Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 182-188

УДК 517.5

І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)

МАЖОРАНТИ ЗАЛИШКІВ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ОБМЕЖЕНИХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

We study the behavior on the interval $[0,1]$ *of the majorant* R_n *of the* $n-$*remainders of Taylor's series for bounded holomorphic functions in the unit disk* $\mathbb{D}$. *An extremal problem of finding the* $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, *for functions from such class is solved.*

Досліджено поведінку на відрізку $[0,1]$ *мажоранти* R_n *залишків рядів Тейлора порядку* $n, n\in\mathbb{N}$, *обмежених голоморфних функцій в одиничному крузі* $\mathbb{D}$ *і розв'язано екстремальну задачу про обчислення величини* $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, *на даному класі функцій.*

1. Нехай $\mathcal{B}$ — клас функцій f, голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{D} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| \le 1$ і $S_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$ — частинна сума порядку $n, n \in \mathbb{N}$, ряду Тейлора функції f.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо функцію R_n визначену на відрізку $[0,1]$ згідно з правилом

$$R_n(\rho) := \begin{cases} \sup\big\{|f(\rho) - S_n(f)(\rho)| : f \in \mathcal{B}\big\}, & \rho \in [0,1), \\ \sup\big\{|f(z) - S_{n-1}(f)(z)| : f \in \mathcal{B},\ z \in \mathbb{D}\big\}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Функція R_n є мажорантою залишків рядів Тейлора функцій класу $\mathcal{B}$, тобто для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$|f(z) - S_n(f)(z)| \le R_n(|z|), \quad \forall\ f \in \mathcal{B}.$$

Справді, для будь-якої функції $f \in \mathcal{B}$

$$|f(z) - S_n(f)(z)| \le \sup\big\{|f(t) - S_n(f)(t)| : f \in \mathcal{B},\ |t| = |z|\big\}.$$

Оскільки клас $\mathcal{B}$ є інваріантним відносно повороту змінної, тобто з того, що $f \in \mathcal{B}$ випливає, що $f(e^{i\theta}\cdot) \in \mathcal{B}$ для будь-якого $\theta \in [0, 2\pi]$, права частина останньої нерівності збігається з $R_n(|z|)$.

В [1] показано, що

$$\rho^{-n} R_n(\rho) = \rho + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 \rho^{2k} + \varepsilon_n(\rho), \tag{1}$$

де $\varepsilon_n(\rho)$ — деяка величина, що $|\varepsilon_n(\rho)| \le 1$, а сума при $n = 1$ покладається рівною нулю.

У зв'язку з цим результатом цікавим видається питання про те, як поводяться на відрізку $[0, 1]$ функції $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ і $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$.

Теорема 1. *Функція* $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ *зростає на* $[0, 1]$*, причому* $1 < \rho^{-n} R_n(\rho)\ \forall\ \rho \in (0, 1]$.

Наслідок. *Функція* $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$*, де* $\varepsilon_n(\rho)$ *визначається співвідношенням* (1)*, є функцією обмеженої варіації на* $[0, 1]$*, причому* $\lim_{\rho \to 0+} \varepsilon_n(\rho) = 1$.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{B}$. Зафіксуємо довільне $\rho \in (0, 1)$ і розглянемо функцію

$$F(z) = f(\rho z) - S_n(f)(\rho z).$$

Оскільки $\widehat{F}_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і $\sup_{z \in \mathbb{D}} |F(z)| \le R_n(\rho)$, то за лемою Шварца (див., наприклад, [2, с. 30])

$$|f(\rho\lambda) - S_n(f)(\rho\lambda)| = |F(\lambda)| \le \lambda^n R_n(\rho) \quad \forall\ \lambda \in [0, 1].$$

З другого боку,

$$\sup \big\{ |f(\rho\lambda) - S_n(f)(\rho\lambda)| : f \in \mathcal{B} \big\} = R_n(\rho\lambda).$$

Отже, має виконуватися нерівність $R_n(\rho\lambda) \le \lambda^n R_n(\rho)$, або, що рівносильно,

$$\rho_1^{-n} R_n(\rho_1) \le \rho_2^{-n} R_n(\rho_2), \quad 0 < \rho_1 \le \rho_2 \le 1.$$

Переконаємося в тому, що $1 < R_n(\rho)\rho^{-n}\ \forall\ \rho \in (0, 1]$.

В [3] показано, що лінійний метод наближення U_n, який будується згідно з правилом

$$U_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \rho^{2(n-k)}\right) \widehat{f}_k z^k,$$

є єдиним найкращим лінійним методом наближення на колі $\mathbb{T}_\rho := \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\right\}$ у рівномірній метриці. Тобто для будь-яких комплексних чисел $\lambda_k \neq 1 - \rho^{2(n-k)}, k = \overline{0, n-1}$,

$$\mathcal{E}_n(\rho) := \max\left\{|f(z) - U_n(f)(z)| : f \in \mathcal{B},\ z \in \mathbb{T}_\rho\right\} <$$

$$< \max\left\{\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \widehat{f}_k z^k\right| : f \in \mathcal{B},\ z \in \mathbb{T}_\rho\right\},$$

і до того ж $\mathcal{E}_n(\rho) = \rho^n$.

Тому

$$\rho^n < \sup\left\{|f(z) - S_n(f)(z)| : f \in \mathcal{B},\ z \in \mathbb{T}_\rho\right\} = R_n(\rho).$$

Теорему доведено.

2. Нам відомо тільки про два випадки, коли функцію R_n вдалося подати в явному вигляді:

$$R_n(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, & n = 1, \\[2ex] \dfrac{2\rho^2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} + \dfrac{\rho^6}{4(1 + \sqrt{1 - \rho^2})^4}, & n = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Рівність (2) при $n = 1$ доведена в [4] і передоведена в [5] (без відповідного посилання на [4]), а при $n = 2$ — в [6].

Оскільки видання, в якому опублікована стаття [4] є важкодоступним, нам не вдалося побачити оригінальне доведення першої рівності в (2). У зв'язку з цим видається доцільним навести інше доведення, яке до того ж є відмінним і від [5].

Суть нашого методу доведення зводиться до розв'язання такої екстремальної задачі, не позбавленої й самостійного інтересу: *для даних* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *обчислити величину*

$$\Delta(z_1, z_2) := \max\big\{|f(z_1) - f(z_2)| : f \in \mathcal{B}\big\}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D},$$

і знайти функцію f*, для якої досягається максимум (таку функцію будемо називати екстремальною).*

Розв'язком цієї задачі є

Теорема 2. *Нехай* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*. Тоді*

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}. \tag{3}$$

При фіксованих $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *єдиною з точністю до унімодулярного множника екстремальною функцією в* (3) *є*

$$f(t) = \frac{\dfrac{t - z_2}{1 - t\overline{z}_2} - \alpha}{1 - \dfrac{t - z_2}{1 - t\overline{z}_2}\overline{\alpha}},$$

або

$$f(t) = \frac{\dfrac{t - z_1}{1 - t\overline{z}_1} - \beta}{1 - \dfrac{t - z_1}{1 - t\overline{z}_1}\overline{\beta}},$$

де

$$\alpha = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\frac{|1 - z_1\overline{z}_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}, \; \beta = -\alpha\frac{1 - z_1\overline{z}_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}.$$

Зауважимо, що з рівності (3) випливає добре відоме співвідношення [2, с. 30]: для будь-якої функції $f \in \mathcal{B}$

$$|f'(z)| = \Big|\lim_{z_2 \to z}\frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2}\Big| \le \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

в якому рівність при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ досягається для функції $f(t) = \omega(t - z)/(1 - t\overline{z})$, $|\omega| = 1$.

Зазначимо також, що рівність (3) можна знайти в [5]. Однак, наведене нижче доведення теореми 2 є конструктивнішим ніж у [5] в тому розумінні, що воно дає повний опис множини всіх екстремальних функцій. Наше доведення рівності (3) спирається на лему Шварца–Піка на відміну від [5], де ключовим моментом було використання теореми Ландау–Теплиця.

Доведення. Зафіксуємо довільне $z_2 \in \mathbb{D}$, візьмемо довільну функцію $f \in \mathcal{B}$ і розглянемо підклас $\mathcal{B}(f)$, який породжується функцією f і складається з функцій $g \in \mathcal{B}$ вигляду

$$g(t) = \frac{\dfrac{f(t) - f(z_2)}{1 - f(t)\overline{f(z_2)}} - \lambda}{1 - \dfrac{f(t) - f(z_2)}{1 - f(t)\overline{f(z_2)}}\overline{\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Для довільного фіксованого $z_1 \in \mathbb{D}$ покладемо

$$w := \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}}.$$

Тоді для будь-якої функції $g \in \mathcal{B}(f)$

$$|g(z_1) - g(z_2)| = \left| \frac{w - \lambda}{1 - w\overline{\lambda}} + \lambda \right| \leq$$

$$\leq |w| \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\lambda||w|} =: \mathcal{R}(|\lambda|) \leq \max\big\{\mathcal{R}(\rho) : \rho \in [0, 1]\big\}. \tag{4}$$

Дослідивши функцію $\mathcal{R}$ на екстремум на відрізку $[0, 1]$, знаходимо, що її максимум досягається в точці $\rho^* := (1 - \sqrt{1 - |w|^2})/|w|$, причому

$$\max\big\{\mathcal{R}(\rho) : \rho \in [0, 1]\big\} = \mathcal{R}(\rho^*) = \frac{2|w|}{1 + \sqrt{1 - |w|^2}}. \tag{5}$$

Оскільки згідно з нерівністю Шварца–Піка (див., наприклад, [2, с. 30])

$$|w| = \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2} \right|, \tag{6}$$

то з рівності (5) після елементарних перетворень одержуємо оцінку

$$\mathcal{R}(\rho^*) \le \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}. \tag{7}$$

Легко бачити, що

$$f(t) = \frac{\dfrac{f(t)-f(Z)}{1-f(t)\overline{f(Z)}} + f(Z)}{1 + \dfrac{f(t)-f(Z)}{1-f(t)\overline{f(Z)}}\overline{f(Z)}}, \quad Z := z_1 \vee z_2. \tag{8}$$

Тому функція $f \in \mathcal{B}(f)$ і для неї справджується співвідношення (4), яке разом з (5) і (7) доводить нерівність

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

При фіксованих $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ рівність у цьому співвідношенні можлива тоді і тільки тоді, коли для функції f одночасно досягаються всі рівності в (4) і (6).

Оскільки нетривіальна рівність в (6) досягається тільки для функцій (див., наприклад, [2, с. 30])

$$f(t) = e^{i\phi}\frac{t-a}{1-t\overline{a}}, \quad a \in \mathbb{D},\ \phi \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

то для виконання рівності в (4) необхідно і достатньо, щоб така функція задовольняла умову

$$-f(z_2) = e^{i(\arg w + \phi)}\rho^* =$$

$$= e^{i\phi}\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\frac{2|1 - z_1\overline{z}_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}} =: e^{i\phi}\alpha, \tag{10}$$

або ж умову

$$-f(z_1) = -e^{i\phi}\alpha\frac{1 - z_1\overline{z}_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} =: e^{i\phi}\beta. \tag{11}$$

Оскільки $|\alpha| = |\beta| < 1$, а екстремальна функція f є автоморфізмом круга $\mathbb{D}$, то множина автоморфізмів, для яких виконується (10) або (11) є непорожньою.

Виділивши клас таких екстремальних функцій і підставивши (9) в (8), після елементарних перетворень одержимо загальний вигляд екстремальної функції.

Теорему доведено.

1. *Савчук В. В.* Властивості твірних ядер класів голоморфних функцій і екстремальні задачі теорії наближення // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 235 – 263.
2. *Avkhadiev F. G., Wirths K.–J.* Schwarz–Pick Type Inequalities. — Basel: Birkhauser Verlag, 2008. — 156 p.
3. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. — 1976. — **19**, №1. — С. 29 – 40.
4. *Waadeland H.* Zur Theorie der beschrankten Funktionen // Kgl., norske e vid. selskabs forhandl. — 1962. — **35**, №15. — P. 80 – 85.
5. *Burckel R. B., Marshall D. E., Minda D., Poggi–Corradini P., Ransford Th. J.* Area, capacity and diameter versions of Schwarz's lemma // Conform. Geom. Dyn. — 2008. — **12**. — P. 133 – 152.
6. *Турковский В. А.* О некоторых экстремальных свойствах регулярных ограниченных в круге $|z| < 1$ функций // Изв. высших учеб. зав. — 1966. — **52**, №3. — С. 166 – 170.