

УДК 517.5

Н. В. Дерев'янку (Ін-т математики НАН України, Київ)

**ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ H_p^Ω
 ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ
 У ПРОСТОРИ L_q**

Obtained here are the order estimates of linear widths of the classes H_p^Ω of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 < p \leq 2$, $\frac{p}{(p-1)} < q < \infty$ and $2 \leq p < q < \infty$.

Отримано порядкові оцінки лінійних поперечників класів H_p^Ω періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 < p \leq 2$, $\frac{p}{(p-1)} < q < \infty$ та $2 \leq p < q < \infty$.

У роботі досліджується поведінка лінійних поперечників класів H_p^Ω в просторі L_q у випадках $1 < p \leq 2$, $\frac{p}{(p-1)} < q < \infty$ і $2 \leq p < q < \infty$. Детальніше про це мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо основні позначення та означення.

Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, — d -вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_dy_d$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$, — простір 2π -періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p , $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

У роботі будемо розглядати лише функції $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Далі для зручностей позначень замість $L_p(\pi_d)$ будемо писати L_p .

Для $f \in L_p$ і $h, x \in \mathbb{R}^d$ означимо змішану різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ за формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)) \dots),$$

де

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Позначимо

$$\mathbb{R}_+^d = \{t \in \mathbb{R}^d : t_j \geq 0, j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p$ і $t \in \mathbb{R}_+^d$ означимо змішаний модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h_j| \leq t_j, j = \overline{1, d}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — функція типу змішаного модуля неперервності порядку l , тобто функція визначена на \mathbb{R}_+^d , що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0, t_j > 0, j = \overline{1, d}$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0, j = \overline{1, d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних $t_i, i \neq j$;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t), m_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0, j = \overline{1, d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l .

Для заданої функції $\Omega \in \Psi_l$ означимо клас функцій $H_p^\Omega, 1 \leq p \leq \infty$, наступним чином [1]:

$$H_p^\Omega = \left\{ f \in L_p : \Omega_l(f, t)_p \leq C_1 \Omega(t), C_1 > 0 \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку коли $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, і $\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$ класи H_p^Ω збігаються з відомими класами Нікольського H_p^α [2].

Також будемо вважати, що Ω належить до множин S^α і S_l .

Будемо говорити, що функція однієї змінної $\varphi \geq 0$ належить до множини S^α , $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\varphi \geq 0$ належить до множини S_l , якщо існує таке γ , $0 < \gamma < l$, що функція $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Умови належності функції φ до множин S^α і S_l називають умовами Барі-Стєчка [3].

Будемо вважати, що $\Omega \in S^\alpha$ ($\Omega \in S_l$), якщо $\Omega(t_1, \dots, t_d)$ як функція змінної t_j , $j = \overline{1, d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних t_i , $i \neq j$, належить до множини S^α (відповідно до множини S_l). Позначимо $\Phi_{\alpha, l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

У роботі будемо розглядати класи H_p^Ω з функцією Ω спеціального вигляду. Нехай ω — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка належить до множин S^α та S_l . Покладемо

$$\Omega(\mathbf{t}) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Зрозуміло, що таким чином задана функція Ω буде належати до множини $\Phi_{\alpha, l}$.

Надалі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи $C_4, C_5 > 0$ такі, що $C_4 A \leq B \leq C_5 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають, що $C_6 A \leq B$

і $B \leq C_7 A$, $C_6, C_7 > 0$, відповідно. Всі константи C_i , $i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору \mathbb{R}^d . Через $|\mathcal{N}|$ будемо позначати кількість елементів множини \mathcal{N} .

Для $s \in \mathbb{N}^d$ через $\rho(s)$ позначимо підмножину цілочислової решітки \mathbb{Z}^d вигляду

$$\rho(s) = \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}.$$

Покладемо для $f \in L_1$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f .

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt$$

і для функції $f \in L_p$, і вектора $s \in \mathbb{N}^d$ розглянемо оператор виду

$$A_s(f) = f * \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}} - V_{2^{s_j-1}}),$$

де " * " — операція згортки.

У роботі [1] доведено теорему про належність функції до класу H_p^Ω .

Теорема А. Нехай $\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha, l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$.

Функція f належить класу H_p^Ω тоді і тільки тоді, коли виконуються порядкові нерівності.

$$\|\delta_s(f)\|_p \ll \omega(2^{-(s,1)}), \quad 1 < p < \infty, \quad (1)$$

$$\|A_s(f)\|_p \ll \omega(2^{-(s,1)}), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$de(s, 1) = s_1 + \dots + s_d.$$

Перейдемо тепер до означення досліджуваної апроксимативної характеристики.

Нехай W — центрально-симетрична множина в банаховому просторі X , $\text{Lin}_m(X)$ — множина всіх лінійних підпросторів простору X , розмірність яких не більша ніж m , $\mathcal{L}(X, X_m)$ — множина лінійних операторів, які відображають весь простір X у його підпростір $X_m \in \text{Lin}_m(X)$. Тоді лінійний поперечник множини W у просторі X означається згідно з формулою

$$\lambda_m(W, X) = \inf_{X_m \in \text{Lin}_m(X)} \inf_{A \in \mathcal{L}(X, X_m)} \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X.$$

Поняття лінійного поперечника було введено В. М. Тихомировим у 1960 р. [4]. Дослідженням лінійних поперечників для класів функцій однієї змінної займалися Р. С. Ісмагілов [5], В. Е. Майоров [6, 7], В. М. Тихомиров (див., наприклад, [8]), М. П. Корнейчук (див., наприклад, [9]). З історією дослідження лінійних поперечників тих або інших класів функцій багатьох змінних можна ознайомитися в роботах Е. М. Галєєва [10, 11] та А. С. Романюка [12–14] (див. також монографію [15]), в яких також міститься детальна бібліографія.

При одержанні оцінок низу лінійних поперечників класів H_p^Ω будемо користуватися відомими оцінками колмогоровських поперечників дискретних множин. Нагадаємо, що колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W банахового простору X називається величина [16]

$$d_m(W, X) = \inf_{X_m \in \text{Lin}_m(X)} \sup_{x \in W} \inf_{u \in X_m} \|x - u\|_X.$$

Легко бачити, що згідно з означеннями лінійного і колмогоровського поперечників має місце нерівність

$$d_m(W, X) \leq \lambda_m(W, X). \quad (2)$$

Перед формулюванням основних результатів наведемо твердження, які будемо використовувати при їх доведенні.

Нехай l_p^n означає простір всеможливих упорядкованих систем з n дійсних чисел, норма в якому означається таким чином

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & p = \infty, \end{cases}$$

і $B_p^n = \{x : \|x\|_{l_p^n} \leq 1\}$ — одинична куля в цьому просторі.

Теорема Б [17]. *Нехай $m < n$, $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Тоді*

$$\lambda_m(B_p^n, l_q^n) \asymp \max \left\{ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min\{1, n^{\frac{1}{q}} m^{-\frac{1}{2}}\} \sqrt{1 - \frac{m}{n}} \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1$, $q > 2$ відповідний до теореми Б результат випливає із твердження про колмогоровський поперечник октаедра B_1^n в просторі l_q^n , встановленого Б.С. Кашиним [18].

Через $\mathcal{T}(\rho(s))$ позначимо множину функцій f вигляду

$$f(x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,x)},$$

де c_k — довільні числа.

Теорема В [19]. *Між простором тригонометричних поліномів $\mathcal{T}(\rho(s))$ і простором $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції $f \in \mathcal{T}(\rho(s))$ вектор $\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$*

$$f_n(t) = \sum_{\text{sign } k_l = n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = \overline{1, d}, \quad n = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, 2, \dots, 2^{s_i-1}, \quad i = \overline{1, d},$$

і при цьому має місце співвідношення

$$\|f(\cdot)\|_p \asymp 2^{-(s,1)/p} \|\delta_s f^j\|_{l_p^{2^{(s,1)}}}, \quad p \in (1, \infty).$$

При $d = 1$ теорема В є відомою теоремою Марцинкевича–Зигмунда про дискретизацію [20, с. 46].

Теорема Г (Літгльвуда-Пелі) [21]. *Нехай $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. Тоді існують додатні сталі C_8 і C_9 такі, що*

$$C_8 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_9 \|f\|_p.$$

Як наслідок, з означення лінійного поперечника, теореми В і теореми Літгльвуда–Пелі у роботі [10] отримано наступне твердження.

Лема А. *Нехай $s \in \mathbb{N}^d$ і $f \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $m_s \in \mathbb{Z}_+$, $m_s \leq 2^{(s,1)}$. Якщо $1 < p, q < \infty$, то існує лінійний оператор $\Lambda_{m_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \rightarrow \mathcal{T}(\rho(s))$, розмірність області значень якого не перевищує m_s , і такий, що*

$$\|f - \Lambda_{m_s} f\|_q \asymp \lambda_{m_s} \left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}} \right) 2^{(s,1)(1/p-1/q)} \|f\|_p.$$

Лема Б [22, с. 25]. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p$. Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f, \cdot)\|_p 2^{(s,1)(1/p-1/q)} \right)^q.$$

Лема В [10]. *Нехай $1 < q < \infty$, $q_1 = \max\{q, 2\}$, $q_2 = \min\{q, 2\}$. Тоді*

$$\left(\sum_s \|\delta_s(f, \cdot)\|_q^{q_1} \right)^{1/q_1} \ll \left\| \sum_s \delta_s(f, \cdot) \right\|_q \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, \cdot)\|_q^{q_2} \right)^{1/q_2}.$$

Теорема Д [2]. *Нехай $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, і*

$$t(\mathbf{x}) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, \mathbf{x})}.$$

Тоді при $1 \leq q < p \leq \infty$ виконується нерівність

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q. \quad (3)$$

Нерівність (3) доведена С. М. Нікольським і має назву "нерівність різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [23].

Нехай знову X — банаховий простір і A — деяка підмножина цього простору. Полярною множини $A \subset X$ будемо називати наступну множину у спряженому просторі X^* :

$$A^\circ = \{x^* \in X^* : |\langle x, x^* \rangle| \leq 1, \forall x \in X\},$$

де $\langle x, x^* \rangle$ — значення лінійного функціоналу x^* на елементі x .

Теорема Е [5]. *Нехай BX і BY — одиничні кулі в банахових просторах X і Y відповідно, $(BX)^\circ$, $(BY)^\circ$ — полярні цих множин, а простір Y^* вкладений в простір X . Тоді*

$$\lambda_m((BY)^\circ, X) = \lambda_m((BX)^\circ, Y).$$

Зауважимо, якщо X — нормований простір (не банаховий), то означення полярні і теорема Е мають дещо інший вигляд. Більш детально з цими питаннями можна ознайомитися у роботах [5, 24].

Через $l_{p,q}^{n,m}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, будемо позначати нормований простір елементів з простору \mathbb{R}^{nm} , норма в якому означається наступним чином

$$\|x\|_{l_{p,q}^{n,m}} = \begin{cases} \left(\sum_{s=1}^m \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, & 1 \leq p, q < \infty, \\ \max_{1 \leq s \leq m} \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

де $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} : (s-1)n < k \leq sn\}$, $s = \overline{1, m}$. Відповідно, $B_{p,q}^{n,m} = \{x : \|x\|_{l_{p,q}^{n,m}} \leq 1\}$ — одинична куля в просторі $l_{p,q}^{n,m}$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_{l_{p,p}^{n,m}} \equiv \|\cdot\|_{l_p^{nm}}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема Ж [25]. *Нехай $N \leq \frac{mn}{2}$. Тоді існує додатна стала C_{10} така, що справедливі нерівності*

$$C_{10} m \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \leq d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,1}^{n,m}) \leq m.$$

Тут і далі під \log будемо розуміти логарифм за основою 2.

Сформулюємо і доведемо основні результати.

Теорема 1. *Нехай $1 < p \leq 2$, $p' < q < \infty$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а функція $\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha, l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}} &\ll \lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \ll \\ &\ll \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Задамо $M \in \mathbb{N}$ і підберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалася умова $2^m m^{d-1} \asymp M$.

Для $s \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$m_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s,1) \leq m, \\ [2^{m+\theta(m-(s,1))}], & (s,1) > m, \end{cases}$$

де $\theta > 0$ — довільне достатньо мале число, значення якого ми уточнимо пізніше.

Покажемо, що $\sum_{s \in \mathbb{N}^d} m_s \ll M$. Справді

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{N}^d} m_s &\leq \sum_{(s,1) \leq m} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,1) > m} 2^{m+\theta(m-(s,1))} = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{(s,1)=j} 2^{(s,1)} + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} \sum_{(s,1)=j} 2^{-\theta(s,1)} = \\ &= \sum_{j=1}^m 2^j \sum_{(s,1)=j} 1 + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} 2^{-\theta j} \sum_{(s,1)=j} 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{(s,1)=j} 1 \asymp j^{d-1}, \quad (6)$$

з (5) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{N}^d} m_s &\ll \sum_{j=1}^m 2^j j^{d-1} + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} 2^{-\theta j} j^{d-1} \ll \\ &\ll 2^m m^{d-1} + 2^{m+\theta m} 2^{-\theta m} m^{d-1} \asymp 2^m m^{d-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Через Λ_M позначимо лінійний оператор рангу M , який діє на $f \in H_p^\Omega$ згідно з формулою

$$\Lambda_M f = \sum_s \Lambda_{m_s} \delta_s(f),$$

де оператори Λ_{m_s} визначені згідно з лемою А.

Оцінимо далі норму $\|f - \Lambda_M f\|_q$. Оскільки за умовою $p' < q$, то згідно з лемою Б будемо мати

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_M f\|_q &\ll \\ &\ll \left(\sum_{(s,1)>m} \left(\|\delta_s(f) - \Lambda_{m_s} \delta_s(f)\|_{p'} 2^{(s,1)(1/p'-1/q)} \right)^q \right)^{1/q}. \quad (7) \end{aligned}$$

Послідовно застосувавши до правої частини (7) лему А і співвідношення (1), отримаємо

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_M f\|_q &\ll \\ &\ll \left(\sum_{(s,1)>m} \left(2^{(s,1)(1/p-1/q)} \|\delta_s(f)\|_p \lambda_{m_s} \left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}} \right) \right)^q \right)^{1/q} \ll \\ &\ll \left(\sum_{(s,1)>m} \left(2^{(s,1)(1/p-1/q)} \omega(2^{-(s,1)}) \lambda_{m_s} \left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}} \right) \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{J}_1. \end{aligned}$$

Врахувавши, що згідно з теоремою Б при $m_s < 2^{(s,1)}$ має місце співвідношення

$$\lambda_{m_s} \left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}} \right) \asymp$$

$$\begin{aligned} & \asymp \max \left\{ 2^{(s,1)(1/p'-1/p)}, \min \{1, 2^{(s,1)/p'} m_s^{-1/2}\} \sqrt{1 - \frac{m_s}{2^{(s,1)}}} \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ 2^{(s,1)(1/p'-1/p)}, 2^{(s,1)/p'} m_s^{-1/2} \sqrt{1 - \frac{m_s}{2^{(s,1)}}} \right\} \ll 2^{(s,1)/p'} m_s^{-1/2}, \end{aligned}$$

продовжимо оцінку величини \mathcal{J}_1 таким чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 & \ll \left(\sum_{(s,1) > m} \left(2^{(s,1)(1/p-1/q)} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)/p'} m_s^{-1/2} \right)^q \right)^{1/q} = \\ & = \left(\sum_{(s,1) > m} \left(2^{(s,1)(1-1/q)} \omega(2^{-(s,1)}) m_s^{-1/2} \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{J}_2. \end{aligned}$$

Підставивши в \mathcal{J}_2 замість m_s їх значення, будемо мати

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 & \leq \left(\sum_{(s,1) > m} \left(2^{(s,1)(1-1/q)} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{-m/2-\theta/2(m-(s,1))} \right)^q \right)^{1/q} = \\ & = 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \left(\sum_{(s,1) > m} \left(2^{(s,1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-(s,1)\alpha}} \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{J}_3. \end{aligned}$$

Оскільки $\omega \in \Phi_{\alpha, l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, то при $(s, 1) > m$ буде виконуватись порядкова нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-(s,1)\alpha}} \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}.$$

Врахувавши останнє співвідношення, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 & \ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \left(\sum_{(s,1) > m} \left(2^{(s,1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \right)^q \right)^{1/q} = \\ & = 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \left(\sum_{j > m} \sum_{(s,1)=j} \left(2^{(s,1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \right)^q \right)^{1/q} = \end{aligned}$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \left(\sum_{j>m} 2^{jq(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)^{1/q}.$$

З огляду на порядкове співвідношення (6), будемо мати

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \left(\sum_{j>m} 2^{jq(1-1/q+\theta/2-\alpha)} j^{d-1} \right)^{1/q}.$$

Далі, підбравши $\theta > 0$ з умови $\frac{\theta}{2} < \alpha + \frac{1}{q} - 1$ (це завжди можливо зробити, тому що $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$), завершуємо оцінку норми

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_M f\|_q &\ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} 2^{m(1-1/q+\theta/2-\alpha)} m^{\frac{d-1}{q}} = \\ &= \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}}, \end{aligned}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Звідси, внаслідок означення лінійного поперечника, отримаємо оцінку зверху в (4).

Перейдемо тепер до встановлення оцінки знизу. Для $M \in \mathbb{N}$ виберемо число $m \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалося співвідношення $2^m m^{d-1} \asymp M$ і кількість елементів множини $Q_m = \bigcup_{s \in S} \rho(s)$, де

$S = \{s \in \mathbb{N}^d : (s, 1) = m\}$, була не менша ніж $2M$.

Позначимо через \mathcal{T}_m множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік з Q_m і нехай P_m оператор ортогонального проектування на цю множину. Тоді згідно з означенням лінійного поперечника

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \geq \lambda_M(H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m, L_q). \quad (8)$$

З іншого боку, для $t \in \mathcal{T}_m$

$$\|f - t\|_q \geq \|P_m(f - t)\|_q = \|P_m f - t\|_q. \quad (9)$$

Враховавши (8) і (9), отримаємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \geq \lambda_M(H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m, L_q \cap \mathcal{T}_m). \quad (10)$$

Зауважимо, що з теореми А отримаємо наступне: $f \in H_p^\Omega$ тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$\sup_s \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p \ll 1. \quad (11)$$

Візьмемо $f \in H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m$. Згідно з теоремою В, будемо мати

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in S} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p \asymp \\ & \asymp \sup_{s \in S} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) 2^{-(s,1)/p} \|\delta_s f^j\|_{l_p^{2^{(s,1)}}} = \\ & = \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{-m/p} \sup_{s \in S} \|\delta_s f^j\|_{l_p^{2^{(s,1)}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отже, згідно з (11) і (12) $f \in H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m$ тоді і тільки тоді коли

$$\sup_{s \in S} \|\delta_s f^j\|_{l_p^{2^{(s,1)}}} \ll \omega(2^{-m}) 2^{m/p}. \quad (13)$$

З іншої сторони для $g \in L_q \cap \mathcal{T}_m$, $q \geq 2$, на основі леми В і теореми В, будемо мати

$$\begin{aligned} \|g\|_q &= \left\| \sum_{s \in S} \delta_s(g) \right\|_q \gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(g)\|_q^q \right)^{1/q} \asymp \\ & \asymp \left(\sum_{s \in S} \left(2^{-(s,1)/q} \|\delta_s g^j\|_{l_q^{2^{(s,1)}}} \right)^q \right)^{1/q} = \\ & = 2^{-m/q} \left(\sum_{s \in S} \left(\|\delta_s g^j\|_{l_q^{2^{(s,1)}}} \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, врахувавши (10), (13) і (14), отримаємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \gg \omega(2^{-m}) 2^{m(1/p-1/q)} \lambda_M(B_{p,\infty}^{2^m|S|}, l_q^{2^m|S|}). \quad (15)$$

Далі нам знадобляться деякі співвідношення. З нерівності про середнє степеневе отримуємо

$$\|\cdot\|_{l_p^{2^m}} \leq \|\cdot\|_{l_2^{2^m}} 2^{m(1/p-1/2)}, \quad p \leq 2.$$

Звідси при $p \leq 2$ має місце вкладення

$$B_p^{2^m} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_2^{2^m},$$

а, отже, і вкладення

$$B_{p,\infty}^{2^m,|S|} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_{2,\infty}^{2^m,|S|}. \quad (16)$$

З іншого боку, знову ж таки за нерівністю про середнє степеневе, будемо мати

$$\|\cdot\|_{l_q^{|S|}} \geq \|\cdot\|_{l_1^{|S|}} |S|^{1/q-1}, \quad q \geq 1.$$

Врахувавши також, що при $q \leq \infty$

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^m}} \geq \|\cdot\|_{l_\infty^{2^m}},$$

отримаємо

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^m|S|}} \geq \|\cdot\|_{l_{\infty,1}^{2^m,|S|}} |S|^{1/q-1}. \quad (17)$$

Беручи до уваги відомі співвідношення

$$\left(l_{2,1}^{2^m,|S|}\right)^* = l_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \quad \left(l_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right)^* \supseteq l_{1,\infty}^{2^m,|S|}, \quad (18)$$

згідно з означенням поляри множини будемо мати

$$\left(B_{2,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ = B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \quad \left(B_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ \supseteq B_{1,\infty}^{2^m,|S|}. \quad (19)$$

З (18), (19), теореми Е та означення лінійного поперечника отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_m \left(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, l_{\infty,1}^{2^m,|S|} \right) &= \lambda_m \left(\left(B_{2,1}^{2^m,|S|} \right)^\circ, l_{\infty,1}^{2^m,|S|} \right) = \\ &= \lambda_m \left(\left(B_{\infty,1}^{2^m,|S|} \right)^\circ, l_{2,1}^{2^m,|S|} \right) \geq \lambda_m \left(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

З огляду на (15)–(17) та (20) одержуємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \gg \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} |S|^{1/q-1} \lambda_m \left(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, l_{\infty,1}^{2^m,|S|} \right) \geq$$

$$\geq \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}\lambda_m\left(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}\right). \quad (21)$$

Нарешті, скориставшись послідовно нерівністю (2) та теоремою Ж, на основі (21) будемо мати

$$\begin{aligned} \lambda_M(H_p^\Omega, L_q) &\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}d_m\left(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}\right) \gg \\ &\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}|S|\frac{\sqrt{\log \log |S|}}{\log |S|} = \\ &= \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q}\frac{\sqrt{\log \log |S|}}{\log |S|} \asymp \\ &\asymp \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}\frac{\sqrt{\log \log m^{d-1}}}{\log m^{d-1}} \gg \\ &\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}\frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m}, \end{aligned}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $2 \leq p < q < \infty$, а функція $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$,

де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді має місце рядкове співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m}\omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}} &\ll \lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \ll \\ &\ll \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху в (22) випливає з оцінок наближення функцій з класів H_p^Ω їх східчасто гіперболічними сумами Фур'є [1].

Встановимо в (22) оцінку знизу. Нехай $f \in H_p^\Omega$, $2 \leq p < \infty$. З теореми Д будемо мати

$$\sup_s \omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f)\|_p \ll$$

$$\begin{aligned} & \ll \sup_s \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)(1/2-1/p)} \|\delta_s(f)\|_2 = \\ & = \sup_s \omega_1^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_2, \end{aligned}$$

де $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{1/2-1/p}$ — функція з множини $\Phi_{\alpha_1, l+1}$, $\alpha_1 = \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

Звідси і з співвідношення (11) має місце вкладення

$$H_p^\Omega \supset H_2^{\Omega_1}, \quad (23)$$

де $\Omega_1(t) = \omega_1\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$.

Оскільки оцінка знизу в теоремі 1 є справедливою і для $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то з (4), (23) і означення лінійного поперечника при $2 \leq p < q < \infty$ будемо мати

$$\begin{aligned} \lambda_M(H_p^\Omega, L_q) & \geq \lambda_M(H_2^{\Omega_1}, L_q) \gg \\ & \gg \omega(2^{-m}) 2^{-m(1/2-1/p)} 2^{m(1/2-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}} \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} = \\ & = \omega(2^{-m}) 2^{m(1/p-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}} \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m}, \end{aligned}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Таким чином, теорему 2 доведено.

Якщо при оцінці знизу в теоремі 1 покласти $d = 1$, то $|S| = 1$, а тому

$$\lambda_M(B_{1,\infty}^{2^m, |S|}, l_{2,1}^{2^m, |S|}) = \lambda_M(B_1^{2^m}, l_2^{2^m}) \asymp 1.$$

Отже, в одновимірному випадку у (4), а, відповідно, і у (22) будуть мати місце точні за порядком оцінки:

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-1}) M^{1/2-1/q}, & 1 < p \leq 2, p' < q < \infty, \\ \Omega(M^{-1}) M^{1/p-1/q}, & 2 \leq p < q < \infty. \end{cases} \quad (24)$$

Співвідношення (24) встановлені у роботі [26].

Зауваження 1. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, то відповідні твердження до теорем 1 і 2 встановлено у роботі [11].

Зауваження 2. Теореми 1 і 2 доповнюють результати роботи [27], в якій встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega \subset B_{p,\infty}^\Omega \equiv H_p^\Omega$ у просторі L_q при $2 \leq \theta \leq q$.

1. Пустовойтов Н. Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // *Anal. Math.* — 1994. — **20**, № 1. — С. 35–48.
2. Никольский С. М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // *Сиб. мат. журн.* — 1963. — **4**, № 6. — С. 1342–1364.
3. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // *Тр. Моск. мат. о-ва.* — 1956. — **5**. — С. 483–522.
4. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // *Успехи мат. наук.* — 1960. — **15**, № 3. — С. 81–120.
5. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // *Успехи мат. наук.* — 1974. — **29**, № 3. — С. 161–178.
6. Майоров В. Е. Тригонометрические n -поперечники класса W_1^r в пространстве L_q // *Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах.* — М.: ЦЭМИ — 1976. — С. 199–208.
7. Майоров В. Е. О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // *Мат. сб.* — 1980. — **113**, № 3. — С. 437–463.
8. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Москов. гос. ун-т, 1976. — 304 с.
9. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
10. Галеев Э. М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // *Вестник МГУ, Сер. 1, Мат., Мех.* — 1987. — № 4. — С. 13–16.
11. Галеев Э. М. Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных // *Мат. заметки.* — 1996. — **59**, № 2. — С. 189–199.

12. Романюк А. С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 5. — С. 647–661.
13. Романюк А. С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 6. — С. 820–829.
14. Романюк А. С. Поперечники и наилучшее приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, № 3. — С. 181–213.
15. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.
16. Kolmogoroff A. Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse // Ann. of Math. — 1963. — **37**, № 1. — С. 107–110.
17. Глускин Е. Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — **120**, № 2. — С. 180–189.
18. Кашири Б. С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1980. — **15**, № 5. — С. 379–394.
19. Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных \widetilde{W}_p^{α} и \widetilde{H}_p^{α} в пространстве \widetilde{L}_q // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — **49**, № 5. — С. 916–934.
20. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2 т.— М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
21. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969. — 480 с.
22. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 3–113.
23. Jackson D. Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, № 12. — P. 889–906.
24. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — **23**, № 6. — С. 51–116.
25. Изаак А. Д. Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. — 1994. — **55**, № 1. — С. 4–52.
26. Конограй А. Ф. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 1. — С. 94–112.
27. Федунік О. В. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 1. — С. 93–104.