^2.$$

Об'єднаємо множини $\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k)$ в одну виняткову множину

$$\mathrm{V}\Psi_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^p; \\ |\mu_l(k)| \leq 2M}} \bigcup_{l=1}^{n} \mathrm{V}\Psi_{l,1}(k) \tag{22}$$

і запишемо оцінку її міри:

$$\operatorname{meas} \mathrm{V}\Psi_\varepsilon = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^p; \\ |\mu_l(k)| \leq 2M}} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{meas} \mathrm{V}\Psi_{l,1}(k) \leq 32(TM)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \chi_1^2. \tag{23}$$

Враховуючи позначення χ_1 та χ, отримуємо нерівність

$$\operatorname{meas} \mathrm{V}\Psi_\varepsilon \leq 32nT^2 \omega_2(2)\chi^2 \varepsilon M^2 = \varepsilon \pi M^2 = \varepsilon \operatorname{meas} \mathcal{O}_M.$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$. Враховуючи формулу (25), для міри множини $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ запишемо наступну оцінку:

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon) \operatorname{meas} \mathcal{O}_M. \tag{24}$$

Теорема 4. *Якщо $\eta_2 = p/2$, то для всіх функцій $\psi_2 \in \mathcal{M}$ таких, що $\omega_2(2) < \infty$, та векторів $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ функція $\rho(\lambda, t)$ в області $\mathrm{V}\Psi_l(k) \times [0, T]$ має оцінку зверху*

$$|\rho(\lambda, t)| \leq \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_2(\tilde{k}) \tilde{k}^{\eta_2}, \tag{25}$$

де $\theta = 8 \max\{2, 1/|\mu|\} \sqrt{2\pi n \omega_2(2)}$.

Доведення. Розглянемо випадок $|\mu_l(k)| \geq 2M$. У кожному квадраті $V\Psi_l(k)$ виконуються нерівності

$$|\mu_l(k)|e^{-\chi_1 T/2} \leq |\mu(k)| \leq |\mu_l(k)|e^{\chi_1 T/2},$$

де

$$e^{2\chi_1 T} = e^{2\sqrt{\varepsilon}\chi T \psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}} < e^{\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}\ln 2} = 2^{\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}} \leq 2,$$

і тому справедливою є оцінка

$$3M/2 < 2^{3/4}M \leq 2^{-1/4}|\mu_l(k)| \leq |\mu(k)| \leq 2^{1/4}|\mu_l(k)|.$$

Оцінюючи абсолютну величину дробів $\rho(\lambda, t)$, отримаємо

$$|\rho(\lambda,t)| = \Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda(k)T\frac{t}{T}}}{\mu - \mu(k)}\Big| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu(k)||\mu/\mu(k) - 1|} =$$
$$= \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}-1}}{|\mu/\mu(k) - 1|} \leq 3\max\Big\{1, \frac{1}{|\mu(k)|}\Big\} < \max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\}.$$

Звідси, враховуючи нерівність $\dfrac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} > 1$, дістаємо

$$|\rho(\lambda,t)| < \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\}. \tag{26}$$

Розглянемо випадок $|\mu_l(k)| < 2M$. Тоді для числа $\mu(k)$ маємо три можливості:

$$|\mu(k)| \leq \frac{|\mu|}{2}, \quad |\mu(k)| \geq 2|\mu|, \quad \frac{|\mu|}{2} < |\mu(k)| < 2|\mu|.$$

Нехай $|\mu(k)| \leq |\mu|/2$, тоді $|\mu - \mu(k)| \geq |\mu|/2$ і

$$|\rho(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} \leq \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|/2} = \frac{2|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|} \leq$$
$$\leq \frac{2}{|\mu|}\max\{1, |\mu(k)|\} \leq \frac{2}{|\mu|}\max\Big\{1, \frac{|\mu|}{2}\Big\} = \max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\},$$

а також

$$|\rho(\lambda,t)| \leq \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\}. \tag{27}$$

Нехай $|\mu(k)| \geq 2|\mu|$, тоді

$$|\mu - \mu(k)| = |\mu(k)|\Big|\frac{\mu}{\mu(k)} - 1\Big| \geq \frac{|\mu(k)|}{2}$$

і, отже,

$$|\rho(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} \leq \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu(k)|/2} = 2|\mu(k)|^{\frac{t}{T}-1} = 2|\mu(k)|^{\frac{t-T}{T}} \leq$$
$$\leq 2\max\Big\{1, \frac{1}{|\mu(k)|}\Big\} = \max\Big\{2, \frac{2}{|\mu(k)|}\Big\} \leq \max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}.$$

Таким чином,

$$|\rho(\lambda,t)| \leq \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}. \tag{28}$$

Розглянемо випадок, коли $|\mu|/2 < |\mu(k)| < 2|\mu|$. Знаменник $|\mu-\mu(k)|$ не менший, ніж $\min|z_1 - z_2|$, де z_1 і z_2 належать границям областей $V\Psi_{l,1}(k)$ і $V\Psi_{l,2}(k)$ відповідно. Цей мінімум досягається, якщо

$$z_2 = e^{\tilde{k}(\lambda_l(k)-(i+1)\chi_1/2)T},$$

а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_l(k) - \chi_1 T$ і дорівнює

$$|\mu_l(k)|e^{-\chi_1 T/2}\sin(\chi_1 T/2).$$

Оскільки справджуються оцінки

$$\frac{\chi_1 T}{2} < \frac{\ln 2}{4} < \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}, \quad \sin x > \frac{2\sqrt{2}x}{\pi}$$

при $x \in [0, \pi/4]$, то

$$\frac{\sin\chi_1 T}{2} \geq \frac{2\sqrt{2}\chi_1 T}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}\chi_1 T}{\pi}.$$

Тому з нерівності $|\mu_l(k)| \geq |\mu(k)|e^{-\chi_1 T/2}$ отримаємо оцінку

$$|\mu - \mu(k)| \geq |\mu_l(k)|e^{-\chi_1 T/2}\sin(\chi_1 T/2) \geq$$
$$\geq |\mu(k)|e^{-\chi_1 T}\sqrt{2}\chi_1 T/\pi > |\mu|\chi_1 T/2\pi,$$

звідки випливає

$$
\begin{aligned}
|\rho(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu(k)|} \le \frac{\max\{1,|\mu(k)|\}}{|\mu-\mu(k)|} \le \frac{2\pi\max\{1,2|\mu|\}}{|\mu|\chi_1 T} \le \\
\le \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}\chi\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}T}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\} \le \qquad (29)\\
\le \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} 8\sqrt{2n\pi\omega_2(2)}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\}.
\end{aligned}
$$

Праві частини у формулах (26)–(29) оцінюються числом $\dfrac{\theta\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Таким чином, нерівність (25) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Теорему доведено.

Оскільки $\lambda_l(k) \in \mathrm{V}\Psi_l(k)$ і $\left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = |\rho(\lambda_l(k),t)|$, то оцінка (17) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, якщо $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$.

Множина $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ є вимірною і її міра не перевищує величини $\varepsilon \operatorname{meas}\mathcal{O}_M$. До цієї множини належать всі розв'язки рівняння (12). Таким чином, з умови $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ згідно теореми 1 випливає єдиність розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{W}'$. Тому для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ з існування розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність на множині $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Сформулюємо загальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 5. *Нехай множина* $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ *задається формулою* (22), *число* $\gamma = pn/2$, $\widehat{\psi} = \psi\psi_1\psi_2$, *де* ψ_1 *і* ψ_2 *належать множині* $\mathcal{M}$ *і* $\omega_1(2/(n-1)) < \infty$, $\omega_2(2) < \infty$, *а функції* $\omega_j(r)$ *визначені рівністю* (1), *параметр* μ *належить множині* $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, *міра якої задається нерівністю* (24). *Тоді у разі, коли* $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$ *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2p}$*) векторів* $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5), (3) *з простору* $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (3).

Доведення. За теоремою 3 для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ виконується оцінка (16) для $\eta_1 = p(n-1)/2$ та $\tilde{\psi}_1 = \psi_1$. Згідно з теоремою 4 для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ виконується оцінка (17) для $\eta_2 = p/2$ та $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$. Таким чином, з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (5), (3) з простору $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$. А з існування розв'язку задачі (5), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\Psi_\varepsilon$.

Теорему доведено.

4. Дослідження задачі для неоднорідного рівняння

Побудуємо розв'язок задачі для неоднорідного диференціально-операторного рівняння (2) з однорідними нелокальними умовами

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{30}$$

та встановимо умови її однозначної розв'язності у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Розв'язок задачі (2), (30) шукаємо у вигляді ряду (6), де коефіцієнти $u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (6) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ є розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = f_k(t), \tag{31}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{32}$$

де $f_k(t)$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(t, z)$.

Розв'язок задачі (31), (32) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ можна записати так:

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \tag{33}$$

де $G_k(t, \tau)$ — функція Гріна задачі (7), (32).

Функція Гріна $G_k(t, \tau)$ існує тоді і тільки тоді, коли задача (7), (32) має лише тривіальний розв'язок, тобто виконується $\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} \neq 0$. В умовах теореми 1 задача (2), (30) може мати не більше одного розв'язку для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$.

На основі формул (6), (33) одержимо зображення розв'язку задачі (2), (30) у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} z^k \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau. \tag{34}$$

Для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ у квадраті $K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq \tau \leq T\}$ функції $G_k(t,\tau)$ визначаються формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}(\mu + e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}{\prod\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, \tag{35}$$

$$g_k(t,\tau) = \frac{\mathrm{sgn}(t-\tau)}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))}. \tag{36}$$

Враховуючи (36), перепишемо формулу (35) у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))} \left(\mathrm{sgn}(t-\tau) + \frac{\mu + e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}} \right).$$

Позначимо $\Delta_j(k) = \prod\limits_{\substack{1 \leq r < q \leq n \\ q,r \neq j}} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))$, тоді функція Гріна запишеться наступним чином:

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{\Delta\ \tilde{k}^{n-1}} \begin{cases} \mu \sum\limits_{j=1}^n \Delta_j(k)\ \rho(\lambda_j(k), t-\tau), & \text{при } t > \tau; \\ \sum\limits_{j=1}^n \Delta_j(k)\ \rho(\lambda_j(k), t+T-\tau), & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Знайдемо похідну по t порядку r функції Гріна, $r = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r} = \frac{\tilde{k}^{r-n+1}}{\Delta} \begin{cases} \mu \sum\limits_{j=1}^n \Delta_j(k) \lambda_j^r(k)\ \rho(\lambda_j(k), t-\tau), & \text{при } t > \tau; \\ \sum\limits_{j=1}^n \Delta_j(k) \lambda_j^r(k)\ \rho(\lambda_j(k), t+T-\tau), & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta_j(k)$ — визначники $\Delta_{j,n-1}(k)$ порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то

$$\Delta_j(k) \leq (n-1)! A_1^{(n-1)(n-2)/2}. \tag{37}$$

Враховуючи нерівності (9) та (37), отримаємо наступні оцінки:

$$\left|\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r}\right| \leq \frac{C_6 \tilde{k}^{r-n+1}}{\Delta} \begin{cases} M \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(\lambda_j(k), t-\tau), & \text{при } t > \tau; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(\lambda_j(k), t+T-\tau), & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

де $C_6 = (n-1)! A_1^{(n-1)(n-2)/2+r}$.

Із нерівностей (16), (17) та теорем 3 і 4 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ та параметра нелокальних умов $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r}\right| \leq C_7 \psi_1(\tilde{k}) \psi_2(\tilde{k}) \tilde{k}^{\sigma+r+1}, \tag{38}$$

де C_7 — стала величина і $\sigma = pn/2 - n$.

З формули (33) та нерівності (38) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ отримаємо

$$|u_k^{(r)}(t)| \leq C_7 \psi_1(\tilde{k}) \psi_2(\tilde{k}) \tilde{k}^{\sigma+r} T \max_t |f_k(t)|, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{39}$$

і теорему існування та єдиності розв'язку задачі (2), (30) у $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 6. *Нехай $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ і $f \in \mathbf{H}_{q+\sigma}^{0\widehat{\psi}}(\mathcal{D}^p)$, де $\sigma = pn/2 - n$, $\widehat{\psi} = \psi\psi_1\psi_2$, ψ_1 і ψ_2 належать множині $\mathcal{M}$ і $\omega_1(2/(n-1)) < \infty$, $\omega_2(2) < \infty$, а функції $\omega_j(r)$ визначені формулою (1), множина $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ задається рівністю (22), а міра множини $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ визначається нерівністю (24). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ існує єдиний розв'язок задачі (2), (30) з простору $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від функції f.*

Доведення. З нерівності (39) для кожного $r = 0, 1, \ldots, n-1$ та вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ одержимо

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq C_7^2 \psi_1^2(\tilde{k}) \psi_2^2(\tilde{k}) \tilde{k}^{2\sigma+2r} T^2 \max_t |f_k(t)|^2. \tag{40}$$

Запишемо оцінку для квадрату похідної n-ого порядку функції $u_k(t)$ при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$

$$
\begin{aligned}
&|u_k^{(n)}(t)|^2 \leq |f_k(t)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\tilde{b}_j(k)|^2 |u_k^{(n-j)}(t)|^2 \leq \\
&\leq |f_k(t)|^2 + C_8 \psi_1^2(\tilde{k}) \psi_2^2(\tilde{k}) \tilde{k}^{2\sigma+2n} \max_t |f_k(t)|^2,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

де C_8 — стала величина; тоді з формул (34), (40) і (41) отримаємо

$$
\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)} \leq C_9 \|f\|^2_{\mathbf{H}_{q+\sigma}^{0\widehat{\psi}}(\mathcal{D}^p)},
$$

де величина $C_9 > 0$ не залежить від функції f, але залежить від коефіцієнтів рівняння (2) та параметра μ. З умови $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ випливає єдиність розв'язку задачі (2), (30) у просторі $\mathbf{W}'$. Тому з існування розв'язку у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність на множині $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, звідки і слідує твердження теореми.

Теорему доведено.

5. Умови однозначної розв'язності задачі (2), (3)

Повернемося до побудови розв'язку задачі (2), (3) та встановлення умов її розв'язності у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$. У формулі (4) для розв'язку даної задачі, функції $v = v(t,z)$ (розв'язок задачі (5), (3)) і $w = w(t,z)$ (розв'язок задачі (2), (30)) зображаються формулами (14) та (34) відповідно.

Сформулюємо і доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (2), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 7. *Нехай $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, $f \in \mathbf{H}_{q+\sigma}^{0\widehat{\psi}}(\mathcal{D}^p)$, $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1+\gamma}^{\widehat{\psi}}(\mathcal{S}^p)$, де $\sigma = pn/2-n$, $\gamma = pn/2$, $\widehat{\psi} = \psi\psi_1\psi_2$, ψ_1 і ψ_2 належать множині $\mathcal{M}$ і $\omega_1(2/(n-1))<\infty$, $\omega_2(2)<\infty$, а функції $\omega_j(r)$ визначені формулою (1), множина $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ задається рівністю (22), а міра множини $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ визначається нерівністю (24). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^p$ існує єдиний розв'язок задачі (2), (3) з простору $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від функцій φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_{n-1} і f.*

Доведення. Оскільки для розв'язку $u(t,z)$ задачі (2), (3) виконується рівність (4), то $\|u\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2$, тоді

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)} \leq C_{10}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}^{\widehat{\psi}}_{\gamma-j}(\mathcal{S}^p)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^{0\widehat{\psi}}_{q+\sigma}(\mathcal{D}^p)}\Big),$$

де $C_{10} > 0$ — величина, яка не залежить від функції f, але залежить від коефіцієнтів рівняння (2) та параметра нелокальних умов μ. Так як до множини $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ належать всі розв'язки рівняння (2), то з умови $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ та існування розв'язку задачі (2), (3) у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність на множині $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Теорему доведено.

6. Висновки

У роботі розглянуто крайову задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння з частинними похідними у гільбертових просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу. Для встановлення умов розв'язності задачі введено шкали $\{\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ і $\{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ просторів вектор-функцій багатьох комплексних змінних. Побудовано формули для розв'язку розглядуваної задачі та проведено аналіз малих знаменників, який ґрунтується на метричному підході. Встановлено необхідні і достатні умови єдиності та достатні умови існування розв'язку у просторі $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ з довільним дійсним числом q та повільно змінною функцією ψ.

Література

[1] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 370 с.

[2] *Зинченко Т.Н., Мурач А.А.* Эллиптические по Дуглису-Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477–1491.

[3] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с. (Переклад англомовного видавництва: Berlin, Springer–Verlag, 1963.)

[4] *Ільків В.С.* Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів. // Наук. вісник Ужгородського університету. – 2010. – Вип. **4**. – С. 72–85.

[5] *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич І.В.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 17–26.

[6] *Пташник Б.Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.

[7] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Киев: Наукова думка, 2002. – 416 с.

[8] *Ільків В.С., Страп Н.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Математика і інформатика. – 2013. – Вип. **24**, № 1. – С. 60–72.

[9] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.

[10] *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. – Москва: Мир, 1976. – 624 с.

[11] *Берник В.И., Пташник Б.Й., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

[12] *Ільків В.С., Магеровська Т.В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісник Нац. університету „Львівська Політехніка“. Фізико-математичні науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.

[13] *Ilkiv V.S., Maherovska T.V.*. Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high–order constant–sign derivative // Mat. Stud. – 2010. – **34**. – P. 57—64.