Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 241-269

УДК 517.5

Т. А. Степанюк (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ТА НАБЛИЖЕНЬ СУМАМИ ФУР'Є КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ НЕВЕЛИКОЇ ГЛАДКОСТІ В ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТРИКАХ

We obtain in the metric of spaces L_s, $1 < s \leq \infty$, the exact order estimates of the best approximations and approximations by Fourier sums of classes of convolutions periodic functions that belong to unit ball of space L_1, with generating kernel $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$. The kernel's coefficients $\psi(k)$ are such that product $\psi(n)n^{1-\frac{1}{s}}$, $1 < s \leq \infty$, tends to zero not faster than an arbitrary power function and if $1 < s < \infty$, then $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$ and if $s = \infty$, then $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$.

У метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$, одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_1, з твірним ядром $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Коефіцієнти $\psi(k)$ в ядрі такі, що добуток $\psi(n)n^{1-\frac{1}{s}}$, $1 < s \leq \infty$, прямує до нуля не швидше за будь-яку степеневу функцію і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$ при $1 < s < \infty$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $s = \infty$.

Нехай L_p, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій f з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Позначимо через $L^{\psi}_{\beta,1}$ — множину функцій $f \in L_1$, які майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ \varphi \in B_1^0,\ \ a_0 \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

де

$$B_1^0 = \left\{\varphi :\ ||\varphi||_1 \leq 1,\ \ \varphi \perp 1\right\},$$

з сумовним на $[0, 2\pi)$ ядром Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ \psi(k) > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Якщо f і φ пов'язані рівністю (1), то функцію φ у цій рівності називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають f^{ψ}_{β} (див., наприклад, [1, c. 132]).

Якщо послідовності $\psi(k)$ монотонно незростають і виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty,\ \ 1 < s < \infty,$$

тоді згідно з лемою 12.6.6 [2, c. 193] $\Psi_\beta \in L_s$, $1 < s < \infty$, а отже, на підставі твердження 1.5.5 [3, c. 43] $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_s$, $1 < s < \infty$.

Якщо ж $\psi(k)$ така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty,$$

то $\Psi_\beta \in L_\infty$, і, очевидно, має місце вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_\infty$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$ класи $L^{\psi}_{\beta,1}$ є відомими класами Вейля–Надя $W^r_{\beta,1}$, для яких при $r > 1 - \frac{1}{s}$ має місце вкладення $W^r_{\beta,1} \subset L_s$, $1 < s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k),\ k \in \mathbb{N}$, в означенні класів $L^{\psi}_{\beta,1}$, є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, заданих на $[1, \infty)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Для класифікації функцій ψ із $\mathfrak{M}$ за їх швидкістю спадання до нуля важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi;t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{2}$$

З її допомогою з множини $\mathfrak{M}$ виділяють такі підмножини (див., наприклад, [1, с. 161]):

$$\mathfrak{M}_0 := \big\{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad 0 < K \leq \alpha(\psi;t)\big\},$$

$$\mathfrak{M}_C := \big\{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad K_1 \leq \alpha(\psi;t) \leq K_2 < \infty\big\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ := \big\{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \alpha(\psi;t) \downarrow 0\big\}.$$

Розглянемо величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s = \sup_{f\in L^\psi_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$, а також найкращі наближення класів $L^\psi_{\beta,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів заданого порядку, тобто величини вигляду

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_s = \sup_{f\in L^\psi_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s, \ 1 \leq s \leq \infty,$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

У роботі розв'язується задача про знаходження точних порядкових оцінок для величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s$ і $E_n(L^\psi_{\beta,1})_s$, $1 < s \leq \infty$, при певних обмеженнях на функцію ψ.

Для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,1}$ порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s$ і $E_n(W^r_{\beta,1})_s$ при довільних $r > \frac{1}{s'}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, відомі (див., наприклад, [4]) і мають вигляд

$$E_n(W^r_{\beta,1})_s \asymp n^{-r+\frac{1}{s'}}, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad r > \frac{1}{s'}, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1 \asymp n^{-r}\ln(n+1), \qquad r>0, \quad n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s \asymp n^{-r+\frac{1}{s'}}, \quad 1<s\le\infty, \quad r>\frac{1}{s'}. \tag{4}$$

В [5] у випадку, коли $\frac{1}{\psi(t)}$ опукла і $\psi\in B\cap\Theta_{s'}$, $1\le s'<\infty$, де $\Theta_{s'}$ — множина незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha>\frac{1}{s'}$ така, що функція $t^\alpha\psi(t)$ майже спадає (тобто знайдеться додатна стала K для якої при будь–яких $t_1>t_2\ge 1$ $t_1^\alpha\psi(t_1)\le Kt_2^\alpha\psi(t_2)$), а B — множина незростаючих при $t\ge1$ додатних функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)}\le K,\ \ t\ge1$, показано, що існують додатні величини $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, залежні лише від ψ і s такі, що для довільних $1<s\le\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$

$$K^{(2)}\psi(n)n^{\frac{1}{s'}}\le E_n(L^\psi_{\beta,1})_s\le\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s\le K^{(1)}\psi(n)n^{\frac{1}{s'}}.$$

У випадку $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s$ і $E_n(L^\psi_{\beta,1})_s$, $1\le s\le\infty$, були знайдені у роботах [6–7].

У роботі [8] за умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^2(k)<\infty$ для всіх $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ знайдено точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_2$, а саме встановлено рівність

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку $\psi\in\mathfrak{M}_C\cup\mathfrak{M}^+_\infty$ відомі асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_1$ при $n\to\infty$ (див., наприклад, [6, с. 153]).

При $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$ в [9] встановлено асимптотичні рівності і для найкращих наближень $E_n(L^\psi_{\beta,1})_1$. Крім того, в [10], [11] отримано точні значення величин $E_n(L^\psi_{\beta,1})_1$, $\beta\in\mathbb{R}$, за деяких умов на послідовність $\psi(k)$.

У роботі знайдено точні за порядком оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s$ і $E_n(L^\psi_{\beta,1})_s$ у випадку, коли

$$g_{s'}(t):=\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}\in\mathfrak{M}_0,\ 1<s\le\infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1, \tag{5}$$

і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$ при $1 < s < \infty$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $s = \infty$. При цьому константи в отриманих оцінках виражаються через параметри задачі в явному вигляді.

Теорема 1. *Нехай* $\psi(t) t^{\frac{1}{s'}} \in \mathfrak{M}_0$ *і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty, \tag{6}$$

$1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,s}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(L_{\beta,1}^{\psi})_s \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_s \leq$$

$$\leq K_{\psi,s}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \tag{7}$$

де $K_{\psi,s}^{(1)}$ *і* $K_{\psi,s}^{(2)}$ *— додатні величини, що залежать лише від* ψ *і* s.

Доведення. Згідно з інтегральним зображенням (1) для довільної функції $f \in L_{\beta,1}^{\psi}$, $\beta \in \mathbb{R}$, майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t) f_{\beta}^{\psi}(t) dt, \quad f_{\beta}^{\psi} \in B_1^0, \tag{8}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

При цьому, на підставі включення $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і умови (6), $\Psi_{\beta,n} \in L_s$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Скориставшись нерівністю (1.5.28) роботи [3, с.43], одержимо, що для довільних $1 < s < \infty$

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_s \leq \frac{1}{\pi} \sup_{f \in L_{\beta,1}^{\psi}} \|\Psi_{\beta,n}\|_s \|f_{\beta}^{\psi}\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}\|_s. \tag{9}$$

В [12] (див. формули (32) і (35)) при виконанні умови (6) і умов $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, де $g_{s'}$ означається згідно з (5), було доведено нерівність

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_s \leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{10}$$

в якій

$$\xi(s) := \max\left\{4\left(\frac{\pi}{s-1}\right)^{\frac{1}{s}}, \ \ 14(8\pi)^{\frac{1}{s}}s\right\}, \tag{11}$$

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t\geq n}\alpha(\psi;t), \quad \psi \in \mathfrak{M}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

а $\alpha(\psi;t)$ означається згідно з (2).

З нерівностей (9) і (10) отримуємо оцінку

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'}) + s}{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}, \ 1 < s < \infty, \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \tag{13}$$

Знайдемо оцінку знизу для $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s < \infty$. З цією метою розглянемо згортку

$$f_m(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_m(\tau)\Psi_\beta(t-\tau)d\tau, \tag{14}$$

де

$$\varphi_m(t) := \frac{1}{4\pi}\left(V_m(t) - \frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

а $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду (див. формулу (1.3.15) роботи [1, с. 31])

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \cos kt, \ m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Покажемо, що $\|\varphi_m\|_1 \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$. Відомо, що

$$V_m(t) = 2F_{2m-1}(t) - F_{m-1}(t), \tag{17}$$

(див., наприклад, [4, с. 28]), де $F_k(t)$ — ядра Фейєра порядку k

$$F_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\nu} \cos jt \right), \ k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див., наприклад, [13, с. 148])

$$\|F_k\|_1 = \pi, \ k \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

то з (17) і (18) отримуємо

$$\|V_m\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Враховуючи (19), одержуємо

$$\|\varphi_m\|_1 = \frac{1}{4\pi} \left\| V_m(t) - \frac{1}{2} \right\|_1 \leq \frac{1}{4\pi} \big(\|V_m\|_1 + \pi \big) \leq 1.$$

Оскільки $\|\varphi_m\|_1 \leq 1$ і $\varphi \perp 1$, то $f_m \in L^{\psi}_{\beta,1}$, $m \in \mathbb{N}$. Використовуючи співвідношення (14)–(16), а також твердження (3.7.1) з [1, с. 134], отримаємо рівність

$$f_m(t) = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{k=1}^{m} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right). \tag{20}$$

Покладемо

$$\Phi_s(x) := \int\limits_x^\infty \psi^s(t) t^{s-2} dt, \quad 1 < s < \infty,$$

і

$$B(n) = B(\psi; s; n) := \Big[\Phi_s^{-1}\Big(\frac{1}{2n}\Phi_s(n)\Big)\Big] + 1, \qquad (21)$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, а Φ_s^{-1} — функція обернена до Φ_s.

Розглянемо інтеграл

$$I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)\big) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (22)$$

де $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а функція $f_{B(n)}(t)$ означається формулою (20) при $m = B(n)$.

Використавши нерівність Гельдера (див., наприклад, [1, с. 137]), запишемо

$$I_1 \leq \|f_{B(n)} - t_{n-1}\|_s \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'}. \qquad (23)$$

Для оцінки другої норми із співвідношення (23) скористаємося таким твердженням [12].

Лема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— незростаюча послідовність додатних чисел така, що* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{p-2} < \infty$. *Тоді для* L_p*-норми функції*

$$h_{\gamma,n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos(kx + \gamma), \ \gamma \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N},$$

має місце нерівність

$$\|h_{\gamma,n}\|_p \leq \xi(p) \left(a_n^p n^{p-1} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}},$$

де величина $\xi(p)$ *означається формулою* (11).

Оскільки згідно з умовою теореми $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, то функція $\psi^{s-1}(t)t^{s-2} = g_{s'}^{s-1}(t)t^{-\frac{1}{s}}$ монотонно спадає до нуля. Тому, поклавши в умовах леми 1 $a_k = \psi^{s-1}(k)k^{s-2}$, $\gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, $p = s'$, запишемо

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'} \leq$$

$$\leq \xi(s') \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\right)^{s'} k^{s'-2} + \left(\psi^{s-1}(n)n^{s-2}\right)^{s'} n^{s'-1} \right)^{\frac{1}{s'}} =$$

$$= \xi(s') \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2} + \psi^{s}(n)n^{s-1} \right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{24}$$

Далі використаємо наступне твердження [12].

Лема 2. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді, якщо* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, *де* $g_p(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$, *то виконується нерівність*

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2},$$

де величина $\underline{\alpha}_n(g_p)$ *означається формулою* (12).

Застосувавши лему 2 при $p = s'$, з (24) отримаємо

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'} \leq$$

$$\leq \xi(s') \left(1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{25}$$

Зі співвідношень (23) і (25) отримуємо оцінку

$$\|f_{B(n)} - t_{n-1}\|_s \geq$$

$$\geq \frac{1}{\xi(s')}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{-\frac{1}{s'}} I_1. \qquad (26)$$

Оскільки для будь-якого $t_{n-1}\in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=0,$$

то з (22)

$$I_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{B(n)}(t)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt. \qquad (27)$$

Очевидно, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kt+\theta)\cos(mt+\theta)dt=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ \pi, & k=m,\end{cases} \quad k,m\in\mathbb{N},\ \ \theta\in\mathbb{R}. \quad (28)$$

Використовуючи (28) при $\theta=-\frac{\beta\pi}{2}$ і (20) при $m=B(n)$, з (27) одержуємо

$$I_1=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{B(n)}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1}\left(1-\frac{k}{2B(n)}\right)\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=n}^{B(n)}\psi^s(k)k^{s-2}+2\sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1}\left(1-\frac{k}{2B(n)}\right)\psi^s(k)k^{s-2}\right)>$$

$$> \frac{1}{4} \sum_{k=n}^{B(n)} \psi^s(k)k^{s-2} = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} - \sum_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right). \tag{29}$$

Для оцінки знизу інтеграла I_1 залишилось оцінити зверху суму $\sum\limits_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}$. З (21) випливає

$$\sum_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \leq \int\limits_{B(n)}^{\infty} \psi^s(t)t^{s-2}dt = \Phi_s(B(n)) <$$

$$< \frac{1}{2n}\Phi_s(n) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \tag{30}$$

З нерівностей (26), (29) і (30) для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ отримаємо оцінку

$$\|f_{B(n)} - t_{n-1}\|_s \geq$$

$$\geq \frac{1}{\xi(s')} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right)^{-\frac{1}{s'}} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{8\xi(s')} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{8\xi(s')} \left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}{\underline{\alpha}_1(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}. \tag{31}$$

Об'єднуючи (13) і (31), отримуємо співвідношення (7). Теорему 1 доведено.

Прикладами функцій ψ, які задовольняють умови теореми 1 є функції:

1) $\psi(t) = t^{-r}, \ r > \frac{1}{s'}$;
2) $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\gamma}(t + K), \gamma > \frac{1}{s}, K > 0$;

3) $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}}\big(\ln(t+K_1)\big)^{-\frac{1}{s}}\big(\ln\ln(t+K_2)\big)^{-\gamma},$

$$\gamma > \frac{1}{s}, K_2 \geq e-1, K_1 > 0, \tag{32}$$

та інші.

Зауваження. У ході доведення теореми 1 при виконанні її умов було показано, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується більш точна, ніж (7), оцінка:

$$\frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{33}$$

де $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, а $\xi(s')$ і $\underline{\alpha}_n(g_{s'})$ — додатні величини, що означаються за допомогою формул (11) і (12) відповідно.

З нерівностей (33) випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $r > \frac{1}{s'}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$. Тоді для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ виконується оцінка:*

$$\frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\right)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(W^r_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s \leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{34}$$

де $\xi(s)$ — додатна величина, що означається за допомогою формули (11).

Оскільки

$$\frac{1}{\alpha-1}n^{1-\alpha} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \leq \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)n^{1-\alpha},\ \alpha > 1,$$

то з (34) одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{1}{s(r-1)+1}\right)^{\frac{1}{s}} n^{-r+\frac{1}{s'}} \le E_n(W^r_{\beta,1})_s \le$$

$$\le \mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s \le \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{s(r-1)+2}{s(r-1)+1}\right)^{\frac{1}{s}} n^{-r+\frac{1}{s'}}. \tag{35}$$

Нерівності (35) уточнюють порядкові оцінки (3) і (4).

В [12] показано, що при виконанні умов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $\psi(t)t^{\frac{1}{s'}} \in \mathfrak{M}_C$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$ має місце порядкова оцінка

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} \asymp \psi^s(n)n^{s-1}, \tag{36}$$

де під записом $A(n) \asymp B(n)$ будемо розуміти, що для додатних послідовностей $A(n)$ і $B(n)$ існують такі сталі $K_1 > 0$ і $K_2 > 0$, що $K_1B(n) \le A(n) \le K_2B(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Отже, з (7) і (36) випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді, якщо функція* $g_{s'}$ *із* (5) *належить до* $\mathfrak{M}_0$, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}},$$

а якщо ж $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{s'}}. \tag{37}$$

Порядкові оцінки (37) встановлені раніше у роботі [5].

Зауважимо, що у випадку, коли

$$g_{s'} \in \mathfrak{M}_0, \quad \lim_{t\to\infty}\alpha(g_{s'};t) = \infty, \tag{38}$$

виконується оцінка

$$\psi(n)n^{\frac{1}{s'}} = o\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}\right),\ n\to\infty,$$

тобто порядкові рівності (37) місця не мають. Зокрема умова (38) виконується для функцій ψ вигляду (32). Наведемо наслідок з теореми 1 для згаданих функцій ψ.

Наслідок 3. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}}\ln^{-\frac{1}{s}}(t+K_1)\big(\ln\ln(t+K_2)\big)^{-\gamma}$, $\gamma > \frac{1}{s}$, $K_2 \geq e-1$, $K_1 > 0$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n \geq 3$, $n\in\mathbb{N}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{s'}}(\ln n)^{\frac{1}{s}}(\ln\ln n)^{\frac{1}{s}}.$$

Доведення. Як зазначалося вище, функції $\psi(t)$ вигляду (32) задовольняють умови теореми 1. Тому, враховуючи співвідношення (42) [12], неважко переконатися у справедливості співвідношення

$$\int_n^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt \leq \sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} \leq \psi^s(n)n^{s-2} + \int_n^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\cdot\frac{1}{n}+1\right)\int_n^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt. \qquad (39)$$

З (7), (39) і того, що $\underline{\alpha}_n(g_{s'}) > K > 0$ випливає, що при $n \geq 3$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_n^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_n^{\infty}\frac{dt}{t\ln(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{\gamma s}}\right)^{\frac{1}{s}} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_n^{\infty}\frac{dt}{t\ln t(\ln\ln t)^{\gamma s}}\right)^{\frac{1}{s}} \asymp (\ln\ln n)^{\frac{1}{s}-\gamma} \asymp$$

$$\asymp \psi(n)n^{\frac{1}{s'}}(\ln n)^{\frac{1}{s}}(\ln\ln n)^{\frac{1}{s}},\ n \geq 3.$$

Наслідок 3 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{40}$$

Доведення. Встановимо оцінку зверху величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. З урахуванням формули (8) і нерівності (1.5.28) роботи [3, с. 43]

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{\infty}. \tag{41}$$

Оскільки

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_{\infty} = \left\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k),$$

то з (41) одержуємо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k),\ \beta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

Встановимо оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Покладемо

$$\Psi(x) := \int_{x}^{\infty}\psi(t)dt$$

і

$$D(l;n) = D(\psi;l;n) := \left[\Psi^{-1}\Big(\frac{1}{2l}\Psi(n)\Big)\right] + 2n, \quad l,n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Розглянемо функцію $f_{D(l;n)}(t)$, що означається формулою (20) при $m = D(l;n)$, тобто

$$f_{D(l;n)}(t) = \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{D(l;n)}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\Bigg). \quad (44)$$

Як було показано при доведенні теореми 1, $f_{D(l;n)} \in L^{\psi}_{\beta,1}$. Беручи до уваги рівність (44) та враховуючи умови теореми 2, отримуємо, що при довільних $l \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \geq \left|f_{D(l;n)}(0) - S_{n-1}(f_{D(l;n)};0)\right| =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{k=n}^{D(l;n)}\psi(k)+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)\psi(k)\right) >$$

$$>\frac{1}{4\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=n}^{D(l;n)}\psi(k) = \frac{1}{4\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\right).$$

З (43) випливає, що для довільних $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k) \leq \int_{D(l;n)}^{\infty}\psi(t)dt = \Psi(D(l;n)) < \frac{1}{2l}\Psi(n) \leq \frac{1}{2l}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (45)$$

Тому

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty > \frac{1}{4\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{2l}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k),\ l,n \in \mathbb{N}. \quad (46)$$

Перейшовши до границі у нерівності (46) при $l \to \infty$, одержимо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \geq \frac{1}{4\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (47)$$

На підставі (42) і (47) отримуємо оцінку (40). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, $g \in \mathfrak{M}_0$ *і*

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t\geq 1}\alpha(g;t) > 1.$$

Тоді для довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{48\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (48)$$

Доведення. Внаслідок теореми 2, при умові $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ справедлива оцінка

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), \ \beta \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Розглянемо інтеграл

$$I_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f_{D(l;n)}(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)\big)dt,$$

де $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а функція $f_{D(l;n)}(t)$ та величина $D(l;n)$ означаються формулами (44) і (43) відповідно. Оцінимо знизу $|I_2|$.

Використавши формулу (16), запишемо

$$V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t) =$$

$$= \sum_{k=n}^{D(l;n)}\cos kt + 2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)\cos kt - 2\sum_{k=n}^{2n-3}\left(1-\frac{k}{2n-2}\right)\cos kt. \quad (50)$$

З (50) випливає, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t)\big(V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)\big)dt = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos\left(mt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi \cos\frac{\beta\pi}{2}, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{R},$$

то беручи до уваги (44), (50) і (51), одержуємо

$$|I_2| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{D(l;n)}(t)\big(V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)\big) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Bigg| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Bigg(\sum_{k=1}^{D(l;n)} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\Bigg) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \cos kt + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \cos kt -$$

$$- 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \cos kt \Bigg) dt \Bigg| =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \Bigg(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) +$$

$$+ 4 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) \Bigg) >$$

$$> \frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \left(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) - \sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k) - 2\sum_{k=n}^{2n-3}\left(1-\frac{k}{2n-2}\right)\psi(k)\right). \tag{52}$$

Враховуючи монотонність функції $\psi(t)$, отримуємо

$$2\sum_{k=n}^{2n-3}\left(1-\frac{k}{2n-2}\right)\psi(k) \leq \psi(n)\frac{1}{n-1}\sum_{k=n}^{2n-3}(2n-2-k) =$$

$$= \frac{1}{2}\psi(n)(n-2) < \frac{1}{2}\psi(n)n. \tag{53}$$

Для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\overline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо величину

$$\overline{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \geq n} \alpha(\psi; t),$$

де характеристика $\alpha(\psi; t)$ означається згідно з (2). У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 3. *Нехай $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$. Тоді, якщо $g \in \mathfrak{M}_0$, то для довільних $n \in \mathbb{N}$*

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{54}$$

Якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g)}{1+n\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq \psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{55}$$

Доведення леми 3. Нехай $g \in \mathfrak{M}_0$. Покажемо справедливість нерівності (54). Очевидно,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \geq \int\limits_{n}^{\infty}\psi(t)dt. \tag{56}$$

Оскільки функція $\psi(t)t$ монотонно спадає до нуля, то проінтегрувавши частинами інтеграл $\int\limits_n^\infty \psi(t)dt$, отримаємо

$$\int\limits_n^\infty \psi(t)dt = -\psi(n)n - \int\limits_n^\infty \psi'(t)tdt = -\psi(n)n + \int\limits_n^\infty \psi(t)\frac{1}{\alpha(\psi;t)}dt. \quad (57)$$

З рівності (57) випливає

$$\psi(n)n = \int\limits_n^\infty \psi(t)\frac{1}{\alpha(\psi;t)}dt - \int\limits_n^\infty \psi(t)dt. \quad (58)$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g;t)}, \ t \geq 1. \quad (59)$$

Дійсно, оскільки $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, то

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} = \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = \frac{t^{-1}g(t) + |g'(t)|}{g(t)t^{-1}} =$$

$$= 1 + \frac{t|g'(t)|}{g(t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g;t)}.$$

Підставивши (59) в (58), отримаємо рівність

$$\psi(n)n = \int\limits_n^\infty \psi(t)\left(1 + \frac{1}{\alpha(g;t)}\right)dt - \int\limits_n^\infty \psi(t)dt = \int\limits_n^\infty \psi(t)\frac{1}{\alpha(g;t)}dt. \quad (60)$$

З (56) і (60) випливає співвідношення

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\int\limits_n^\infty \psi(t)dt \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (61)$$

Нерівність (54) доведено.

Нехай $g \in \mathfrak{M}_C$. Оскільки $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$, то справедливість другої нерівності в (55) випливає з (54).

Врахувавши (61), маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \le \psi(n) + \int_{n}^{\infty}\psi(t)dt \le \left(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\cdot\frac{1}{n}+1\right)\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt. \tag{62}$$

Тоді на підставі формул (60) – (62) одержуємо

$$\psi(n)n \ge \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)}\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt \ge \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\cdot\frac{1}{n}+1\right)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k).$$

Співвідношення (55), а отже, і лему 3 доведено.

З (53) і (54) випливає нерівність

$$2\sum_{k=n}^{2n-3}\psi(k)\left(1-\frac{k}{2n-2}\right) < \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{63}$$

Об'єднуючи (45), (52) і (63), отримаємо, що для довільних $l\in\mathbb{N}$ і $n\in\mathbb{N}$

$$|I_2| > \frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{2l}-\frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{64}$$

З іншого боку, використовуючи твердження Д.1.1 [3, с. 391] та формулу (19), переконуємося, що для довільного $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$|I_2| \le \|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty \|V_{D(l;n)} - V_{n-1}\|_1 \le 6\pi\|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty. \tag{65}$$

З (64), (65) та умови $\cos\frac{\beta\pi}{2}\ne 0$ отримаємо

$$E_n(f_{D(l;n)})_\infty = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty \ge \frac{1}{6\pi}|I_2| \ge$$

$$\ge \frac{1}{24\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \ge$$

$$\ge \frac{1}{48\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{66}$$

Об'єднуючи (49) і (66), отримуємо (48). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $\beta = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, $g \in \mathfrak{M}_0$, *і*

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t\geq 1}\alpha(g;t) > 1.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{360\pi}\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\psi(n)n \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\psi(n)n. \qquad (67)$$

Доведення. Спочатку знайдемо оцінку зверху величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. З формули (41) при $\beta = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$, випливає

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{\infty} = \frac{1}{\pi}\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt\Big\|_{\infty}. \qquad (68)$$

Відомо (див., наприклад, [15, с. 611])

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin jx}{j}\right| \leq \frac{\pi}{2}+1,\ k \in \mathbb{N},\quad 0 < x < 2\pi. \qquad (69)$$

Застосувавши перетворення Абеля до суми $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt$, та використавши те, що $g(t) = \psi(t)t$ монотонно спадає, а також (69), отримуємо

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt\Big\|_{\infty} =$$

$$= \Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\big(k\psi(k)-(k+1)\psi(k+1)\big)\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin jt}{j} - n\psi(n)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin jt}{j}\Big\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\sum_{k=n}^{\infty}|g(k)-g(k+1)|+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)g(n)=$$

$$=(\pi+2)g(n)=(\pi+2)\psi(n)n. \tag{70}$$

З (68) і (70) випливає оцінка зверху для величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty$ у випадку, коли $\cos\frac{\beta\pi}{2}=0$. А саме

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \leq \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\psi(n)n. \tag{71}$$

Знайдемо оцінку знизу величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty$. Розглянемо функцію

$$f_n^*(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_\beta(\tau)\varphi_n^*(t-\tau)d\tau, \tag{72}$$

де

$$\varphi_n^*(t)=\frac{-1}{5\pi n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\sin kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\right). \tag{73}$$

Покажемо, що $\|\varphi_n^*\|_1\leq 1$. Очевидно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}k\sin kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)=n(n+1),\ \ 0\leq|t|\leq\pi. \tag{74}$$

Застосовуючи перетворення Абеля до кожної з сум в (73), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}k\sin kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sin jt+n\sum_{j=1}^{n}\sin jt+\sum_{k=n+1}^{2n-1}\sum_{j=1}^{k}\sin jt+\sum_{j=1}^{2n}\sin jt-n\sum_{j=1}^{n}\sin jt=$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sin jt + \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{j=1}^{k}\sin jt. \tag{75}$$

Використавши рівність

$$\sum_{k=0}^{N}\cos(kt+\gamma) = \cos\left(\frac{N}{2}t+\gamma\right)\sin\frac{(N+1)t}{2}\operatorname{cosec}\frac{t}{2},\ \gamma\in\mathbb{R},\ 0<|t|\le\pi,$$

(див., наприклад, [14, с. 43]), з (75) отримуємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n}k\sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\right| =$$

$$= \left| -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sum_{k=n+1}^{2n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| =$$

$$= \frac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sum_{k=0}^{2n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t + \sum_{k=0}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| \le$$

$$\le \frac{3}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2},\ 0<|t|\le\pi. \tag{76}$$

Зі співвідношення (76) та нерівності

$$\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi},\quad 0\le t\le\pi,$$

маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n}k\sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\right| \le \frac{3\pi^2}{2t^2},\ 0<|t|\le\pi. \tag{77}$$

З (74) і (77) випливає, що

$$\|\varphi_n^*\|_1 \le \frac{1}{5\pi n}\left(\int\limits_{|t|\le\frac{\pi}{n}} n(n+1)dt + \frac{3\pi^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\pi}\frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5\pi n}\big(2\pi(n+1) + 3\pi(n-1)\big) < 1.$$

Оскільки $\|\varphi_n^*\|_1 \leq 1$ і $\varphi_n^* \perp 1$, то $f_n^* \in L^{\psi}_{\beta,1}$.

З урахуванням формул (72), (73) та твердження (3.7.1) роботи [1, с. 134] неважко переконатися, що для функції f_n^* вигляду (72) має місце рівність

$$f_n^*(t) = \frac{1}{5\pi n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\psi(k)\cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\right). \quad (78)$$

Розглянемо інтеграл

$$I_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f_n^*(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt, \quad (79)$$

де $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а $V_m(t)$ — суми Валле Пуссена вигляду (16). Використавши твердження Д.1.1 [3, с. 391] та нерівність (19), отримаємо

$$I_3 \leq \|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty \|V_{2n} - V_n\|_1 \leq 6\pi\|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty. \quad (80)$$

Оскільки згідно з (16)

$$V_{2n}(t) - V_n(t) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n}\cos kt + 2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1 - \frac{k}{4n}\right)\cos kt - 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\cos kt,$$

то, враховуючи (28), (78), (79) та виконуючи елементарні перетворення, запишемо оцінку знизу

$$I_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n^*(t)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt =$$

$$= \frac{1}{5\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} k\psi(k)\cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\right) \times$$

$$\times\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\cos kt + 2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1 - \frac{k}{4n}\right)\cos kt - 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\cos kt\right)dt =$$

$$= \frac{1}{5n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k) - 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2n+1-k)\psi(k)\left(1-\frac{k}{2n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{5n^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\psi(k)(2n+1-k)(k-n) \geq$$

$$= \frac{\psi(2n)}{5n^2}\left((2n+1)\sum_{k=n+1}^{2n}(k-n) - \sum_{k=n+1}^{2n}k^2 + n\sum_{k=n+1}^{2n}k\right) =$$

$$= \frac{\psi(2n)}{5n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(3n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{\psi(2n)}{10n}\left(\frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}\right) > \frac{1}{30}\psi(2n)n =$$

$$= \frac{1}{30}\psi(n)n\frac{\psi(2n)}{\psi(n)} = \frac{1}{60}\psi(n)n\frac{g(2n)}{g(n)}. \tag{81}$$

Оскільки

$$\frac{g(2n)}{g(n)} = \frac{g(2n)-g(n)}{g(n)} + 1 > \frac{g'(n)n}{g(n)} + 1 = 1 - \frac{1}{\alpha(g;n)} \geq 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)},$$

то використовуючи співвідношення (80), (81), отримаємо, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ справедлива оцінка

$$\|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty \geq \frac{1}{6\pi}I_3 \geq \frac{1}{6\pi}\frac{1}{60}\psi(n)n\frac{g(2n)}{g(n)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{360\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n.$$

Тому, внаслідок довільності полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, одержуємо оцінку

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \geq \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty \geq \frac{1}{360\pi}\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\psi(n)n. \tag{82}$$

Об'єднуючи (71) і (82), отримуємо (67). Теорему 4 доведено.

Прикладами функцій ψ, які задовольняють умови теорем $3-4$ є функції:

1) $\psi(t) = t^{-r}$, $1 < r < 2$;
2) $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t + K_1)$, $K_1 \geq e^{\gamma}$, $\gamma > 1$;
3) $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln\ln(t + K_2))^{-\delta}$, $\gamma \geq 1$, $\delta > 1$,
   $K_2 \geq K_1 \geq e^{\gamma+\delta}$,

та інші.

Із теорем $3-4$ безпосередньо випливає твердження.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, $g \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g) > 1$. *Тоді, якщо* $\beta \in \mathbb{R}$ *такі, що* $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *то для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *справедливі порядкові оцінки*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k); \tag{83}$$

а якщо ж $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(n)n. \tag{84}$$

Якщо в умовах наслідку 4 $g \in \mathfrak{M}_C$, то згідно з (55) має місце порядкова рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \asymp \psi(n)n.$$

Отже, у цьому випадку має місце твердження.

***Наслідок* 5.** *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, $g \in \mathfrak{M}_C$, $\underline{\alpha}_1(g) > 1$. *Тоді для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$ *справедливі порядкові оцінки*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(n)n. \tag{85}$$

Справедливість порядкових оцінок (85) встановлено в [5].

Наведемо наслідок з теорем 3–4 для функцій $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+e^{\gamma})$, $\gamma > 1$.

***Наслідок* 6.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+e^{\gamma})$, $\gamma > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, *і* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n)n\ln n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{86}$$

Доведення. Покажемо, що для функцій $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+e^{\gamma})$, $\gamma > 1$, виконуються умови теорем 3–4. Дійсно, для них

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t\ln^{\gamma}(t+e^{\gamma})} < \infty$$

і

$$\alpha(g;t) = \frac{\ln(t+e^{\gamma})}{\gamma}\,\frac{t+e^{\gamma}}{t} > \frac{\ln(t+e^{\gamma})}{\gamma} > 1.$$

Якщо $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$, то порядкова оцінка (86) безпосередньо випливає з (84). Покажемо справедливість (86) у випадку, коли $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$. Враховуючи нерівність (62) та монотонність функції $\psi(t)$, маємо

$$\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt \leq \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq \left(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\cdot\frac{1}{n}+1\right)\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt \leq 2\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt. \tag{87}$$

Тоді з (83) і (87) одержуємо

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \asymp \int_{n}^{\infty}\psi(t)dt \asymp \int_{n}^{\infty}\frac{dt}{t\ln^{\gamma}(t+e^{\gamma})} \asymp$$

$$\asymp \ln^{1-\gamma} n \asymp \psi(n)n\ln n,\ n \geq 2.$$

Наслідок 6 доведено.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. II. — 538 с.

3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
4. *Temlyakov V. N.* Approximation of Periodic Functions. — New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1993. — 419 p.
5. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1186 – 1197.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
7. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 255 – 282.
8. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Наближення лінійними методами класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 245 – 254.
9. *Сердюк А. С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближеня функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2004. — **1**, № 1. — С. 294 – 336.
10. *Сердюк А. С.* Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **41**. — С. 168 – 189.
11. *Сердюк А. С.* Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 7. — С. 946 – 971.
12. *Serdyuk A. S., Stepaniuk T. A.* Order estimates of the best approximations and approximations of Fourier sums of classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness in uniform metric // Arxiv preprint, arXiv:1403.5311, 2014. — 20 p.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т.I. — 615 с.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматиз, 1962. — 1100 с.
15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. III. — 656 с.