Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 111–123

УДК 531.39; 517.977

Стабилизация движения вращающегося тела с упругой пластиной

А.Л. Зуев [1,2], ***Ю.В. Новикова*** [1]

[1] *Институт математики НАН Украины, Киев; alexander.zuyev@gmail.com, yuliya.novikova.88@mail.ru*
[2] *Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg; zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de*

A mechanical system consisting of a rigid body and an elastic Kirchhoff plate is considered under the action of three independent controls. The equations of motion for a nonlinear model are derived in the form of a system of ordinary and partial differential equations. The operator form of this problem is presented as an abstract differential equation in a Hilbert space. A feedback control law is constructed such that the corresponding infinitesimal generator is dissipative.

Розглянуто механічну систему, яка складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа, за наявності трьох незалежних керувань. Для такої нелінійної моделі одержано рівняння руху у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними. Сформульовано операторне зображення цієї системи у вигляді абстрактного диференціального рівняння у гільбертовому просторі. Побудовано керування зі зворотним зв'язком, що забезпечує умову дисипативності відповідного інфінітезимального генератора.

1. Введение

Задачи аэрокосмической индустрии стимулируют развитие методов математического моделирования и управления движением сложных механических систем с упругими элементами.

© **А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова, 2014**

В работах [4, 7] установлено, что на динамику систем с распределенными параметрами существенно влияют колебания упругих элементов конструкции, поэтому задачи управляемости и устойчивости для таких механических систем не могут быть решены в рамках модели абсолютно твердого тела. Моделированию сложных механических систем с упругими элементами и вопросам их стабилизации в конечномерной и бесконечномерной постановках посвящен ряд исследований отечественных и зарубежных авторов. Не претендуя на полноту, выделим работы [1, 9, 10].

Цель данной работы — решение задачи стабилизации положения равновесия системы, состоящей из твердого тела и упругой пластины Кирхгофа.

2. Нелинейная модель вращательного движения

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из твердого тела и прикрепленной к нему упругой пластины (см. рисунок).

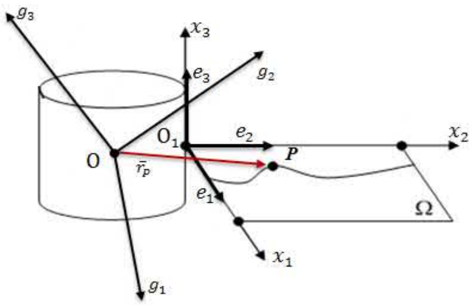

Рис . Твердое тело с упругой пластиной.

Предположим, что с телом связана декартова система координат $O_1x_1x_2x_3$ с ортами (e_1, e_2, e_3). Пусть неподвижная точка O (центр масс твердого тела) имеет координаты $(-d_1, -d_2, -d_3)$ в системе $O_1x_1x_2x_3$. Предположим, что оси, коллинеарные векторам e_i, являются главными осями инерции твердого тела. Обозначим через (g_1, g_2, g_3) орты неподвижной системы координат. Предполагается, что к твердому телу приложен момент сил управления $M = f_1e_1+$

$+f_2e_2+f_3e_3$. Здесь рассматривается задача построения управления $(f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbb{R}^3$ в виде обратной связи по состоянию для демпфирования колебаний системы и стабилизации каждого орта e_i в направлении g_i, $i=\overline{1,3}$. Отметим, что для модели абсолютно твердого тела аналогичная задача решена в [2].

Будем полагать, что координату произвольной точки P на срединной поверхности пластины можно записать в виде $P=(x_1, x_2, w(x_1,x_2,t))$, где $(x_1,x_2)\in\Omega=[0,l_1]\times[0,l_2]$. Тогда уравнение колебаний тонкой изотропной пластины представимо в виде [3, 10]

$$\ddot{w}+a^2\Delta^2 w=(x_1+d_1)\dot{\omega}_2-(x_2+d_2)\dot{\omega}_1, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, $a^2=\frac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)}$ — параметр изгибной жесткости, ρ — поверхностная плотность материала пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины, $\omega=\omega_1e_1+\omega_2e_2+\omega_3e_3$ — вектор угловой скорости твердого тела, точками обозначены субстанциальные производные по времени t. Правая часть дифференциального уравнения (1) описывает силу инерции, обусловленную переносным движением твердого тела (см. [5]). В формуле (1) учтены только линейные слагаемые относительно перемещений, угловой скорости и производных этих величин, т.е. рассматривается модель малых колебаний пластины и медленных вращений тела.

Рассмотрим краевые условия, соответствующие шарнирно опертой на границе пластине:

$$w(x_1,x_2,t)|_{\partial\Omega}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0,x_1=l_1}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0,x_2=l_2}=0. \tag{2}$$

Запишем уравнение изменения кинетического момента в виде

$$\dot{K}+\omega\times K=M. \tag{3}$$

В уравнении (3) кинетический момент системы $K=K_1+K_2$, где $K_1=I\omega=I_1\omega_1e_1+I_2\omega_2e_2+I_3\omega_3e_3$ — кинетический момент твердого тела, $K_2=\rho\int\limits_\Omega r_P\times v_P dx$ — кинетический момент пластины, I — центральный тензор инерции твердого тела.

Вычислим кинетический момент K_2 пластины. Для этого найдем скорость точки P и радиус-вектор r_P, соединяющий центр масс твердого тела (точку O) с точкой P пластины:

$$v_P=v_{\text{пер}}+v_{\text{отн}}=\omega\times r_P+\dot{w}e_3, \tag{4}$$

где

$$r_P = (x_1 + d_1)e_1 + (x_2 + d_2)e_2 + (w + d_3)e_3. \tag{5}$$

Таким образом, из формулы (4) с учетом (5) получим

$$v_P = (\omega_2(d_3 + w) - \omega_3(d_2 + x_2))e_1 + (\omega_3(d_1 + x_1) - \omega_1(d_3 + w))e_2 + \\ + (\omega_1(d_2 + x_2) - \omega_2(d_1 + x_1) + \dot{w})e_3. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$K_2 = \int_\Omega \rho(K_{21}e_1 + K_{22}e_2 + K_{23}e_3)dx, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} K_{21} &= \omega_1[(x_2 + d_2)^2 + (w + d_3)^2] - \omega_2(x_1 + d_1)(x_2 + d_2) - \\ &\quad - \omega_3(x_1 + d_1)(w + d_3) + \dot{w}(x_2 + d_2), \\ K_{22} &= -\omega_1(x_1 + d_1)(x_2 + d_2) + \omega_2[(x_1 + d_1)^2 + (w + d_3)^2] - \\ &\quad - \omega_3(x_2 + d_2)(w + d_3) - \dot{w}(x_1 + d_1), \\ K_{23} &= -\omega_1(x_1 + d_1)(w + d_3) - \omega_2(x_2 + d_2)(w + d_3) + \\ &\quad + \omega_3[(x_1 + d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2]. \end{aligned}$$

Определим тензор инерции пластины в недеформированном состоянии:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$J_{11} = \rho \int_\Omega \left((x_2 + d_2)^2 + d_3^2\right) dx, \quad J_{12} = J_{21} = -\rho \int_\Omega (x_1 + d_1)(x_2 + d_2)dx,$$

$$J_{22} = \rho \int_\Omega \left((x_1 + d_1)^2 + d_3^2\right) dx, \quad J_{23} = J_{32} = -\rho d_3 \int_\Omega (x_2 + d_2)dx,$$

$$J_{33} = \rho \int_\Omega \left((x_1 + d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2\right) dx, \quad J_{31} = J_{13} = -\rho d_3 \int_\Omega (x_1 + d_1)dx.$$

Для случая малых колебаний ограничимся рассмотрением только линейных слагаемых в формуле для суммарного кинетического момента:

$$K = (I+J)\omega + \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2+d_2)\,dx e_1 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1+d_1)\,dx e_2. \tag{8}$$

Тогда

$$\dot{K} = \dot{K}_1 e_1 + \dot{K}_2 e_2 + \dot{K}_3 e_3,$$

$$\dot{K}_1 = (J_{11}+I_1)\dot{\omega}_1 + J_{12}\dot{\omega}_2 + J_{13}\dot{\omega}_3 + \rho \int\limits_{\Omega} \ddot{w}(x_2+d_2)dx,$$

$$\dot{K}_2 = J_{21}\dot{\omega}_1 + (J_{22}+I_2)\dot{\omega}_2 + J_{23}\dot{\omega}_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \ddot{w}(x_1+d_1)dx,$$

$$\dot{K}_3 = J_{31}\dot{\omega}_1 + J_{32}\dot{\omega}_2 + (J_{33}+I_3)\dot{\omega}_3, \tag{9}$$

$$\omega \times K = \Big(\omega_2\,(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3) -$$

$$-\omega_3\big(J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1+d_1)\,dx)\Big)e_1 +$$

$$+\Big(\omega_3(\rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2+d_2)\,dx + (J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\big) -$$

$$-\omega_1\big(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3\big)\Big)e_2 +$$

$$+\big(\omega_1\Big(J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1+d_1)\,dx\big) -$$

$$-\omega_2\Big((J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 + \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2+d_2)\,dx\Big)\Big)e_3. \tag{10}$$

Подставим в выражения (9) значение $\ddot{w}$ из уравнения (1). Применяя формулы (9) и (10), записываем уравнение изменения кинетического момента вида (3) в покомпонентном виде:

$$\begin{gathered}
\left(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2\right)\dot\omega_1+J_{13}\dot\omega_3=f_1+\omega_3\left[J_{21}\omega_1+(J_{22}+I_2)\omega_2+J_{23}\omega_3\right]-\\
-\omega_2\left[J_{31}\omega_1+J_{32}\omega_2+(J_{33}+I_3)\omega_3\right]+\int\limits_\Omega\rho\{a^2(x_2+d_2)\Delta^2 w-\omega_3\dot w(x_1+d_1)\}dx,\\
\left(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2\right)\dot\omega_2+J_{23}\dot\omega_3=f_2+\omega_1\left[J_{31}\omega_1+J_{32}\omega_2+(J_{33}+I_3)\omega_3\right]-\\
-\omega_3\left[(J_{11}+I_1)\omega_1+J_{12}\omega_2+J_{13}\omega_3\right]-\int\limits_\Omega\rho\{a^2(x_1+d_1)\Delta^2 w+\omega_3\dot w(x_2+d_2)\}dx,\\
J_{31}\dot\omega_1+J_{32}\dot\omega_2+(J_{33}+I_3)\dot\omega_3=f_3-\omega_1\left[J_{21}\omega_1+(J_{22}+I_2)\omega_2+J_{23}\omega_3\right]+\\
+\omega_2\left[(J_{11}+I_1)\omega_1+J_{12}\omega_2+J_{13}\omega_3\right]+\int\limits_\Omega\rho\{(x_1+d_1)\omega_1+(x_2+d_2)\omega_2\}\dot w dx.
\end{gathered}\tag{11}$$

Разрешим эти дифференциальные уравнения относительно производных угловой скорости. Для этого вычислим матрицу $\hat J=(\hat J_{ki})$, обратную матрице коэффициентов при $\dot\omega_i$ в системе (11):

$$\begin{gathered}
\hat J_{11}=\frac{(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33})-J_{23}^2}{D},\ \hat J_{12}=\hat J_{21}=\frac{J_{13}J_{23}}{D},\\
\hat J_{13}=\hat J_{31}=-\frac{(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)J_{13}}{D},\ \hat J_{22}=\frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33})-J_{13}^2}{D},\\
\hat J_{23}=\hat J_{32}=-\frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)J_{23}}{D},\ \hat J_{33}=\frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)}{D},\\
D=(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33})-J_{13}^2(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)-J_{23}^2(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2).
\end{gathered}\tag{12}$$

Отметим, что знаменатель D в формулах (12) строго положителен, по крайней мере, для достаточно малых моментов инерции пластины J_{ik} по сравнению с моментами инерции тела–носителя I_i. В частности, это условие выполнено при достаточно малой поверхностной плотности ρ (т.е. для достаточно тонких пластин). Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $D\neq 0$. Тогда дифференциальные уравнения (11) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}\dot\omega_1\\ \dot\omega_2\\ \dot\omega_3\end{pmatrix}=\hat J\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix},\tag{13}$$

где ϕ_i — правая часть i-го уравнения в системе (11).

Запишем кинематические уравнения Пуассона, соответствующие условиям неподвижности базиса (g_1, g_2, g_3) в инерциальном пространстве:

$$\dot{g}_i = -\omega \times g_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{14}$$

Пусть $g_i = g_{i1}e_1 + g_{i2}e_2 + g_{i3}e_3$, тогда в координатной форме система уравнений (14) примет вид

$$\dot{g}_{i1} = \omega_3 g_{i2} - \omega_2 g_{i3},\ \dot{g}_{i2} = \omega_1 g_{i3} - \omega_3 g_{i1},\ \dot{g}_{i3} = \omega_2 g_{i1} - \omega_1 g_{i2},\ i = \overline{1,3}. \tag{15}$$

Для декартовых реперов (g_1, g_2, g_3) и (e_1, e_2, e_3) одинаковой ориентации система дифференциальных уравнений (1), (2), (11), (15) имеет следующее частное решение при $f_1 = f_2 = f_3 = 0$:

$$w(x,t) = 0, \quad \omega_i(t) = 0, \quad g_{ij}(t) = \delta_{ij}, \qquad i,j = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Для исследования задачи стабилизации положения равновесия вида (16) введем переменные $\widetilde{g}_{ij}(t) = g_{ij}(t) - \delta_{ij}$ и рассмотрим уравнения возмущенного движения для (15):

$$\begin{aligned}
&\dot{\widetilde{g}}_{11} = \omega_3\widetilde{g}_{12} - \omega_2\widetilde{g}_{13}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{12} = \omega_1\widetilde{g}_{13} - \omega_3(\widetilde{g}_{11}+1), \quad \dot{\widetilde{g}}_{13} = \omega_2(\widetilde{g}_{11}+1) - \omega_1\widetilde{g}_{12},\\
&\dot{\widetilde{g}}_{21} = \omega_3(\widetilde{g}_{22}+1) - \omega_2\widetilde{g}_{23}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{22} = \omega_1\widetilde{g}_{23} - \omega_3\widetilde{g}_{21}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{23} = \omega_2\widetilde{g}_{21} - \omega_1(\widetilde{g}_{22}+1),\\
&\dot{\widetilde{g}}_{31} = \omega_3\widetilde{g}_{32} - \omega_2(\widetilde{g}_{33}+1),\ \dot{\widetilde{g}}_{32} = \omega_1(\widetilde{g}_{33}+1) - \omega_3\widetilde{g}_{31},\ \dot{\widetilde{g}}_{33} = \omega_2\widetilde{g}_{31} - \omega_1\widetilde{g}_{32}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова:

$$V = T + U + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \widetilde{g}_{ij}^2, \tag{18}$$

где $T = \dfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \displaystyle\int_\Omega \rho v_P^2 dx)$ — кинетическая энергия системы, $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \rho a^2 (\triangle w(x,t))^2 dx$ — потенциальная энергия упругих деформаций пластины в рамках модели Кирхгофа, α_i — положительные константы. В дальнейшем при вычислении v_P^2 ограничимся записью квадратичных членов относительно фазовых переменных в функционале V для случая малых колебаний системы:

$$2V = (I_1 + J_{11})\omega_1^2 + (I_2 + J_{22})\omega_2^2 + (I_3 + J_{33})\omega_3^2 + 2J_{12}\omega_1\omega_2 + 2J_{13}\omega_1\omega_3 +$$
$$+ 2J_{23}\omega_2\omega_3 + \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \tilde{g}_{ij}^2 +$$
$$+ \int\limits_\Omega \rho \left\{ \dot{w}^2 + 2\dot{w}[\omega_1(d_2 + x_2) - \omega_2(d_1 + x_1)] + a^2(\Delta w)^2 \right\} dx. \qquad (19)$$

Вычислим производную функционала (18) в силу системы уравнений возмущенного движения (1), (11), (17):

$$\dot{V} = \left(\dot{K}_1 - \alpha_2\tilde{g}_{23} + \alpha_3\tilde{g}_{32}\right)\omega_1 + \left(\dot{K}_2 + \alpha_1\tilde{g}_{13} - \alpha_3\tilde{g}_{31}\right)\omega_2 +$$
$$+ \left(\dot{K}_3 + \alpha_2\tilde{g}_{21} - \alpha_1\tilde{g}_{12}\right)\omega_3 + \int_\Omega \rho a^2 \left\{ \Delta w \Delta\dot{w} - \dot{w}\Delta^2 w \right\} dx, \qquad (20)$$

где выражения $\dot{K}_i$ заданы формулами (9). Если все частные производные функции $w(x,t)$ четвертого порядка по x и первого порядка по t непрерывны и выполнены краевые условия (2), то интегрирование по частям в формуле (20) приводит к такому тождеству:

$$\int_\Omega \left\{ \Delta w \Delta\dot{w} - \dot{w}\Delta^2 w \right\} dx = 0.$$

Используя его и выражая $\dot{K}_i$ из уравнения (3), перепишем формулу (20) в виде

$$\dot{V} = (f_1 - (\omega \times K)_1 - \alpha_2\tilde{g}_{23} + \alpha_3\tilde{g}_{32})\,\omega_1 +$$
$$+ (f_2 - (\omega \times K)_2 + \alpha_1\tilde{g}_{13} - \alpha_3\tilde{g}_{31})\,\omega_2 +$$
$$+ (f_3 - (\omega \times K)_3 + \alpha_2\tilde{g}_{21} - \alpha_1\tilde{g}_{12})\,\omega_3,$$

где $(\omega \times K)_i$ — i-я координата вектора $\omega \times K$ из (10) в базисе (e_1, e_2, e_3).

Для стабилизации тривиального решения системы уравнений возмущенного движения (1), (2), (11), (17) определим управление с обратной связью из условия

$$\dot{V} = -k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \le 0, \qquad (21)$$

где k — положительная константа. Легко видеть, что условию (21) соответствует выбор управления:

$$\begin{aligned} f_1 &= -k\omega_1 + (\omega \times K)_1 + \alpha_2 \tilde{g}_{23} - \alpha_3 \tilde{g}_{32}, \\ f_2 &= -k\omega_2 + (\omega \times K)_2 - \alpha_1 \tilde{g}_{13} + \alpha_3 \tilde{g}_{31}, \\ f_3 &= -k\omega_3 + (\omega \times K)_3 + \alpha_1 \tilde{g}_{12} - \alpha_2 \tilde{g}_{21}. \end{aligned} \tag{22}$$

3. Основной результат

Для формулировки основного результата запишем уравнение возмущенного движения рассматриваемой механической системы в операторном виде. Введем вещественное линейное пространство $H = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^{12}$, элементами которого являются векторы

$$\xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} : \ u \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega), \ v \in L^2(\Omega), \ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{12} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9.$$

Здесь $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций $u \in H^2(\Omega)$ с нулевыми следами на $\partial\Omega$ (см., например, [6]).

Скалярное произведение элементов

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ \omega^1 \\ \tilde{g}^1 \end{pmatrix} \in H \ \text{ и } \ \xi^2 = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ \omega^2 \\ \tilde{g}^2 \end{pmatrix} \in H$$

зададим в виде

$$\langle \xi^1, \xi^2 \rangle_H = \int_\Omega \rho \Big\{ a^2 \Delta u^1(x) \Delta u^2(x) + v^1(x) v^2(x) +$$

$$+ (\omega_1^2 v^1(x) + \omega_1^1 v^2(x))(d_2 + x_2) - (\omega_2^2 v^1(x) + \omega_2^1 v^2(x))(d_1 + x_1) \Big\} dx +$$

$$+ \Big((I + J)\omega^1, \omega^2 \Big) + \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \tilde{g}_{ij}^1 \tilde{g}_{ij}^2. \tag{23}$$

С помощью неравенств Коши–Буняковского и Фридрихса (см. [6]) можно показать, что норма $\|\xi\|_H = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_H}$ эквивалентна стандартной норме в $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^{12}$. Таким образом, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ — гильбертово пространство.

Определим неограниченный оператор $A : D(A) \to H$ и линейный ограниченный оператор $B : \mathbb{R}^3 \to H$ следующим образом:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} u^\xi \\ v^\xi \\ \omega^\xi \\ \tilde{g}^\xi \end{pmatrix} \in H, \tag{24}$$

$$B : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \mapsto Bf = \begin{pmatrix} u^f \\ v^f \\ \omega^f \\ \tilde{g}^f \end{pmatrix} \in H, \tag{25}$$

где

$$u^\xi(x) = v(x),\ v^\xi(x) = -a^2\Delta^2 u(x) + (x_1 + d_1)\omega_2^\xi - (x_2 + d_2)\omega_1^\xi,$$

$$\begin{aligned}\omega_i^\xi = (\hat{J}_{i1}\omega_3 - \hat{J}_{i3}\omega_1)\left[J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right] + \\ +(\hat{J}_{i2}\omega_1 - \hat{J}_{i1}\omega_2)\left[J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right] + \\ +(\hat{J}_{i3}\omega_2 - \hat{J}_{i2}\omega_3)\left[(J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right] +\end{aligned}$$

$$+\int_\Omega \rho \left(\hat{J}_{i3}[(x_1 + d_1)\omega_1 + (x_2 + d_2)\omega_2] - [\hat{J}_{i1}(x_1 + d_1) + \hat{J}_{i2}(x_2 + d_2)]\omega_3\right) v(x)dx +$$

$$+\int_\Omega \rho a^2 \left(\hat{J}_{i1}(x_2 + d_2) - \hat{J}_{i2}(x_1 + d_1)\right) \Delta^2 u(x)dx, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\tilde{g}_{11}^\xi = \omega_3\widetilde{g}_{12} - \omega_2\widetilde{g}_{13},\ \tilde{g}_{12}^\xi = \omega_1\widetilde{g}_{13} - \omega_3(\widetilde{g}_{11} + 1),\ \tilde{g}_{13}^\xi = \omega_2(\widetilde{g}_{11} + 1) - \omega_1\widetilde{g}_{12},$$

$$\tilde{g}_{21}^\xi = \omega_3(\widetilde{g}_{22} + 1) - \omega_2\widetilde{g}_{23},\ \tilde{g}_{22}^\xi = \omega_1\widetilde{g}_{23} - \omega_3\widetilde{g}_{21},\ \tilde{g}_{23}^\xi = \omega_2\widetilde{g}_{21} - \omega_1(\widetilde{g}_{22} + 1),$$

$$\tilde{g}_{31}^\xi = \omega_3\widetilde{g}_{32} - \omega_2(\widetilde{g}_{33} + 1),\ \tilde{g}_{32}^\xi = \omega_1(\widetilde{g}_{33} + 1) - \omega_3\widetilde{g}_{31},\ \tilde{g}_{33}^\xi = \omega_2\widetilde{g}_{31} - \omega_1\widetilde{g}_{32},$$

$$u^f(x) = 0,\ v^f(x) = \sum_{k=1}^{3} \left(\hat{J}_{2k}(x_1 + d_1) - \hat{J}_{1k}(x_2 + d_2)\right) f_k,$$

$$\tilde{g}^f = 0,\ \omega_i^f = \sum_{k=1}^{3} \hat{J}_{ik} f_k, \quad i = \overline{1,3},$$

коэффициенты $\hat{J}_{ik}$ приведены в (12). Область определения нелинейного оператора A имеет вид

$$D(A) = \left\{\xi \in H \mid u \in \mathring{H}^4(\Omega),\ v \in \mathring{H}^2(\Omega),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \tag{26}$$

Рассмотрим нелинейную управляемую систему, заданную абстрактным дифференциальным уравнением в пространстве H:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = A\xi(t) + Bf, \tag{27}$$

где $\xi(t) \in H$ – состояние системы, $f \in \mathbb{R}^3$ – управление, операторы A и B заданы соотношениями (24) и (25). Если функции $w(x,t)$, $\omega(t)$, $\tilde{g}(t)$ определяют классическое решение системы (1), (2), (13), (17) с управлением $f = f(t)$ на полуинтервале $t \in \mathcal{I} = [t_0, T)$, $T \le +\infty$, то непосредственной подстановкой убеждаемся, что соответствующая функция

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} w(\cdot,t) \\ \dot{w}(\cdot,t) \\ \omega(t) \\ \tilde{g}(t) \end{pmatrix} \in D(A) \subset H \tag{28}$$

удовлетворяет уравнению (27) с $f = f(t)$ на полуинтервале $t \in \mathcal{I}$. Таким образом, будем рассматривать дифференциальное уравнение (27) как операторное представление уравнений возмущенного движения (1), (2), (13), (17).

Запишем управление с обратной связью (22) с помощью оператора $G : H \to \mathbb{R}^3$, действующего на вектор состояния ξ системы (27):

$$G : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto f = Gx = \begin{pmatrix} f_1^\xi \\ f_2^\xi \\ f_3^\xi \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$f_1^\xi = -k\omega_1 + \alpha_2\tilde{g}_{23} - \alpha_3\tilde{g}_{32} + \omega_2\left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right) -$$
$$-\omega_3\big(J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \int_\Omega \rho\,(x_1 + d_1)\,v(x)dx\big),$$
$$f_2^\xi = -k\omega_2 - \alpha_1\tilde{g}_{13} + \alpha_3\tilde{g}_{31} - \omega_1\left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right) +$$
$$+\omega_3\big(\int_\Omega \rho\,(x_2 + d_2)\,v(x)dx + (J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\big),$$
$$f_3^\xi = -k\omega_3 + \alpha_1\tilde{g}_{12} - \alpha_2\tilde{g}_{21} + \omega_1\left(J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right) -$$
$$-\omega_2\left((J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right) -$$

$$-\int_\Omega \rho[(x_1+d_1)\,\omega_1+(x_2+d_2)\,\omega_2]v(x)dx,$$

где k, α_i — произвольные положительные константы.

Систему (27) с обратной связью $f = G\xi$ записываем в виде

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = F\xi(t), \quad F = A + BG, \tag{30}$$

где нелинейный неограниченный оператор $F : D(F) \to H$ имеет плотную в H область определения $D(F) = D(A)$.

Как отмечено выше, классическим решениям системы (1), (2), (13), (17) соответствуют функции $\xi(t) \in D(A)$ по правилу (28). При этом условие $\dot V \le 0$ для производной функционала V в силу системы (1), (2), (13), (17) с обратной связью (22) переходит в условие

$$\langle F\xi, \xi\rangle_H \le 0 \tag{31}$$

для соответствующего элемента $\xi \in D(F) = D(A)$ по определению функционала V в (19) и скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ в (23). Таким образом, с использованием неравенства (31) устанавливается следующий результат.

Теорема 3.1. *Оператор $F : D(F) \to H$ в (30) является диссипативным, $\overline{D(F)} = H$.*

Обозначим через I_H единичный оператор в H. Если при нектором $\lambda > 0$ образ оператора $I_H - \lambda F$ совпадает с H и F замкнут, то из теоремы 3.1 следует, что оператор F является инфинитезимальным генератором непрерывной полугруппы нелинейных операторов $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ в H на основании нелинейного обобщения теоремы Люмера–Филлипса (см. [8, с. 231]). Тогда обобщенное решение задачи Коши для уравнения (30) с начальным условием $\xi(0) = \xi^0$ определено формулой

$$\xi(t) = S(t)\xi^0, \quad t \ge 0$$

для любого $\xi^0 \in H$, и такое решение является классическим при $\xi^0 \in D(F)$.

Поскольку при сделанных предположениях диссипативное неравенство $\langle F\xi, \xi\rangle_H \le 0$ ($\dot V \le 0$) выполняется, то решение $\xi = 0$ абстрактного дифференциального уравнения (30) устойчиво по Ляпунову.

4. Выводы

Рассмотрена математическая модель вращательного движения механической системы, которая состоит из твердого тела и упругой пластины Кирхгофа. Пластина на границе своей области закреплена шарнирно. Получена нелинейная система уравнений движения рассматриваемой модели. Для системы с обратной связью, записанной в операторном виде, доказано свойство диссипативности инфинитезимального генератора.

Из проведенных рассуждений не следует свойство *асимптотической* устойчивости, и вопрос о предельном поведении решений $\xi(t)$ уравнения (30) при $t \to +\infty$ требует дальнейшего исследования.

[1] *Гуляев В.И.* Динамика упругих систем при сложном движении // Прикладная механика. — 2003. — **39**, № 5. — С. 28–51.

[2] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.

[3] *Зуев А.Л., Новикова Ю.В.* Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением // Механика твердого тела. — 2011. — **41**. — С. 187–198.

[4] *Карпачев Ю.А., Троценко В.А., Троценко, Ю.В.* Собственные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Акуст. вiсн. — 2001. — **4**, № 1. — С. 44–59.

[5] *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

[6] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.

[7] *Рубановский В.Н.* Устойчивость установившихся движений сложных механических систем // Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1982. — **5**. — С. 62–134.

[8] *Barbu V.* Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. — San Diego, CA: Academic Press, 1992. — 476 p.

[9] *Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G.* Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi–Link Structures. — New York: Springer, 1994. — xv+388 p.

[10] *Zuyev A.L.* Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. — London: Springer, 2014. — 232 p.