Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 104-127

УДК 517.5

У. З. Грабова, І. В. Кальчук (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОЛМОГОРОВА–НІКОЛЬСЬКОГО ДЛЯ ТРИГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ $C^{\psi}_{\beta,\infty}$

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of approximations by threeharmonic integrals of Poisson $P_3(\delta)$ in uniform metric on classes of continuous 2π-periodic functions whose (ψ,β)-derivatives belong to the unit ball of the space L_∞, in the case when the functions $\psi(t)$ tend to zero faster, then the function t^{-3}, which defines an order of the saturation of the method $P_3(\delta)$.

Одержано асимптотичні рівності для верхніх меж наближень тригармонійними інтегралами Пуассона $P_3(\delta)$ у рівномірній метриці на класах неперервних 2π-періодичних функцій, (ψ,β)-похідні яких належать одиничній кулі простору L_∞, у випадку, коли функції $\psi(t)$ спадають до нуля швидше за функцію t^{-3}, яка визначає порядок насичення методу $P_3(\delta)$.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

У роботах О.І. Степанця [1, 2] введені класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій таким чином. Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f.

Нехай далі $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}. Множину усіх функцій f, котрі задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і, крім того, $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то записують, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі покладемо $L^{\psi}_{\beta} \cap C = C^{\psi}_{\beta}$ і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} \cap C = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ позначають множину функцій $f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору L_{∞}, тобто коли $\mathfrak{N} = \{\varphi \in L_{\infty} : \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\}$.

Поняття (ψ, β)-похідної є природним узагальненням поняття (r, β)-похідної у розумінні Вейля–Надя. Дійсно, якщо покласти $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то одержимо, що $f^{\psi}_{\beta} = f^{(r)}_{\beta}$ і класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ є класами Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,\infty}$ [3].

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, які визначають класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел деяких неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$ таких, що

$$\psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1 + t_2)/2\right) + \psi(t_2) \geq 0\ \forall t_1, t_2 \in [1, \infty),$$
$$\lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0.$$

Множину усіх таких функцій $\psi(t)$ будемо позначати через $\mathfrak{M}$.

Згідно з О. І. Степанцем (див., наприклад, [2, с. 160]) із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_{\infty}$ вигляду

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi(t) \in \mathfrak{M} :\quad 0 < \mu(\psi; t) \leq K \quad \forall t \geq 1\right\},$$
$$\mathfrak{M}_C = \left\{\psi(t) \in \mathfrak{M} :\quad 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 \quad \forall t \geq 1\right\},$$
$$\mathfrak{M}_{\infty} = \left\{\psi(t) \in \mathfrak{M} :\quad 0 < K \leq \mu(\psi; t) < \infty \quad \forall t \geq 1\right\},$$

де

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad \eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \qquad (1)$$

ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ, а K, K_1, K_2, взагалі кажучи, можуть залежати від функції ψ.

Через $\mathfrak{M}_C^*$ та $\mathfrak{M}_\infty^*$ позначимо функції $\psi(t)$, що належать множинам $\mathfrak{M}_C$ та $\mathfrak{M}_\infty$ відповідно і мають неперервні другі похідні $\psi''(t)$ на $[1,\infty)$.

Нехай $f \in L$. Величину

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\delta) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \delta > 0,$$

де $\lambda_k(\delta) = \left(1 + \frac{1}{4}\left(3 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)k + \frac{1}{8}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 k^2\right) e^{-\frac{k}{\delta}}$, називають тригармонійним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [4, с. 73]).

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\big(C^\psi_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\big)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} \big\|f(x) - P_3(\delta; f; x)\big\|_C, \tag{2}$$

за умови, що $\psi(t)$ за порядком спадає до нуля швидше ніж функція t^{-3}.

Задачу про відшукання асимптотичної рівності для величини (2), згідно з О. І. Степанцем [2, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова–Нікольського для методу $P_3(\delta)$ на класі $C^\psi_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці.

Вивченню апроксимативних властивостей гармонійних та бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій присвячені роботи [5 – 13]. В [4] авторами знайдено розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних інтегралів Пуассона на класах $C^\psi_{\beta,\infty}$ у випадку, коли функція $\psi(t)$, що породжує ці класи, спадає до нуля не швидше за функцію t^{-3}, яка визначає порядок насичення методу $P_3(\delta)$.

Домовимося далі через K, K_i, $i = 1, 2, ...$, позначати сталі, взагалі кажучи різні, в різних співвідношеннях.

Покладемо

$$\tau(u) := \begin{cases} \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{3}$$

де $\gamma = \frac{1}{4}\left(3 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\delta$, $\theta = \frac{1}{8}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \delta^2$, $\delta > 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$.

Якщо для функції $\tau(u)$ перетворення Фур'є

$$\widehat{\tau}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \tag{4}$$

є сумовним на всій дійсній осі, тобто інтеграл

$$A(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_\beta(t)| dt$$

збіжний, то аналогічно до [2, с. 183] можна показати, що для довільної функції $f \in C^\psi_{\beta,\infty}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - P_3(\delta; f; x) = \psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\Big(x + \frac{t}{\delta}\Big)\widehat{\tau}_\beta(t) dt, \ \delta > 0. \tag{5}$$

Використовуючи інтегральне представлення (5), дослідимо асимптотичну поведінку величини (2). Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^*_C$, *функція* $g(u) = u^3\psi(u)$ *опукла донизу на* $[b, \infty)$ *при деякому* $b \ge 1$ *і*

$$\int\limits_1^\infty u^2\psi(u)du < \infty. \tag{6}$$

Тоді при $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(C^\psi_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\big)_C = \frac{1}{\delta^3}\sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6} f_0^{(3)}(x) \right\|_C +$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du+\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{\delta}^{\infty} u^2\psi(u)du\right), \tag{7}$$

де $f_0^{(r)}(x)$*,* $r=1,2,3$ *—* (r,β)*-похідні в сенсі Вейля–Надя при* $\beta=0$*.*

Доведення. Представимо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (3), у вигляді $\tau(u)=\varphi(u)+\mu(u)$, де

$$\varphi(u)=\begin{cases}\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le\frac{1}{\delta},\\ \left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge\frac{1}{\delta},\end{cases} \tag{8}$$

$$\mu(u)=\begin{cases}\left(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le\frac{1}{\delta},\\ \left(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge\frac{1}{\delta}.\end{cases} \tag{9}$$

Переконаємося в тому, що перетворення

$$\widehat{\varphi}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{10}$$

$$\widehat{\mu}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{11}$$

відповідно функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$, є сумовними на всій числовій осі, тобто покажемо збіжність інтегралів

$$A(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}_\beta(t)|dt, \tag{12}$$

$$A(\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\mu}_\beta(t)|dt. \tag{13}$$

З метою доведення збіжності інтеграла (12) розглянемо інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\varphi'(u)|, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\,|d\varphi'(u)|, \tag{14}$$

$$\left|sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty\frac{|\varphi(u)|}{u}du,\qquad \int\limits_0^1\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du \tag{15}$$

і знайдемо для них оцінки зверху.

Із (8) будемо мати

$$|d\varphi'(u)|=\left(\frac{2}{\delta}+u\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}du,\ 0\le u\le\frac{1}{\delta},$$

$$|d\varphi'(u)|\le\frac{1}{\psi(\delta)}\left(\left(\frac{2}{\delta}+u\right)\psi(\delta u)+\left(\frac{4}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{1}{2}u^2\right)2\delta|\psi'(\delta u)|+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)\delta^2\psi''(\delta u)\right)du,\quad u\ge\frac{1}{\delta}. \tag{16}$$

Тоді

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}u|d\varphi'(u)|=\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2}{\delta}u+u^2\right)du=O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right),\ \delta>2. \tag{17}$$

Оскільки

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}u|d\varphi'(u)|\le\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u|d\varphi'(u)|,\quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1||d\varphi'(u)|\le\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u|d\varphi'(u)|,\ \delta>2, \tag{18}$$

то знайдемо оцінку інтеграла $\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u|d\varphi'(u)|$. Враховуючи (16), отримаємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u|d\varphi'(u)|\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{2}{\delta}u+u^2\right)\psi(\delta u)du+$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)|\psi'(\delta u)|du+$$

$$+\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{4}{3\delta^2}u^2+\frac{1}{\delta}u^3+\frac{1}{6}u^4\right)\psi''(\delta u)du\leq\frac{3}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^2\psi(\delta u)du+$$

$$+\frac{23\delta}{3\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^3|\psi'(\delta u)|du+\frac{5\delta^2}{2\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^4\psi''(\delta u)du. \qquad (19)$$

Виходячи з умови (6) та опуклості донизу функції $g(u)=u^3\psi(u)$, неважко переконатися, що

$$\lim_{u\to\infty}u^3\psi(u)=0, \qquad (20)$$

$$\lim_{u\to\infty}u^4\psi'(u)=0. \qquad (21)$$

Застосувавши метод інтегрування частинами до інтегралів $\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^3|\psi'(\delta u)|du$ і $\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^4\psi''(\delta u)du$, і врахувавши умову (6) та рівності (20), (21), одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u|d\varphi'(u)|\leq K\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^2\psi(\delta u)du\right)=$$

$$=K\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}u^2\psi(u)du\right)=\frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)}. \qquad (22)$$

Об'єднуючи співвідношення (17), (18) та (22), отримуємо оцінки

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}u|d\varphi'(u)|=O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right),\ \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1||d\varphi'(u)|=O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right),\ \delta>2. \qquad (23)$$

Для оцінки першого інтеграла з (15), розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на три частини: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta},\frac{b}{\delta}\right]$, $\left[\frac{b}{\delta},\infty\right)$. Із (8), беручи до уваги, що

$\psi(\delta u) \leq \psi(1)$ при $u \in \left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та сумовність функції $u^2\psi(u)$, $u \geq 1$, одержуємо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u} du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta} u + \frac{1}{6} u^2 \right) du = \frac{K}{\delta^3 \psi(\delta)},$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u} du = \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta} u + \frac{1}{6} u^2 \right) \psi(\delta u) du \leq$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta} u + \frac{1}{6} u^2 \right) du = \frac{K_1}{\delta^3 \psi(\delta)},$$

$$\int_{\frac{b}{\delta}}^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u} du = \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{b}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta} u + \frac{1}{6} u^2 \right) \psi(\delta u) du \leq$$

$$\leq \frac{5}{2\psi(\delta)} \int_{\frac{b}{\delta}}^{\infty} u^2 \psi(\delta u) du = \frac{5}{2\delta^3 \psi(\delta)} \int_1^{\infty} u^2 \psi(u) du = \frac{K_2}{\delta^3 \psi(\delta)}.$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u} du = O\left(\frac{1}{\delta^3 \varphi(\delta)} \right).$$

Перейдемо до оцінки другого інтеграла з (15). Міркуючи аналогічно, як і при встановленні співвідношення (1.13) [14, с. 24] (див. також [12, с. 1504 – 1508]), можна показати, що

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u} du = \int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u} du +$$

$$+ O\Bigg(|\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u |d\varphi'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)| \Bigg), \tag{24}$$

де $\lambda(u)=1-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3$. Оскільки $\int\limits_0^1\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du=O(1)$, то, враховуючи оцінки (23), із (24) отримаємо

$$\int\limits_0^1\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du=O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right).$$

Отже, усі інтеграли в (14) та (15) є збіжними. Тоді, застосовуючи теорему 1 із роботи Л. І. Баусова [15], приходимо до висновку, що інтеграл (12) є збіжний і для нього має місце оцінка

$$A(\varphi)=O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right).$$

Доведемо тепер збіжність інтеграла (13). Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int\limits_0^{\frac12}u\,|d\mu'(u)|\,,\qquad \int\limits_{\frac12}^{\infty}|u-1|\,|d\mu'(u)|\,, \tag{25}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\mu(u)|}{u}du,\qquad \int\limits_0^1\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u}du \tag{26}$$

і знайдемо оцінки зверху кожного з них.

Щоб оцінити перший інтеграл в (25), розіб'ємо проміжок $\left[0,\frac12\right]$ на дві частини: $\left[0,\frac1\delta\right]$ та $\left[\frac1\delta,\frac12\right]$, $\delta>2$. Із (9) при $u\in\left[0,\frac1\delta\right]$ матимемо

$$\mu''(u)=\left(-e^{-u}+2\gamma e^{-u}-2\theta e^{-u}-\gamma ue^{-u}+4\theta ue^{-u}-\theta u^2e^{-u}-\frac{2}{\delta}-u\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}.$$

Згідно з формулою (23) [4, с. 80] справедлива нерівність

$$|\mu''(u)|\le\left(\frac{6}{\delta^2}+\frac{12}{\delta}u+3u^2\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)},\ u\ge0. \tag{27}$$

З урахуванням (27), отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac1\delta}u|d\mu'(u)|\le\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac1\delta}\left(\frac{6}{\delta^2}u+\frac{12}{\delta}u^2+3u^3\right)du=\frac{K}{\delta^4\psi(\delta)}. \tag{28}$$

З нерівності (24) [4, с. 80] випливає

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du. \tag{29}$$

Об'єднуючи (28) і (29) та враховуючи, що внаслідок монотонного спадання функції $g(u) = u^3\psi(u)$

$$\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du \geq 1, \tag{30}$$

отримаємо оцінку

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du\right). \tag{31}$$

Оцінимо другий інтеграл з (25). Із (9) випливає, що при $u \geq \frac{1}{\delta}$

$$|d\mu'(u)| \leq \left(|\widetilde{\mu}(u)|\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2|\widetilde{\mu}'(u)|\frac{\delta|\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)} + |\widetilde{\mu}''(u)|\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\right)du, \tag{32}$$

де

$$\widetilde{\mu}(u) = 1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3. \tag{33}$$

Враховуючи нерівності

$$\widetilde{\mu}(u) \leq 0,\ \widetilde{\mu}'(u) < 0,\ \widetilde{\mu}''(u) < 0,$$

(див. формулу (20) із [4]) та очевидні нерівності

$$e^{-u} \leq 1, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad e^{-u} \geq 1 - u, \quad u \geq 0,$$

одержимо

$$|\widetilde{\mu}(u)| = -1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} + \theta u^2 e^{-u} + \frac{4}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{1}{6}u^3 \leq$$

$$\leq u\left(-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\right)+u^2\left(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\right)+u^3\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{6}\right),$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)|=-e^{-u}+\gamma e^{-u}-\gamma ue^{-u}+2\theta ue^{-u}-\theta u^2e^{-u}+\frac{4}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{1}{2}u^2\leq$$

$$\leq\left(-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\right)+u\left(1-2\gamma+2\theta+\frac{2}{\delta}\right)+u^2\left(\frac{3}{2}\gamma+\theta+\frac{1}{2}\right),$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)|=e^{-u}-2\gamma e^{-u}+\gamma ue^{-u}+2\theta e^{-u}-4\theta ue^{-u}+\theta u^2e^{-u}+\frac{2}{\delta}+u\leq$$

$$\leq\left(1-2\gamma+2\theta+\frac{2}{\delta}\right)+u\,(3\gamma+1)+\left(\theta u^2-4\theta u\right)e^{-u}\leq$$

$$\leq\left(1-2\gamma+2\theta+\frac{2}{\delta}\right)+u\,(3\gamma+1)+\left(\theta u^2+4\theta u\right)e^{-u}.$$

Далі, використовуючи оцінки

$$-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\leq\frac{2}{\delta^2};\quad \frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\leq\frac{2}{\delta};\quad \frac{\gamma}{2}+\frac{1}{6}\leq 1;\ \frac{3}{2}\gamma+\theta+\frac{1}{2}\leq 4;$$

$$3\gamma+1\leq 6;\ \left(4\theta u+\theta u^2\right)e^{-u}\leq 2u,\ u\geq 0,$$

будемо мати

$$|\widetilde{\mu}(u)|\leq\frac{2}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3,\ u\geq 0, \tag{34}$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)|\leq\frac{2}{\delta^2}+\frac{4}{\delta}u+4u^2,\ u\geq 0, \tag{35}$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)|\leq\frac{4}{\delta}+8u,\ u\geq 0. \tag{36}$$

З урахуванням співвідношень (32) – (36), отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1||d\mu'(u)|\leq\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u|d\mu'(u)|\leq\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\left(\frac{2}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3\right)\psi''(u)du+$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\left(\frac{2}{\delta^2}+\frac{4}{\delta}u+4u^2\right)|\psi'(\delta u)|du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\left(\frac{4}{\delta}+8u\right)\psi(\delta u)du\leq$$

$$\leq \frac{5\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^4\psi''(\delta u)du + \frac{20\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3|\psi'(\delta u)|du + \frac{12}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\psi(\delta u)du. \tag{37}$$

Проінтегруємо частинами перший інтеграл із правої частини співвідношення (37). Враховуючи (21) і застосовуючи теореми 3.12.1 та 3.16.1 [2] для функцій ψ із множини $\mathfrak{M}_C$, отримаємо

$$\frac{5\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^4\psi''(\delta u)du = \frac{5}{8}\frac{\frac{\delta}{2}|\psi'(\frac{\delta}{2})|}{\psi(\delta)} + \frac{20\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3|\psi'(\delta u)|du \leq$$

$$\leq K_1 + \frac{20\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3|\psi'(\delta u)|du. \tag{38}$$

Враховуючи (38), із (37) будемо мати

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\mu'(u)| \leq K_1 + \frac{40\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3|\psi'(\delta u)|du + \frac{12}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\psi(\delta u)du. \tag{39}$$

Проінтегруємо знову частинами перший інтеграл з правої частини останнього співвідношення, врахуємо (20) і застосуємо теорему 3.16.1 [2] для функцій $\psi \in \mathfrak{M}_C$, одержимо

$$\frac{40\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3|\psi'(\delta u)|du = \frac{5\psi(\frac{\delta}{2})}{\psi(\delta)} + \frac{120}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\psi(\delta u)du \leq$$

$$\leq K_2 + \frac{120}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\psi(\delta u)du, \ \delta > 2.$$

Враховуючи останнє співвідношення, із (39) матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\mu'(u)| \leq K_3 + \frac{K_4}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\psi(\delta u)du = K_3 + \frac{K_4}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} u^2\psi(\delta u)du +$$

$$+\frac{K_4}{\psi(\delta)}\int\limits_1^\infty u^2\psi(\delta u)du \le K_3+\frac{K_4\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}u^2du+\frac{K_4}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du\le$$

$$\le K_5+\frac{K_6}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du. \tag{40}$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (26), розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на три частини: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta},1\right]$, $\big[1,\infty\big)$. Враховуючи співвідношення (21) [4], згідно з яким

$$|\widetilde{\mu}(u)|\le\frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4,\quad u\ge 0, \tag{41}$$

одержимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{|\mu(u)|}{u}du=\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(-1+e^{-u}(1+\gamma u+\theta u^2)+\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)\frac{du}{u}\le$$

$$\le\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{3}{\delta^3}+\frac{3}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3\right)du\le\frac{K_1}{\delta^4\psi(\delta)},$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\mu(u)|}{u}du\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\left(\frac{3}{\delta^3}+\frac{3}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3\right)\psi(\delta u)du\le$$

$$\le\frac{K_2}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^3\psi(u)du.$$

Далі, скориставшись нерівністю (34), матимемо

$$\int\limits_1^\infty\frac{|\mu(u)|}{u}du\le\int\limits_1^\infty\left(\frac{2}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+u^2\right)\psi(\delta u)du\le\frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du.$$

Об'єднуючи останні співвідношення, одержуємо оцінку

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\mu(u)|}{u}du = O\bigg(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^3\psi(u)du + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du\bigg). \qquad (42)$$

Оцінимо другий інтеграл з (26). Діючи аналогічно до того, як було знайдено (24), прийдемо до формули

$$\int\limits_0^1 |\mu(1-u)-\mu(1+u)|\frac{du}{u} = \int\limits_0^1 |\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u} + O\big(H(\mu)\big), \qquad (43)$$

де

$$\lambda(u) = e^{-u}\big(1+\gamma u+\theta u^2\big) + \frac{4}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{1}{6}u^3,$$

$$H(\mu) = |\mu(0)| + |\mu(1)| + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty |u-1||d\mu'(u)|.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 |\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u} = O(1)$, то на підставі співвідношень (30), (31) та (40), із (43) отримуємо

$$\int\limits_0^1 |\mu(1-u)-\mu(1+u)|\frac{du}{u} =$$

$$= O\bigg(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^3\psi(u)du + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du\bigg). \qquad (44)$$

Використовуючи формули (31), (40), (42), (44) та враховуючи (30), згідно з теоремою 1 із роботи Л. І. Баусова [15], переконуємося в тому, що інтеграл (13) є збіжний і для нього має місце оцінка

$$A(\mu) = O\bigg(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^3\psi(u)du + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty u^2\psi(u)du\bigg). \qquad (45)$$

Таким чином, за виконання умов теореми 1, перетворення Фур'є $\widehat{\tau}_\beta(t)$ вигляду (4) функції $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$ є сумовним на всій числовій осі і для довільної функції $f \in C^\psi_{\beta,\infty}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність (5).

З урахуванням (5), (8) – (11), для величини (2) одержимо

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\tau}_\beta(t)dt\right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)(\widehat{\varphi}_\beta(t)+\widehat{\mu}_\beta(t))dt\right\|_C \le$$

$$\le \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C + O\big(\psi(\delta)A(\mu)\big). \tag{46}$$

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми 1.3.1 роботи О. І. Степанця [1, с. 54], неважко переконатися, в тому, що ряд Фур'є неперервної функції $f_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt$ має вигляд

$$S\left[f_\varphi\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)\frac{1}{\psi(k)}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big). \tag{47}$$

Внаслідок (47), враховуючи (8), можемо записати

$$S\left[f_\varphi\right] = \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}k+k^2+\frac{1}{6}k^3\right)\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big).$$

З іншого боку

$$S\left[\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}k+k^2+\frac{1}{6}k^3\right)\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big). \tag{48}$$

Згідно з співвідношенням 3.10.7 [2, с. 146] із включення $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ випливає, що $f_0^{(r)} \in C$, $r > 0$. На підставі повноти тригонометричної системи у просторі C, з рівностей (47) та (48) для усіх $x \in \mathbb{R}$ одержимо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\delta}\right) \widehat{\varphi}_{\beta}(t)dt = \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\left(\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right). \tag{49}$$

Із (46) на підставі формул (45) та (49) маємо (7).

Теорему 1 доведено.

Теорему 1 задовольняють, зокрема, функції $\psi(u)$, $u \geq 1$, вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^r}$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r \ln^{\alpha}(u+K)}$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r}\operatorname{arctg} u$, при $r > 3$, $K > 0$, $\alpha > 1$.

***Наслідок* 1.** *При $r > 3$ і $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(W^r_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\big)_C = \frac{1}{\delta^3}\sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}}\left\|\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right\|_C + \Delta(r),$$

де

$$\Delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\delta^r}, & 3 < r < 4; \\ \frac{\ln\delta}{\delta^4}, & r = 4; \\ \frac{1}{\delta^4}, & r > 4. \end{cases}$$

Теорема 2. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$, функція $g(u) = u^3\psi(u)$ опукла донизу на $[b, \infty)$ при деякому $b \geq 1$ і*

$$\int\limits_{1}^{\infty} u^4\psi(u)du < \infty, \tag{50}$$

то при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\Big)_C = \frac{1}{\delta^3}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^4}\right), \tag{51}$$

де $f_0^{(r)}(x)$, $r = 1,2,3$ — (r,β)*-похідні в розумінні Вейля–Надя при* $\beta = 0$.

Доведення. Як випливає з міркувань, викладених в [16, с. 64–67], при доведенні теореми достатньо обмежитися функціями ψ з множини $\mathfrak{M}$, які мають неперервну другу похідну $\psi''(t)$ на $[1,\infty)$.

Покажемо збіжність інтеграла $A(\tau)$. Аналогічно, як і при доведенні теореми 1, запишемо функцію $\tau(\cdot)$ вигляду (3), як суму функцій $\varphi(\cdot)$ та $\mu(\cdot)$, які визначаються відповідно формулами (8) та (9). Дослідимо на збіжність інтеграл (12). Для цього розіб'ємо множину $(-\infty,\infty)$ на дві підмножини $(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)$ і $[-\delta,\delta]$.

Знайдемо оцінку інтеграла $\int\limits_{|t|>\delta}|\widehat{\varphi}_\beta(t)|dt$. Виходячи з умови (50) та опуклості донизу функції $g(u)$, неважко переконатися, що

$$\lim_{u\to\infty}u^4\psi'(u)=\lim_{u\to\infty}u^3\psi(u)=0. \tag{52}$$

Застосувавши двічі інтегрування частинами і враховуючи, що внаслідок (8), $\varphi(0)=0$, $\quad\varphi'(0)=\frac{4}{3\delta^2}\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}$, а, згідно з (52), $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\varphi'(u)=0$, одержимо

$$\int\limits_0^\infty\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^\infty\right)\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^\infty\right)\varphi''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{t^2\delta^2\psi(\delta)}\left(\frac{4}{3}\psi(1)\cos\frac{\beta\pi}{2}+\frac{5}{2}\psi'(1)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right).$$

Звідки при $|t|>\delta$

$$\left|\int\limits_0^\infty\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^\infty\right)|\varphi''(u)|du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{53}$$

Оскільки функція $\varphi(u)$ опукла донизу на $[0, \frac{1}{\delta}]$, то, з урахуванням (8),

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} |\varphi''(u)|\, du = \varphi'\left(\frac{1}{\delta}\right) - \varphi'(0) = \frac{5\psi(1)}{2\delta^2\psi(\delta)}. \tag{54}$$

При $u \in \left[\frac{1}{\delta}, \infty\right)$, згідно з (16), можемо записати

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} |\varphi''(u)| du \le \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{2}{\delta} + u\right) \psi(\delta u) du +$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta}u + \frac{1}{2}u^2\right) |\psi'(\delta u)| du +$$

$$+\frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{4}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{1}{6}u^3\right) \psi''(\delta u) du \le \frac{3}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\psi(\delta u) du +$$

$$+\frac{23\delta}{3\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u^2 |\psi'(\delta u)| du + \frac{5\delta^2}{2\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u^3 \psi''(\delta u) du. \tag{55}$$

Застосувавши метод інтегрування частинами до останніх двох інтегралів з правої частини нерівності (55), врахувавши рівності (20), (21) та умову (50), із (55) отримаємо

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} |\varphi''(u)| du \le \frac{K_1}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{K_2}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\psi(\delta u) du = \frac{K_1}{\delta^2\psi(\delta)} +$$

$$+\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)} \int_1^{\infty} u\psi(u) du \le \frac{K_3}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{56}$$

З формул (53), (54) та (56) одержимо

$$\int\limits_{|t|>\delta} |\widehat{\varphi}_\beta(t)|dt = \int\limits_{|t|>\delta} \left|\int\limits_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{57}$$

Знайдемо оцінку інтеграла $\int\limits_{|t|\le\delta} |\widehat{\varphi}_\beta(t)|dt$. Враховуючи (8) та (50), отримаємо

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left|\int\limits_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \le 2\delta\int\limits_0^\infty |\varphi(u)|du =$$

$$=\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{u^3}{6}\right)\psi(1)du+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{u^3}{6}\right)\psi(\delta u)du\right)\le$$

$$\le\frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)}+\frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\infty u^3\psi(u)du\le\frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{58}$$

Із (57) та (58) випливає оцінка

$$A(\varphi) = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right).$$

Отже, перетворення $\widehat{\varphi}_\beta(t)$ вигляду (10) є сумовним на всій числовій осі.

Покажемо тепер збіжність інтеграла (13). З цією метою розіб'ємо множину $(-\infty,\infty)$ на дві частини: $[-\delta,\delta]$ і $(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)$. Тоді

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\delta}\left|\int\limits_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt := I_1+I_2.$$

Оцінимо інтеграл I_1. Враховуючи нерівність (41) та умову (50), одержуємо

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \right) \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{2\delta}{\pi} \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \right) |\mu(u)| du \leq \frac{2\delta\psi(1)}{\pi\psi(\delta)} \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) du + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) \psi(\delta u) du \right) \leq$$

$$\leq \frac{K_1}{\delta^4 \psi(\delta)} + \frac{K_2}{\delta^4 \psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\infty} u^4 \psi(u) du = \frac{K_3}{\delta^4 \psi(\delta)}. \tag{59}$$

Оцінимо далі інтеграл I_2. Застосовуючи інтегрування частинами і враховуючи, що з (9), $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = \left(1 - \gamma - \frac{4}{3\delta^2}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}$, а, згідно з (52), $\lim\limits_{u\to\infty} \mu(u) = \lim\limits_{u\to\infty} \mu'(u) = 0$, то

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du = \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \right) \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du =$$

$$= -\frac{1}{t^2} \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \right) \mu''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du + \frac{1}{t^2} \widetilde{\mu}\left(\frac{1}{\delta}\right) \frac{\delta\psi'(1)}{\psi(\delta)} \cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{t^2} \left(-1 + \gamma + \frac{4}{3\delta^2} \right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \cos\frac{\beta\pi}{2},$$

де $\widetilde{\mu}(u)$ означається рівністю (33). Звідси, враховуючи оцінку $\gamma - 1 + \frac{4}{3\delta^2} \leq \frac{3}{\delta^3}$ та нерівність (34) при $u = \frac{1}{\delta}$, одержимо

$$\left| \int_0^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| \leq \frac{1}{t^2} \left(\int_0^{\frac{1}{\delta}} + \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty \right) |\mu''(u)| du + \frac{K_1}{t^2 \delta^3 \psi(\delta)}. \tag{60}$$

При $u \in \left[0, \frac{1}{\delta}\right]$ скористаємося нерівністю (див. [4, с. 80])

$$|\mu''(u)| \leq \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta} u + 3u^2 \right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)},$$

тоді

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} |\mu''(u)| du \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta} u + 3u^2 \right) du = \frac{K_2}{\delta^3 \psi(\delta)}. \tag{61}$$

Нехай далі $u \in \left[\frac{1}{\delta}, \infty\right)$. Скориставшись співвідношеннями (32), (52) даної роботи, а також оцінками (21) – (23) [4], будемо мати

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^\infty |\mu''(u)| du \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) \delta^2 \psi''(\delta u) du +$$

$$+ \frac{2}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty \left(\frac{3}{\delta^3} + \frac{3}{2\delta^2} u + \frac{6}{\delta} u^2 + 2u^3 \right) \delta |\psi'(\delta u)| du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta} u + 3u^2 \right) \psi(\delta u) du \leq$$

$$\leq \frac{9\delta^2}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty u^4 \psi''(\delta u) du + \frac{25\delta}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty u^3 |\psi'(\delta u)| du + \frac{21}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty u^2 \psi(\delta u) du.$$

Застосовуючи до перших двох інтегралів останньої нерівності метод інтегрування частинами та враховуючи (52), одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}|\mu''(u)|du \leq \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}+\frac{K_4}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}u^2\psi(\delta u)du = \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}+\frac{K_4}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}u^2\psi(u)du.$$

Оскільки функція $u^2\psi(u)$ сумовна на $[1,\infty)$, то з останнього співвідношення випливає, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}|\mu''(u)|du \leq \frac{K_5}{\delta^3\psi(\delta)}. \qquad (62)$$

З (60) – (62) одержимо

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \leq \frac{K}{t^2\delta^3\psi(\delta)}.$$

Тоді

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\delta}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = O\left(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\right). \qquad (63)$$

Із (59) та (63) випливає оцінка

$$A(\mu) = O\left(\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\right). \qquad (64)$$

Отже, інтеграли (12) та (13) збіжні і на підставі (5) приходимо до рівності (46). Із (46), (64) та рівності (49), яка за виконання умови теореми 2 також має місце, одержуємо (51). Теорему 2 доведено.

Умови теореми 2 задовольняють, наприклад, функції $\psi(u)$, $u \geq 1$ вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^r}$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r \ln^\alpha(u+K)}$, при $r > 5$, $K > 0$, $\alpha > 1$; $\psi(u) = u^r e^{-Ku^\alpha}$, $K > 0, \alpha > 0, r \in \mathbb{R}$.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{*}$, *функція* $g(u) = u^3\psi(u)$ *опукла донизу на* $[b, \infty)$ *при деякому* $b \geq 1$ *і*

$$\lim_{u\to\infty} \mu(\psi; u) = \infty,$$

де величина $\mu(\psi; u)$ *означена формулою* (1). *Тоді при* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність* (51).

Доведення наслідку 2 проводиться аналогічно до доведення наслідку 1 [13].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
3. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I // Berichte Acad. d. Wiss. — Leipzig, 1938. — **90**. — S. 103 – 134.
4. *Кальчук І. В., Грабова У. З.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій малої гладкості тригармонійними інтегралами Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 72 – 93.
5. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, №1. — С. 11 – 14.
6. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **74**, №1. — С. 17 – 20.
7. *Sz.–Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183 – 188.
8. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Мат. заметки. — 1973. — **13**, №1. — С. 21 – 28.
9. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — **153**, №5. — С. 995 – 998.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №1. — С. 43 – 52.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №9. — С. 1213 – 1219.

12. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю.І.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1612 – 1629.

13. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій з класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1497 – 1515.

14. *Новикова А. К.* О приближении функций в пространствах C и L // Вопросы суммирования рядов Фурье. — Киев, 1985. — С. 14 – 51. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).

15. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15 – 31.

16. *Кальчук І. В.* Наближення диференційовних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів та інтегралів Фур'є: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Луцьк, 2007. — 131 с.