Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 239–265

УДК 519.6/517.984.46

FD-метод для задачі на власні значення з кратними власними значеннями базової задачі

В.Л. Макаров [1]***, Н.М. Романюк*** [2]***, І.І. Лазурчак*** [3]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ,*
makarov@imath.kiev.ua
[2] *Інститут математики НАН України, Київ,*
romaniuknm@gmail.com
[3] *Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,*
Дрогобич, informatyka@drohobych.net

A new algorithm for eigenvalue problems for the linear self-adjont operators in the form of sum $A+B$ with a discrete spectrum in Hilbert space is proposed and justified. The algorithm is based on the approximation of B by an operator $\bar{B}$ such that the eigenvalue problem for $A+\bar{B}$ is computationally simpler then that for $A+B$. The operator $A+\bar{B}$ is allowed to have multiple eigenvalues. The algorithm for this eigenvalue problem is based on the homotopy idea. It provides the super-exponential convergence rate, i.e the rate faster then the rate of geometrical progression with the ratio which is inversely proportional to the index of the eigenvalue under consideration. The eigenpairs can be computed in parallel for all prescribed indexes. We supply a numerical example which supports the developed theory.

Обоснован новый алгоритм FD-метода для задачи на собственные значения для суммы линейных самосопряженных операторов $A + B$ с дискретным спектром, действующих в некотором Гильбертовом пространстве. Алгоритм заключается в аппроксимации оператора B таким оператором $\bar{B}$, что задача на собственные значения для $A + \bar{B}$ становится проще, чем для $A + B$. Рассмотрен случай, когда оператор $A + \bar{B}$ имеет собственные значения произвольной конечной кратности. Предложенный подход основывается на идее гомотопии и имеет суперэкспоненциальную скорость сходимости, то есть сходится быстрее, чем геометрическая прогрессия, знаменатель которой обратно пропорционален индексу соответствующего собственного значения. Собственные пары можно вычислить параллельно для всех заданных индексов. Численный пример подтверждает теорию.

1. Вступ

Задачі на власні значення, тобто задачі знаходження власних пар – власних значень (частот) і власних функцій (форм вібрацій) – відіграють важливу роль у різних застосуваннях, пов'язаних з вібрацією і хвильовими процесами [1, 2]. Такі популярні методи, як метод скінченних різниць (FDM), метод скінченних елементів (FEM) або варіаційні методи, дають змогу ефективно обчислювати тільки власні значення з найменшими індексами до деякого номера n_0 (власні значення при цьому впорядковані в неспадному порядку: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$). Водночас існують прикладні задачі, які потребують обчислення великої кількості (сотень тисяч) власних значень і власних функцій (наприклад, див. [2, с. 273, вступ до п. 4]). Для того щоб знайти чисельно власні значення з вищими номерами, запропоновано інший підхід, який базується на ідеях збурення (див. [3–5]) і гомотопії (див. [6, 7] та посилання в них), названий *FD-методом* відповідно до [8], де його було вперше запропоновано.

Коротко пояснимо ідеї збурення і гомотопії для наступної задачі на власні значення для суми самоспряжених операторів A і B ($A = A^*$, $B = B^*$) з областями визначення $D(A)$ і $D(B)$ відповідно та дискретним спектром у гільбертовому просторі H із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$

$$(A + B)\, u - \lambda u = \theta, \tag{1}$$

де θ – нульовий елемент. Шукаємо власну пару із заданим фіксованим індексом n. Припустимо, що $\overline{D(A)} = H$, $D(A) \subset D(B)$ і оператор B

підпорядкований оператору A, тобто для деякої додатної сталої c

$$\|Bv\| \leq c\,\|Av\| \quad \forall v \in D\,(A)\,. \tag{2}$$

Нехай $\bar{B} = \bar{B}^{*}$, $D(\bar{B}) = D(B)$, і апроксимуємо оператор B оператором $\bar{B}$ так, щоб *базова задача*

$$\left(A + \bar{B}\right) u^{(0)} - \lambda^{(0)} u^{(0)} = \theta \tag{3}$$

була "простішою", ніж задача (1), а власні значення (3) були впорядковані таким чином:

$$0 \leq \lambda_1^{(0)} \leq \lambda_2^{(0)} \leq ... \leq \lambda_n^{(0)} \leq ... \,. \tag{4}$$

Зазначимо, що кожне власне значення в (4) повторюється таку кількість разів, якою є його кратність. Відповідні власні вектори утворюють повну ортонормальну систему $\{u_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$.

Дотримуючись ідеї гомотопії, "занурюємо" (1), (3) у сімейство параметричних задач

$$(A + W\,(t))\,u_n\,(t) - \lambda_n\,(t)\,u_n\,(t) = \theta, \quad t \in [0,1]\,, \tag{5}$$

з $W\,(t) = \overline{B} + t\varphi(B)$, $\varphi(B) = B - \bar{B}$, яка містить обидві задачі (1) і (3). Очевидно, що $u_n(0) = u_n^{(0)}$, $u_n(1) = u_n$. Розв'язок (5) будемо шукати у формі

$$\lambda_n\,(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} t^j, \ \ u_n\,(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)} t^j, \tag{6}$$

де формально

$$\lambda_n^{(j)} = \frac{1}{j!}\left.\frac{d^j \lambda_n\,(t)}{dt^j}\right|_{t=0}, \ \ u_n^{(j)} = \frac{1}{j!}\left.\frac{d^j u_n\,(t)}{dt^j}\right|_{t=0}. \tag{7}$$

За умови, що ряди (6) збігаються для всіх $t \in [0,1]$, при $t = 1$ в (6) отримуємо

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \ \ u_n = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}. \tag{8}$$

Наближеннями рангу N до власних значень і власних векторів задачі (1) є зрізані ряди

$$\overset{N}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{N} \lambda_n^{(j)}, \ \ \overset{N}{u}_n = \sum_{j=0}^{N} u_n^{(j)}. \tag{9}$$

Підставивши (6) у (5) та прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів t, отримаємо рекурентні рівняння для визначення членів рядів (8), (9):

$$\left(A+\bar{B}\right)u_n^{(j+1)}-\lambda_n^{(0)}u_n^{(j+1)}=F_n^{(j+1)},\quad j=0,1,..., \tag{10}$$

де

$$F_n^{(j+1)}=F_n^{(j+1)}\left(\lambda_n^{(0)},...,\lambda_n^{(j+1)};u_n^{(0)},...,u_n^{(j+1)}\right)=$$
$$=\sum_{p=0}^{j}\lambda^{(j+1-p)}u_n^{(p)}-\varphi(B)u_n^{(j)}=$$
$$=\lambda^{(j+1)}u_n^{(0)}-\varphi(B)u_n^{(j)}+\sum_{p=1}^{j}\lambda^{(j+1-p)}u_n^{(p)},\ \ \varphi(B)=B-\overline{B},\ F_n^{(0)}=0.$$

Пара $\lambda_n^{(0)}$, $u_n^{(0)}$ є розв'язком базової задачі (3) та початковими даними для задач (10).

Однією з особливостей, які спричинюють труднощі при розв'язуванні задач на власні значення, є наявність *кратних власних значень*. Так, при застосуванні FD-методу до розв'язання деяких задач вже на етапі базової задачі (3), з якої починається числовий процес, виникають кратні власні значення. Наведемо короткий огляд праць щодо FD-методу, в яких вдалось подолати такі труднощі.

У праці [9] кожне власне значення базової задачі є двократним, окрім $\lambda_0^{(0)}=0$, яке є простим, для скалярної задачі Штурма-Ліувілля з потенціалом $q(x)=q(1-x)$, $x\in[0,1]$, як для випадку періодичних, так і для випадку антиперіодичних крайових умов. В п. 2 з [10] розглянуто одну із самоспряжених крайових задач на власні значення для звичайного диференціального рівняння 4-го порядку, в якій всі власні значення базової задачі є простими, окрім $\lambda_0^{(0)}=0$, яке є двократним. У праці [11] при застосуванні FD-методу до матричної задачі Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Діріхле всі власні значення базової задачі є двократними.

Дана праця є узагальненням [12], де обґрунтовано FD-метод та здійснено його алгоритмічну реалізацію для абстрактної постановки задачі на власні значення (1), коли базова задача (3) може мати двократні власні значення. Узагальнення полягає в тому, що базова задача може містити власні значення довільної скінченної кратності. Зауважимо, що результати п.2 і п.3 частково викладено в праці [13].

2. Алгоритм FD-методу у випадку кратних власних значень базової задачі з довільною скінченною кратністю

Нехай $\lambda_n^{(0)}$ є k-кратним власним значенням, $k \geq 2$, і йому відповідає ортонормальна система власних векторів $e_{n,p}$, $p = \overline{1,k}$, тобто $(e_{n,p}, e_{n,s}) = \delta_{p,s}$, $p,s = \overline{1,k}$, де $\delta_{p,s}$ – символ Кронекера. Тут і надалі індекс n часто будемо опускати, якщо це не буде спричинювати непорозуміння. Загальний розв'язок задачі (3) має вигляд

$$u^{(0)} = \sum_{p=1}^{k} C_p^{(0)} e_p, \tag{11}$$

де сталі $C_p^{(0)}$, $p = \overline{1,k}$, буде визначено нижче.

Позначимо через Γ^+ псевдообернений оператор Мура-Пенроуза до оператора $A + \bar{B} + \lambda^{(0)} E$. Тоді, при виконанні умов розв'язності

$$(F^{(j+1)}, e_m) = 0, \ \ m = \overline{1,k} \tag{12}$$

розв'язок рівняння (10) можна записати у вигляді

$$u^{(j+1)} = \sum_{p=1}^{k} C_p^{(j+1)} e_p + \hat{u}^{(j+1)}, \tag{13}$$

де

$$\hat{u}^{(j+1)} = \Gamma^+ \left(\sum_{s=1}^{j} \lambda^{(j+1-s)} u^{(s)} - \varphi(B) u^{(j)} \right), \tag{14}$$

причому підсумовування за s в (14) здійснюється від 1, а не від 0, внаслідок наступної властивості оператора Γ^+:

Лема 2.1. *Мають місце рівності* $\Gamma^+ e_p = 0, \ p = \overline{1,k}$.

Доведення леми 1.1 базується на такому представленні:

$$\Gamma^+ v = -\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} \frac{(v, u_p^{(0)})}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_p^{(0)}} u_p^{(0)} \quad \forall v \in L(e_1, e_2, ..., e_k),$$

де $L(e_1, e_2, ..., e_k)$ – лінійна оболонка елементів $e_1, e_2, ..., e_k$.

З вимоги отогональності

$$(u^{(j+1)}, u^{(0)}) = 0, \ \ j = 0, 1, ... \tag{15}$$

випливає умова

$$(\vec{C}^{(j+1)}, \vec{C}^{(0)})_R = \sum_{p=1}^{k} C_p^{(j+1)} C_p^{(0)} = 0, \ j = 0, 1, ... \, , \tag{16}$$

яка накладається на вектори $\vec{C}^{(j+1)} = |[C_p^{(j+1)}]|_{p=\overline{1,k}}$, $j = 0, 1, ...$ Тут $(\cdot, \cdot)_R$ – скалярний добуток в R^k, $\vec{C}^{(0)} = |[C_p^{(0)}]|_{p=\overline{1,k}}$.

Виходячи з (12) та леми 1, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{k} C_s^{(j)} \Big((\varphi(B) - \lambda^{(1)} E) e_s, e_m \Big) = \\ &= - \Big(\varphi(B) \hat{u}^{(j)}, e_m \Big) + \sum_{p=0}^{j-1} \lambda^{(j+1-p)} C_m^{(p)}, \ m = \overline{1,k}, \end{aligned} \tag{17}$$

де $E = |[\delta_{s,t}]|_{s,t=\overline{1,k}}$ – одинична матриця. Помноживши систему (17) на $C_m^{(0)}$ і підсумувавши за m від 1 до k, одержимо одну з основних формул FD-методу:

$$\lambda^{(j+1)} = \Big(\varphi(B) u^{(j)}, u^{(0)} \Big) = \Big(\varphi(B) \hat{u}^{(j)}, u^{(0)} \Big) = \Big(\hat{u}^{(j)}, \varphi(B) u^{(0)} \Big) . \tag{18}$$

Нехай $\lambda_\nu^{(1)}$, $\nu = \overline{1,r}$, є μ_ν-кратним власним значенням матриці

$$D^{(1)} = |[d_{p,m}^{(1)}]|_{p,m=\overline{1,k}}, \ \ d_{p,m}^{(1)} = (\varphi(B) e_p, e_m), \tag{19}$$

причому $\sum_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$, $\lambda_1^{(1)} < ... < \lambda_\nu^{(1)} < ... < \lambda_r^{(1)}$. Введемо матрицю

$$D^{[\nu]} = |[d_{p,m}^{[\nu]}]|_{p,m=\overline{1,k}}, d_{p,m}^{[\nu]} = \Big((\varphi(B) - \lambda_\nu^{(1)} E) e_p, e_m \Big), 1 \le \nu \le r, \tag{20}$$

та запишемо систему (17) у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{aligned} &D^{[\nu]} \vec{C}^{(j)} = \sum_{p=0}^{j-1} \lambda^{(j+1-p)} \vec{C}^{(p)} - \Big\langle \varphi(B) \hat{u}^{(j)}, \vec{e} \Big\rangle = \\ &= \sum_{p=0}^{j-1} \lambda^{(j+1-p)} \vec{C}^{(p)} - \Big\langle \hat{u}^{(j)}, \varphi(B) \vec{e} \Big\rangle, \ \ j = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{21}$$

де $\vec{e} = [e_1, e_2, ..., e_k]^T$, $\langle v, \vec{e}\rangle = [(v, e_1), (v, e_2), ..., (v, e_k)]^T$. З (21) при $j = 0$ із урахуванням умови $\hat{u}^{(0)} = 0$ одержуємо

$$D^{[\nu]}\vec{C}^{(0)} = \vec{0}. \tag{22}$$

Нехай розв'язками системи (22) при $\lambda^{(1)} = \lambda_\nu^{(1)}$, $\nu = \overline{1, r}$, буде ортонормальна система векторів

$$\vec{C}_{\nu,i}^{(0)} = |[C_{\nu,i,m}^{(0)}]|_{m=\overline{1,k}},\ i = \overline{1, \mu_\nu}, \tag{23}$$

тобто $(\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}, \vec{C}_{\nu,s}^{(0)})_R = \delta_{i,s}$, $\left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}\right\|_R = 1$, $i,s = \overline{1,\mu_\nu}$. Систему (21) запишемо так:

$$\begin{aligned} D^{[\nu]}\vec{C}_{\nu,i}^{(j)} &= \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_{\nu,i}^{(j+1-p)}\vec{C}_{\nu,i}^{(p)} - \left\langle \varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}, \vec{e}\right\rangle = \\ &= \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_{\nu,i}^{(j+1-p)}\vec{C}_{\nu,i}^{(p)} - \left\langle \hat{u}_{\nu,i}^{(j)}, \varphi(B)\vec{e}\right\rangle,\ i = \overline{1, \mu_\nu},\ \ j = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{24}$$

З урахуванням (18) можна зробити висновок, що права частина системи (24) ортогональна до всіх векторів $\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}$, $i = \overline{1, \mu_\nu}$, тобто виконуються необхідні й достатні умови її розв'язності. За розв'язок системи (24), а він є неоднозначним, візьмемо наступний:

$$\begin{aligned} \vec{C}_{\nu,i}^{(j)} &= \left(D^{[\nu]}\right)^+ \left(\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_{\nu,i}^{(j+1-p)}\vec{C}_{\nu,i}^{(p)} - \left\langle \varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}, \vec{e}\right\rangle\right) = \\ &= \left(D^{[\nu]}\right)^+ \left(\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_{\nu,i}^{(j+1-p)}\vec{C}_{\nu,i}^{(p)} - \left\langle \hat{u}_{\nu,i}^{(j)}, \varphi(B)\vec{e}\right\rangle\right), i = \overline{1, \mu_\nu}, j = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{25}$$

де $\left(D^{[\nu]}\right)^+$ – псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці $D^{[\nu]}$.

Неважко переконатися, що

$$(D^{[\nu]})^+\vec{C}_{\nu,i}^{(0)} = \vec{0},\ i = \overline{1, \mu_\nu}, \tag{26}$$

тобто для розв'язку системи (21) у формі (25) будуть виконуватись умови ортогональності (16).

3. Збіжність FD-методу

Перейдемо до визначення оцінок похибок методу, вважаючи, що $i = \overline{1,\mu_\nu}$, $\nu = \overline{1,r}$, $\sum_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$. З (25), враховуючи (18) і (26), маємо

$$\left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(j)}\right\|_R \le w \left(\sum_{p=1}^{j-1} \left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j-p)}\right\| \left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(p)}\right\|_R + \left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}\right\|\right), \tag{27}$$

де

$$w = \left\|\left(D^{[\nu]}\right)^{+}\right\| \left|\langle\varphi(B)\vec{e}\rangle\right|, \; \|\vec{a}\|_R = (\vec{a},\vec{a})_R, \; \left|\left\langle\vec{b}\right\rangle\right| = \left\{\sum_{p=1}^{k} \|b_p\|^2\right\}^{1/2}$$

та використано оцінку, яка слідує з (11):

$$\left\|\varphi(B)u^{(0)}\right\| = \left\|\varphi(B)\left\langle\vec{C}^{(0)},\vec{e}\right\rangle\right\| = \left|\left\langle\vec{C}^{(0)},\varphi(B)\vec{e}\right\rangle\right| \le$$
$$\le \left|\langle\varphi(B)\vec{e}\rangle\right| \left\|\vec{C}^{(0)}\right\| = \left|\langle\varphi(B)\vec{e}\rangle\right|.$$

З (13) і (14) одержуємо оцінку

$$\begin{aligned}\left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j+1)}\right\| &\le M_{\nu,i}\left(\sum_{s=1}^{j} \left\|\tilde{u}_{\nu,i}^{(j-s)}\right\| \left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(s)}\right\| + \left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}\right\| + \left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(j)}\right\|_R\right) \le \\ &\le M_{\nu,i}\left(\sum_{s=0}^{j} \left\|\tilde{u}_{\nu,i}^{(j-s)}\right\| \left\|\tilde{u}_{\nu,i}^{(s)}\right\| + \left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(j)}\right\|_R\right),\end{aligned} \tag{28}$$

де

$$M_{\nu,i} = M_{n,\nu,i} = \max\left\{\left\|\Gamma_n^{+}\right\| \left\|\varphi(B)u_{n,\nu,i}^{(0)}\right\|, \left\|\Gamma_n^{+}\varphi(B)\right\|\right\},$$

$$\left\|\tilde{u}_{\nu,i}^{(s)}\right\| = \begin{cases}\left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(s)}\right\|, & s > 0, \\ 1, & s = 0.\end{cases}$$

Тут враховано оцінку для розв'язку $u_{\nu,i}^{(j)}$, яка випливає з представлення (13):

$$\left\|u_{\nu,i}^{(j)}\right\| = \left(\left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}\right\|^2 + \left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(j)}\right\|_R^2\right)^{1/2} \le \left\|\hat{u}_{\nu,i}^{(j)}\right\| + \left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(j)}\right\|_R. \tag{29}$$

Отримали рекурентну систему нерівностей (27), (28). Для її розв'язання спочатку зробимо заміну:

$$
\begin{gathered}
U_j = (M_{\nu,i})^{-j} \left\| \tilde{u}_{\nu,i}^{(j)} \right\|, \; S_j = (M_{\nu,i})^{-j} \left\| \vec{C}_{\nu,i}^{(j)} \right\|_R, \;\; j = 1, 2, ..., \\
U_0 = \left\| \tilde{u}_{\nu,i}^{(0)} \right\| = 1, \;\; S_0 = \left\| \vec{C}_{\nu,i}^{(0)} \right\|_R = 1,
\end{gathered} \tag{30}
$$

внаслідок якої приходимо до системи нерівностей

$$
U_{j+1} \le \sum_{p=0}^{j} U_{j-p} U_p + S_j, \;\; S_{j+1} \le w \sum_{p=0}^{j} U_{j+1-p} S_p, \;\; j = 0, 1, 2, ... \tag{31}
$$

Замінивши знаки нерівностей на рівності, одержимо мажорантну для (31) систему рекурентних рівнянь:

$$
\begin{gathered}
\bar{U}_{j+1} = \sum_{p=0}^{j} \bar{U}_{j-p} \bar{U}_p + \bar{S}_j, \;\; \bar{S}_{j+1} = w \sum_{p=0}^{j} \bar{U}_{j+1-p} \bar{S}_p, \;\; j = 0, 1, 2, ..., \\
\bar{U}_0 = U_0 = \left\| \tilde{u}_{\nu,i}^{(0)} \right\| = 1, \;\; \bar{S}_0 = S_0 = \left\| \vec{C}_{\nu,i}^{(0)} \right\|_R = 1
\end{gathered} \tag{32}
$$

у тому розумінні, що

$$
U_{j+1} \le \bar{U}_{j+1}, \;\; S_{j+1} \le \bar{S}_{j+1}. \tag{33}
$$

Систему (32) розв'яжемо методом твірних функцій. Для цього вводимо такі твірні функції:

$$
f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{U}_j, \;\; g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{S}_j,
$$

для яких згідно з (32)

$$
f(z) - 1 = z \left(f^2(z) + g(z) \right), \;\; g(z) - 1 = w \left(f(z) - 1 \right) g(z). \tag{34}
$$

Визначивши з другого рівняння $g(z) = 1/\left\{1 - w\left[f(z) - 1\right]\right\}$ і підставивши його у перше рівняння, одержимо

$$
zwf^3(z) - (w + z + zw) f^2(z) + (2w + 1) f(z) - (w + 1 + z) = 0. \tag{35}
$$

Поміняємо у рівнянні (35) місцями залежну і незалежну змінні, тобто будемо розглядати z як функцію від f:

$$
z(f) = \frac{(f-1) w \left(f - \frac{w+1}{w} \right)}{w f^2 \left(f - \frac{w+1}{w} \right) - 1}. \tag{36}
$$

Проаналізувавши функцію (36), отримаємо

$$z(1) = z\left(\frac{w+1}{w}\right) = 0; \;\; z(f) > 0 \quad \forall f \in \left(1, \frac{w+1}{w}\right);$$

$$z'(1) = \frac{1}{2} > 0, \; z'\left(\frac{w+1}{w}\right) = -1 < 0.$$

Звідси робимо висновок про те, що існує $z_{\max} = z(f_{\max})$, $f_{\max} \in \left(1, \frac{w+1}{w}\right)$, яке є радіусом збіжності ряду $f(z)$, а отже, існують такі додатні сталі L, ε, що

$$(z_{\max})^j \, \bar{U}_j \leq \frac{L}{j^{1+\varepsilon}}, \; j = 1, 2, ... \tag{37}$$

З урахуванням заміни (30), нерівності (37), а також введених позначень при $z \geq 0$ маємо

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j \left\| \tilde{u}_{\nu,i}^{(j)} \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_{\max}} M_{\nu,i} \right)^j \bar{U}_j (z_{\max})^j \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_{\max}} M_{\nu,i} \right)^j \frac{L}{j^{1+\varepsilon}}. \tag{38}$$

Нехай виконується умова

$$q_{n,\nu,i} = \frac{M_{n,\nu,i}}{z_{max}} < 1, \tag{39}$$

тоді нерівність (38) буде правильною $\forall z \in [0, 1]$, а отже, буде мати місце нерівність

$$\left\| \tilde{u}_{n,\nu,i}^{(j)} \right\| \leq \frac{L \, q_{n,\nu,i}^j}{j^{1+\varepsilon}}, \; j = 1, 2, ... \tag{40}$$

Визначимо радіус збіжності ряду $g(z)$. За аналогією з попередніми викладками знайдемо z як функцію від g:

$$z(g) = \frac{g(g-1)w}{(g-1)^2 + 2wg(g-1) + w^2 g^2 (g+1)}. \tag{41}$$

Для дослідження функції $z(g)$ знаходимо

$$z'(g) = -\frac{w[w^2 g^2((g-1)^2 - 2) + (g-1)^2]}{[(g-1)^2 + 2wg(g-1) + w^2 g^2 (g+1)]^2}. \tag{42}$$

Проаналізувавши (41), (42), робимо висновок, що

$$z(g) > 0 \quad \forall\, g \in (1, \infty); \;\; z(1) = 0, \;\; z(\infty) = 0; \;\; z'(1) = \frac{1}{2w} > 0,$$

$$z'\left(1+\sqrt{2}\right) = -\frac{2w}{\left(2+2(\sqrt{2}+2)w+(7\sqrt{2}+10)w^2\right)^2} < 0.$$

Отже, існує таке $g_{\max} \in \left(1, 1+\sqrt{2}\right)$, при якому функція $z(g)$ досягає свого максимуму

$$z_{\max} = \max_{g \in \left[1, 1+\sqrt{2}\right]} z(g) = z(g_{\max}),$$

який є радіусом збіжності ряду $g(z)$ і співпадає з радіусом збіжності ряду $f(z)$. За аналогією з попередніми викладками при виконанні умови (39) існують такі додатні сталі $\underline{L}$, $\underline{\varepsilon}$, що справедливою є оцінка

$$\left\|\vec{C}^{(j)}_{n,\nu,i}\right\|_R \le \frac{\underline{L}\, q^j_{n,\nu,i}}{j^{1+\underline{\varepsilon}}}, \;\; j = 1, 2, \ldots\,. \tag{43}$$

Згідно з нерівностями (29), (40) та (43) маємо першу потрібну оцінку

$$\left\|u^{(j)}_{n,\nu,i}\right\| \le \frac{2\bar{L} q^j_{n,\nu,i}}{j^{1+\bar{\varepsilon}}}, \;\; j = 1, 2, \ldots, \quad \bar{L} = \max(L, \underline{L}), \quad \bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \underline{\varepsilon}), \tag{44}$$

а використовуючи формулу (18) та оцінку (40), одержимо другу оцінку

$$\left|\lambda^{(j+1)}_{n,\nu,i}\right| \le \frac{L \left\|\varphi(B) u^{(0)}_{n,\nu,i}\right\| q^j_{n,\nu,i}}{j^{1+\varepsilon}}, \;\; j = 1, 2, \ldots\,. \tag{45}$$

На підставі нерівностей (44), (45) та міркувань, аналогічних міркуванням у [14], переконуємось у справедливості наступної теореми.

Теорема 3.1. *Нехай виконується умова* (39), *тоді FD-метод для задачі* (1) *є суперекспоненціально збіжним і мають місце такі оцінки його точності:*

$$\begin{aligned}
\left\|u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i}\right\| &= \left\|u_{n,\nu,i} - \sum_{j=0}^{m} u^{(j)}_{n,\nu,i}\right\| \le \frac{2\bar{L}}{(m+1)^{1+\bar{\varepsilon}}} \frac{q^{m+1}_{n,\nu,i}}{1-q_{n,\nu,i}},\\
\left\|\lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i}\right\| &= \left\|\lambda_{n,\nu,i} - \sum_{j=0}^{m} \lambda^{(j)}_{n,\nu,i}\right\| \le \frac{L\left\|\varphi(B)u^{(0)}_{n,\nu,i}\right\|}{(m+1)^{1+\varepsilon}} \frac{q^{m}_{n,\nu,i}}{1-q_{n,\nu,i}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Якщо $q_{n,\nu,i} = 1$, *то замість оцінок* (46) *справедливими є такі оцінки:*

$$\left\| u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i} \right\| \leq 2\bar{L} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\bar{\varepsilon}}} \leq \frac{2\bar{L}}{\bar{\varepsilon} m^{\bar{\varepsilon}}},$$

$$\left\| \lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i} \right\| \leq \bar{L} \left\| \varphi(B) u^{(0)}_{n,\nu,i} \right\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \leq \frac{\bar{L} \left\| \varphi(B) u^{(0)}_{n,\nu,i} \right\|}{\varepsilon m^{\varepsilon}}.$$

Тут $i = \overline{1, \mu_\nu}$, $\nu = \overline{1, r}$, $\sum_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$.

Наш підхід має наступні переваги над класичними методами, деякі з яких схожі на особливості методу Pruess [2,15,16] для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку або методів з [1]:

1. Породжує нескінченний спектр, на відміну від матричних методів, таких як метод скінченних різниць (FDM), метод скінченних елементів (FEM) або варіаційні методи (VM).

2. Показав кращі результати збіжності та оцінки похибок (зокрема, має суперекспоненціальну швидкість збіжності) порівняно з FDM, FEM і VM.

3. Можна досягти довільної точності з майже оптимальними обчислювальними затратами для великих індексів, які не залежать від розріджування сітки.

4. Особливий випадок $(\varphi(B)e_p, e_m) = 0 \quad \forall p, m = \overline{1, k}$

Зробимо наступні припущення: якщо оператор $\Pi^{-}(B)$ є добутком самоспряжених операторів $\varphi(B)$ і Γ^{+} з непарною кількістю операторів $\varphi(B)$, то $\forall p, m = \overline{1, k}$, $s = 0, 1, ...$ будуть справедливі співвідношення:

$$(\Pi^{-}(B) e_p, e_m) = 0, \tag{47}$$

$$((\varphi(B)\Gamma^{+})^{2s} \varphi(B) e_p, e_m) = 0, \; ((\varphi(B)\Gamma^{+})^{2s} \Gamma^{+} \varphi(B) e_p, e_m) = 0. \tag{48}$$

Теорема 4.1. *Нехай виконується умова* (47), *тоді справедливими є співвідношення:*

$$\vec{C}^{(2j-1)} = \vec{0}, \quad \lambda^{(2j-1)} = 0,$$

$$(\Pi^{+} \hat{u}^{(2j-1)}, e_m) = 0 \;\; \forall \, \Pi^{+} \in \Omega^{+}, \;\; (\Pi^{-} \hat{u}^{(2j)}, e_m) = 0 \;\; \forall \, \Pi^{-} \in \Omega^{-}, \; m = \overline{1, k},$$
$$j = 1, 2, \ldots,$$

де Ω^+, Ω^- *– множини добутків операторів* $\varphi(B)$ *і* Γ^+ *з парним і непарним входженням* $\varphi(B)$ *відповідно.*

Доведення. Доведення проведемо методом повної математичної індукції. З рівняння (10) при $j=0$ одержимо

$$\hat{u}^{(1)} = -\sum_{p=1}^{k} C_p^{(0)} \Gamma^+ \varphi(B) e_p, \;\; \lambda^{(1)} = 0.$$

Запишемо умову розв'язності (12) рівняння (10) при $j=1$:

$$\lambda^{(2)} C_m^{(0)} - \Big(\varphi(B)\hat{u}^{(1)}, e_m\Big) = \\ = \lambda^{(2)} C_m^{(0)} + \sum_{p=1}^{k} C_p^{(0)} \left(\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m\right) = 0, \;\; m=\overline{1,k}. \quad (49)$$

Нехай $\lambda_\nu^{(2)}$, $\nu=\overline{1,r}$, є μ_ν-кратним власним значенням матриці

$$D^{(2)} = |[d_{p,m}^{(2)}]|_{p,m=\overline{1,k}}, \;\; d_{p,m}^{(2)} = -\left(\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m\right), \quad (50)$$

причому $\sum_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$ ($\lambda_1^{(2)} < ... < \lambda_\nu^{(2)} < ... < \lambda_r^{(2)}$). Розв'язками системи (49) при $\lambda^{(2)} = \lambda_\nu^{(2)}$, $\nu=\overline{1,r}$, нехай буде ортонормальна система векторів

$$\vec{C}_{\nu,i}^{(0)} = |[C_{\nu,i,m}^{(0)}]|_{m=\overline{1,k}}, \;\; i=\overline{1,\mu_\nu}, \quad (51)$$

тобто $(\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}, \vec{C}_{\nu,s}^{(0)})_R = \delta_{i,s}$, $\left\|\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}\right\|_R = 1$, $i,s=\overline{1,\mu_\nu}$. Систему (49) при $m=\overline{1,k}$, $i=\overline{1,\mu_\nu}$ (а надалі саме такими вважатимемо діапазони, які пробігатимуть індекси m та i), подамо так:

$$\lambda_\nu^{(2)} C_{\nu,i,m}^{(0)} - \Big(\varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(1)}, e_m\Big) = \lambda_\nu^{(2)} C_{\nu,i,m}^{(0)} + \\ + \sum_{p=1}^{k} C_{\nu,i,p}^{(0)} \left(\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m\right) = 0. \quad (52)$$

Враховуючи (48) та (13), запишемо умову розв'язності (12) рівняння (10) при $j=2$:

$$\begin{gathered}\lambda_{\nu,i}^{(3)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(1)}-\left(\varphi(B)u_{\nu,i}^{(2)},e_m\right)=\lambda_{\nu,i}^{(3)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(1)}-\\ -\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(2)}\left(\varphi(B)e_p,e_m\right)+\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(1)}\left(\varphi(B)\Gamma^{+}\varphi(B)e_p,e_m\right)-\\ -\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(0)}\left(\varphi(B)\left(\Gamma^{+}\varphi(B)\right)^2e_p,e_m\right)=\lambda_{\nu,i}^{(3)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(1)}+\\ +\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(1)}\left(\varphi(B)\Gamma^{+}\varphi(B)e_p,e_m\right)=0,\end{gathered}\tag{53}$$

наслідком якої з урахуванням (52) і (15) є

$$\lambda_{\nu,i}^{(3)}=0,\ \ (\lambda_{\nu}^{(2)}E+D^{(2)})\vec{C}_{\nu,i}^{(1)}=\vec{0},\tag{54}$$

тоді $\vec{C}_{\nu,i}^{(1)}=\vec{0}$.

Враховуючи (48), запишемо умову розв'язності (12) рівняння (10) при $j=3$:

$$\begin{gathered}\lambda_{\nu,i}^{(4)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(2)}-\left(\varphi(B)u_{\nu,i}^{(3)},e_m\right)=\lambda_{\nu,i}^{(4)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(2)}-\\ -\left(\varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(3)},e_m\right)-\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(3)}\left(\varphi(B)e_p,e_m\right)=0.\end{gathered}\tag{55}$$

Звідси з урахуванням (48) та умови (15) одержуємо

$$\lambda_{\nu,i}^{(4)}=\left(\varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(3)},u_{\nu,i}^{(0)}\right).\tag{56}$$

Для того щоб одержати рівняння для $\vec{C}_{\nu,i}^{(2)}=|[C_{\nu,i,m}^{(2)}]|_{m=\overline{1,k}}$, повертаємося до рівняння (55), яке перетворимо до вигляду

$$\begin{gathered}\lambda_{\nu}^{(2)}C_{\nu,i,m}^{(2)}+\sum_{p=1}^{k}C_{\nu,i,p}^{(2)}d_{p,m}^{(2)}=-\lambda_{\nu,i}^{(4)}C_{\nu,i,m}^{(0)}+\lambda_{\nu}^{(2)}\left(\varphi(B)\Gamma^{+}\hat{u}_{\nu,i}^{(1)},e_m\right)-\\ -\left(\varphi(B)\Gamma^{+}\varphi(B)\hat{u}_{\nu,i}^{(2)},e_m\right).\end{gathered}\tag{57}$$

Розв'язок рівняння (57), а він визначається неоднозначно, візьмемо саме у такій векторно-матричній формі, яка забезпечує виконання умови (15), тобто

$$\vec{C}^{(2)}_{\nu,i} = \left(D^{[2,\nu]}\right)^{+} \Big[-\lambda^{(4)}_{\nu,i}\vec{C}^{(0)}_{\nu,i} + \lambda^{(2)}_{\nu} \left\langle \varphi(B)\Gamma^{+}\hat{u}^{(1)}_{\nu,i}, \vec{e}\right\rangle - \\ - \left\langle \varphi(B)\Gamma^{+}\varphi(B)\hat{u}^{(2)}_{\nu,i}, \vec{e}\right\rangle\Big], \quad (58)$$

де $\left(D^{[2,\nu]}\right)^{+}$ – псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці $D^{[2,\nu]} = \lambda^{(2)}_{\nu}E + D^{(2)}$ та згідно з введеними позначеннями $\langle v, \vec{e}\rangle = [(v, e_1), (v, e_2), ..., (v, e_k)]^T$, $\vec{e}=[e_1, e_2, ..., e_k]^T$.

Перш ніж розглядати загальний випадок, запишемо умову розв'язності (12) рівняння (10) при $j = 4$:

$$\lambda^{(5)}_{\nu,i}C^{(0)}_{\nu,i,m}+\lambda^{(2)}_{\nu}C^{(3)}_{\nu,i,m}-\left(\varphi(B)u^{(4)}_{\nu,i}, e_m\right)=\lambda^{(5)}_{\nu,i}C^{(0)}_{\nu,i,m}+\lambda^{(2)}_{\nu}C^{(3)}_{\nu,i,m}- \\ -\left(\varphi(B)\hat{u}^{(4)}_{\nu,i}, e_m\right)-\sum_{p=1}^{k} C^{(4)}_{\nu,i,p}\left(\varphi(B)e_p, e_m\right)=0. \quad (59)$$

Звідси з урахуванням (48) та умови (15) одержуємо

$$\lambda^{(5)}_{\nu,i} = \left(\varphi(B)\hat{u}^{(4)}_{\nu,i}, u^{(0)}_{\nu,i}\right). \quad (60)$$

Щоб одержати рівняння для $\vec{C}^{(3)}_{\nu,i} = |[C^{(3)}_{\nu,i,m}]|_{m=\overline{1,k}}$, покажемо, що права частина (60) дорівнює нулю. Маємо

$$(\varphi(B)\hat{u}^{(4)}_{\nu,i}, e_m) = \left(\varphi(B)\Gamma^{+}\left(\lambda^{(2)}_{\nu}\hat{u}^{(2)}_{\nu,i} - \varphi(B)u^{(3)}_{\nu,i}\right), e_m\right) = \\ = -\sum_{p=1}^{k} C^{(3)}_{\nu,i,p}d^{(2)}_{p,m}. \quad (61)$$

Підставимо цей вираз у (59), тоді

$$\lambda^{(5)}_{\nu,i}C^{(0)}_{\nu,i,m} + \lambda^{(2)}_{\nu}C^{(3)}_{\nu,i,m} + \sum_{p=1}^{k} C^{(3)}_{\nu,i,p}d^{(2)}_{p,m} = 0, \quad (62)$$

звідси випливає, що $\lambda^{(5)}_{\nu,i} = 0$, $\vec{C}^{(3)}_{\nu,i} = \vec{0}$.

Надалі для спрощення викладок, якщо це не спричинятиме непорозумінь, опустимо індекси ν, i при записі векторів $\vec{C}_{\nu,i}^{(j)} = ||[C_{\nu,i,m}^{(j)}]|_{m=\overline{1,k}}$ та власних пар $\lambda_{\nu,i}^{(j+1)}$, $u_{\nu,i}^{(j+1)}$ з $j = 0, 1, 2, ...$

Застосуємо метод повної математичної індукції. Припустимо, що для деякого фіксованого j при $m = \overline{1,k}$, $s = \overline{1,j}$ доведено, що

$$\begin{gathered}\lambda^{(2s-1)}=0, \quad \vec{C}^{(2s-1)}=\vec{0}, \\ \left(\Pi^+\hat{u}^{(2s-1)}, e_m\right)=0 \quad \forall \Pi^+\in\Omega^+, \quad \left(\Pi^-\hat{u}^{(2s)}, e_m\right)=0 \quad \forall \Pi^-\in\Omega^-.\end{gathered} \tag{63}$$

Покажемо, що (63) виконуються і при $s=j+1$. З (63) і властивостей оператора Γ^+ маємо

$$\begin{gathered}u^{(2j+1)}=\sum_{p=1}^{k} C_p^{(2j+1)} e_p+\Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+2)}\hat{u}^{(2s-1)}-\varphi(B)u^{(2j)}\right), \\ \lambda^{(2j+1)}C_m^{(0)}-(\varphi(B)\hat{u}^{(2j)}, e_m)=0.\end{gathered} \tag{64}$$

Розглянемо друге рівняння з (64) і використаємо припущення індукції (63) та лему 1.1, тоді

$$\lambda^{(2j+1)}C_m^{(0)}-(\varphi(B)\hat{u}^{(2j)}, e_m)=\lambda^{(2j+1)}C_m^{(0)}-$$
$$-\left(\varphi(B)\Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j-2s)}\hat{u}^{(2s)}-\varphi(B)\hat{u}^{(2j-1)}\right), e_m\right) = \lambda^{(2j+1)}C_m^{(0)} = 0.$$

Звідси одержуємо $\lambda^{(2j+1)} = 0$.

Для будь-якого $\Pi^+ \in \Omega^+$ з (63) маємо

$$\left(\Pi^+\hat{u}^{(2j+1)}, e_m\right)=\left(\Pi^+\Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+2)}\hat{u}^{(2s-1)}-\varphi(B)\hat{u}^{(2j)}\right), e_m\right)=0,$$

бо у оператора $\Pi^+\Gamma^+$ парність кількості входжень не змінюється, а у оператора $\Pi^+\Gamma^+\varphi(B)$ кількість входжень $\varphi(B)$ стає непарною.

Для будь-якого $\Pi^- \in \Omega^-$ маємо

$$\begin{aligned}(\Pi^-\hat{u}^{(2j+2)}, e_m) &= \left(\Pi^-\Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+2)}\hat{u}^{(2s)}-\varphi(B)u^{(2j+1)}\right), e_m\right)= \\ &= -\sum_{p=1}^{k} C_p^{(2j+1)}\left(\Pi^-\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m\right).\end{aligned} \tag{65}$$

Для того щоб показати, що останні вирази дорівнюють нулю, запишемо умови розв'язності (12) рівняння (10) при заміні j на $2j+2$:

$$\lambda^{(2j+3)}C_m^{(0)} + \sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+4)}(\hat{u}^{(2s-1)}, e_m) + \lambda^{(2)}C_m^{(2j+1)} - \\ - (\varphi(B)\hat{u}^{(2j+2)}, e_m) = 0.$$

Оскільки має місце (65), то попередня система набуває вигляду

$$\lambda^{(2j+3)}C_m^{(0)} + \lambda^{(2)}C_m^{(2j+1)} - \sum_{p=1}^{k} d_{p,m}^{(2)}C_p^{(2j+1)} = 0.$$

Звідси $\lambda^{(2j+3)} = 0$, $C_m^{(2j+1)} = 0$, що разом із (65) доводить справедливість рівностей

$$(\Pi^{-}\hat{u}^{(2j+2)}, e_m) = 0.$$

Зауважимо, що вибір вектора $\vec{C}^{(0)}$ як розв'язку системи $(\lambda^{(2)}E + D^{(2)})\vec{C}^{(2j+1)} = \vec{0}$ зумовлений тим, що в подальшому не виникає неоднорідних умов на цей вектор.

На цьому індукцію завершено, а з нею і доведення теореми.

Використовуючи теорему 4.1 та формули (13), (14) і (18), записуємо праву частину рівнянь (1) при заміні j на $2j+1$ $(j=1,2,...)$:

$$\begin{aligned} F^{(2j+2)} &= \lambda^{(2j+2)}u^{(0)} - \varphi(B)\,\hat{u}^{(2j+1)} + \sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j+2-2s)}u^{(2s)} = \\ &= \sum_{p=1}^{k}C_p^{(2j)}\varphi(B)\,\Gamma^{+}\varphi(B)\,e_p + \lambda^{(2)}\sum_{p=1}^{k}C_p^{(2j)}e_p + \\ &+ \sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\left[\hat{u}^{(2s)} + \sum_{p=1}^{k}C_p^{(2s)}e_p - \varphi(B)\,\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)}\right] + \\ &+ \lambda^{(2)}\left[\hat{u}^{(2j)} - \varphi(B)\,\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)}\right] + \varphi(B)\,\Gamma^{+}\varphi(B)\,\hat{u}^{(2j)} + \\ &+ \lambda^{(2j+2)}\sum_{p=1}^{k}C_p^{(0)}e_p. \end{aligned} \tag{66}$$

З урахуванням умови розв'язності (12), леми 2.1, скалярного добутку

(66) та e_m, $m=\overline{1,k}$, отримаємо систему рівнянь:

$$\lambda^{(2)}C_m^{(2j)}+\sum_{p=1}^{k}C_p^{(2j)}d_{p,m}^{(2)}=\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\Big[\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)},e_m\Big)-C_m^{(2s)}\Big]+$$
$$+\lambda^{(2)}\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)},e_m\Big)-\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\varphi\left(B\right)\hat{u}^{(2j)},e_m\Big)-\lambda^{(2j+2)}C_m^{(0)},$$

або у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{gathered}\Big(\lambda^{(2)}E+D^{(2)}\Big)\vec{C}^{(2j)}=\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\Big[\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)},\vec{e}\Big\rangle-\vec{C}^{(2s)}\Big]+\\+\lambda^{(2)}\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)},\vec{e}\Big\rangle-\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\varphi\left(B\right)\hat{u}^{(2j)},\vec{e}\Big\rangle-\lambda^{(2j+2)}\vec{C}^{(0)}.\end{gathered}\tag{67}$$

Використовуючи співвідношення

$$\sum_{p=1}^{k}C_p^{(2j)}\sum_{t=1}^{k}C_t^{(0)}d_{p,t}^{(2)}=0,$$

підставляємо вираз для $\lambda^{(2j+2)}$, отриманий з (18) і (64):

$$\lambda^{(2j+2)}=\Big(\varphi\left(B\right)\hat{u}^{(2j+1)},u^{(0)}\Big)=\lambda^{(2)}\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)},u^{(0)}\Big)+$$
$$+\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)},u^{(0)}\Big)-\Big(\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\varphi\left(B\right)\hat{u}^{(2j)},u^{(0)}\Big),$$

у рівняння (67). Як наслідок маємо систему рівнянь:

$$D^{[2,\nu]}\vec{C}^{(2j)}=\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\Big[\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)},\vec{e}-u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\Big\rangle-\vec{C}^{(2s)}\Big]+$$
$$+\lambda^{(2)}\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)},\vec{e}-u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\Big\rangle+\Big\langle\varphi\left(B\right)\Gamma^{+}\varphi\left(B\right)\hat{u}^{(2j)},u^{(0)}\vec{C}^{(0)}-\vec{e}\Big\rangle.$$

З цієї системи, леми 2.1, теореми 4.1 та формул (13), (14) і (18) одержуємо *основні формули* алгоритму FD-методу для задачі (1) (при $j=1,2,\ldots$):

$$\hat{u}^{(2j-1)}=\Gamma^{+}\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j-2s)}\hat{u}^{(2s-1)}-\varphi(B)u^{(2j-2)}\right),$$

$$\hat{u}^{(2j)} = \Gamma^{+}\left(\sum_{s=1}^{j-1} \lambda^{(2j-2s)}\hat{u}^{(2s)} - \varphi(B)\hat{u}^{(2j-1)}\right), \tag{68}$$

$$\vec{C}^{(2j)} = \left(D^{[2,\nu]}\right)^{+}\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}\left[\left\langle\varphi(B)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2s-1)}, \vec{e}-u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\right\rangle - \right.\right.$$
$$\left. -\vec{C}^{(2s)}\right] + \lambda^{(2)}\left\langle\varphi(B)\Gamma^{+}\hat{u}^{(2j-1)}, \vec{e}-u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\right\rangle +$$
$$\left. + \left\langle\varphi(B)\Gamma^{+}\varphi(B)\hat{u}^{(2j)}, u^{(0)}\vec{C}^{(0)} - \vec{e}\right\rangle\right),$$

$$\lambda^{(2j)} = \left(\varphi(B)\hat{u}^{(2j-1)}, u^{(0)}\right),$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(2)}_{n,\nu}, \lambda^{(2j)} = \lambda^{(2j)}_{n,\nu,i}, \hat{u}^{(j)} = \hat{u}^{(j)}_{n,\nu,i}, \vec{C}^{(2j-2)} = \vec{C}^{(2j-2)}_{n,\nu,i},\ u^{(0)} = u^{(0)}_{n,\nu,i},$$

$$\hat{u}^{(0)} = 0, \left\|u^{(0)}_{n,\nu,i}\right\| = 1, \left\|\vec{C}^{(0)}_{n,\nu,i}\right\|_R = 1, i = \overline{1,\mu_\nu}, \nu = \overline{1,r}, \sum_{\nu=1}^{r}\mu_\nu = k.$$

5. Збіжність FD-методу в особливому випадку $(\varphi(B)e_p, e_m) = 0\ \ \forall p, m = \overline{1,k}$

Перейдемо до пошуку оцінок. Використовуючи введені в п.3 позначення, з (68) при $j = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\left|\lambda^{(2j)}_{n,\nu,i}\right| \leq \left\|\varphi(B)u^{(0)}_{n,\nu,i}\right\|\left\|\hat{u}^{(2j-1)}_{n,\nu,i}\right\|,$$

$$\left\|\hat{u}^{(2j-1)}_{n,\nu,i}\right\| \leq \alpha\left(\sum_{s=1}^{j-1}\left\|\hat{u}^{(2j-2s-1)}_{n,\nu,i}\right\|\left\|\hat{u}^{(2s-1)}_{n,\nu,i}\right\| + \left\|\hat{u}^{(2j-2)}_{n,\nu,i}\right\| + \left\|\vec{C}^{(2j-2)}_{n,\nu,i}\right\|_R\right),$$

$$\left\|\hat{u}^{(2j)}_{n,\nu,i}\right\| \leq \alpha\left(\sum_{s=1}^{j-1}\left\|\hat{u}^{(2j-2s-1)}_{n,\nu,i}\right\|\left\|\hat{u}^{(2s)}_{n,\nu,i}\right\| + \left\|\hat{u}^{(2j-1)}_{n,\nu,i}\right\|\right), \tag{69}$$

$$\left\|\vec{C}^{(2j)}_{n,\nu,i}\right\| \leq \beta\left\{\alpha\sum_{s=1}^{j}\left\|\hat{u}^{(2j+1-2s)}_{n,\nu,i}\right\|\left\|\hat{u}^{(2s-1)}_{n,\nu,i}\right\| + \alpha\left\|\hat{u}^{(2j)}_{n,\nu,i}\right\| + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{j-1}\left\|\hat{u}^{(2j+1-2s)}_{n,\nu,i}\right\|\left\|\vec{C}^{(2s)}_{n,\nu,i}\right\|\right\},$$

де $\alpha = M_{n,\nu,i}$, $\beta = \left\| \left(D^{[2,\nu]} \right)^{+} \right\| |\langle \varphi\,(B)\,\vec{e}\rangle| \max(\sqrt{k-1}, 2)$. Тут, для одержання останньої нерівності використано такі співвідношення:

$$\left| \left\langle \vec{e} - u^{(0)} \vec{C}^{(0)} \right\rangle \right|^2 = k-1, \quad \left| \left\langle \varphi(B)(\vec{e} - u^{(0)} \vec{C}^{(0)}) \right\rangle \right| \le 2\,|\langle \varphi(B)\vec{e}\rangle|\,.$$

Введемо в (69) заміну:

$$c_{2j} = (M_{n,\nu,i})^{-2j-1} \left\| \vec{C}^{(2j)}_{n,\nu,i} \right\|_R, u_j = (M_{n,\nu,i})^{-j} \left\| \hat{u}^{(j)}_{n,\nu,i} \right\|, \quad j = 1,2,...,$$
$$c_0 = 1, \quad u_0 = 0.$$

Тоді система нерівностей (69) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &u_{2j-1} \le \sum_{s=1}^{j-1} u_{2j-2s-1} u_{2s-1} + u_{2j-2} + \alpha c_{2j-2}, \\ &u_{2j} \le \sum_{s=1}^{j-1} u_{2j-2s-1} u_{2s} + u_{2j-1}, \\ &c_{2j} \le \beta \left[\sum_{s=1}^{j} u_{2j-2s+1} u_{2s-1} + u_{2j} \right] + \alpha\beta \sum_{s=1}^{j-1} u_{2j-2s+1} c_{2s}, \\ &\qquad\qquad j = 1,2,...,\ c_0 = 1,\ u_0 = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Замінивши в (70) знак нерівності на знак рівності, одержуємо мажоруючу систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2j-1} &= \sum_{s=1}^{j-1} \bar{u}_{2j-2s-1} \bar{u}_{2s-1} + \bar{u}_{2j-2} + \alpha\, \bar{c}_{2j-2}, \\ \bar{u}_{2j} &= \sum_{s=1}^{j-1} \bar{u}_{2j-2s-1} \bar{u}_{2s} + \bar{u}_{2j-1}, \\ \bar{c}_{2j} &= \beta \left[\sum_{s=1}^{j} \bar{u}_{2j-2s+1} \bar{u}_{2s-1} + \bar{u}_{2j} \right] + \alpha\beta \sum_{s=1}^{j-1} \bar{u}_{2j-2s+1} \bar{c}_{2s}, \\ & j = 1,2,...,\ \bar{u}_0 = u_0 = 0,\ \bar{c}_0 = c_0 = 1, \end{aligned} \tag{71}$$

у тому розумінні, що

$$u_{2j-1} \le \bar{u}_{2j-1}, \ \ u_{2j} \le \bar{u}_{2j}, \ \ c_{2j} \le \bar{c}_{2j}, \ \ j = 1,2,\ldots.$$

Систему (71) будемо розв'язувати методом твірних функцій. Введемо таке позначення:

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{u}_{2j+1},\ g(z)=\sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{u}_{2j+2},\ w(z)=\sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{c}_{2j}. \tag{72}$$

Із (71) одержуємо систему:

$$\begin{aligned} f(z) =& zf^2(z)+zg(z)+\alpha w(z),\\ g(z) =& zf(z)g(z)+f(z),\\ w(z)-1 =& \beta z\left\{[f(z)]^2+g(z)\right\}+\alpha\beta\,[f(z)-\alpha]\,[w(z)-1]\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Звідси відносно z маємо квадратне рівняння

$$\begin{aligned} &[\alpha\beta f-\alpha\beta(\alpha+1)-1]f^3z^2+[-2\alpha\beta f^2+(3\alpha^2\beta+2)f-\\ &-(\alpha^2-\alpha-1)\alpha\beta-\alpha+1]fz+\alpha\beta f^2-(2\alpha^2\beta+1)f+\alpha^3\beta+\alpha=0, \end{aligned}$$

з якого знаходимо z як функцію від f, вибравши серед двох коренів корінь, для якого виконується співвідношення $z(\alpha)=0$, тобто

$$\begin{aligned} z(f)=&\big(2\alpha\beta f^2-(3\alpha^2\beta+2)f+\alpha(\alpha^2-\alpha-1)\beta+\alpha-1+\\ &+\big[4\alpha^2\beta^2 f^3+(\alpha(\alpha^2-12\alpha-4)\beta-8)\alpha\beta f^2+\\ &+(4-2\alpha^3(\alpha^2-5\alpha-3)\beta^2-2\alpha(\alpha^2-7\alpha-2)\beta)f+\\ &+\alpha\beta(\alpha^2-\alpha-1)(\alpha(\alpha^2-\alpha-1)\beta+2\alpha-2)+(\alpha-1)^2\big]^{1/2}\Big)\,/\\ &/\left[2f^2(\alpha\beta f-1-\alpha(\alpha+1)\beta)\right]. \end{aligned} \tag{74}$$

Помножимо чисельник і знаменник на вираз

$$\begin{aligned} m=-&\big(2\alpha\beta f^2-(3\alpha^2\beta+2)f+\alpha(\alpha^2-\alpha-1)\beta+\alpha-1-\\ &-\big[4\alpha^2\beta^2 f^3+(\alpha(\alpha^2-12\alpha-4)\beta-8)\alpha\beta f^2+\\ &+(4-2\alpha^3(\alpha^2-5\alpha-3)\beta^2-2\alpha(\alpha^2-7\alpha-2)\beta)f+\\ &+\alpha\beta(\alpha^2-\alpha-1)(\alpha(\alpha^2-\alpha-1)\beta+2\alpha-2)+(\alpha-1)^2\big]^{1/2}\Big). \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$z\,(f)=-2\alpha\beta\frac{(f-\alpha)\left(f-\alpha-\frac{1}{\alpha\beta}\right)}{f\,m}. \tag{75}$$

Неважко показати, що

$$z(f) > 0 \quad \forall f \in \left(\alpha, \alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\right),$$

а отже, існує таке $f_{\max} \in \left(\alpha, \alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\right)$, що

$$\max_{f\in\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{\alpha\beta}\right)} z\left(f\right) = z(f_{\max}) = z_{\max}$$

і $z_{\max}$ – радіус збіжності ряду $f(z)$, а також рядів $g(z)$, $w(z)$, тобто існують такі додатні сталі L_i, ε_i, $i = 1, 2, 3$, що

$$(z_{\max})^j \bar{u}_{2j-1} \le \frac{L_1}{j^{1+\varepsilon_1}},\ (z_{\max})^j \bar{u}_{2j} \le \frac{L_2}{j^{1+\varepsilon_2}},\ (z_{\max})^j \bar{c}_{2j} \le \frac{L_3}{j^{1+\varepsilon_3}},\ j = 1, 2, ...$$

Викладене вище переконує нас у справедливості наступної теореми.

Теорема 5.1. *Нехай* $(\varphi(B)e_{n,p}, e_{n,m}) = 0\ \forall p, m = \overline{1, k}$ *та виконується умова*

$$q_{n,\nu,i} = \frac{M_{n,\nu,i}}{z_{\max}} < 1. \tag{76}$$

Тоді FD-метод для задачі (1) *є суперекспоненціально збіжним і мають місце такі оцінки його точності:*

$$\begin{aligned} \left\| u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i} \right\| &= \left\| u_{n,\nu,i} - \sum_{j=0}^{m} u_{n,\nu,i}^{(j)} \right\| \le \frac{2\bar{L}}{(m+1)^{1+\varepsilon}} \frac{q_{n,\nu,i}^{m+1}}{1 - q_{n,\nu,i}}, \\ \left\| \lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i} \right\| &= \left\| \lambda_{n,\nu,i} - \sum_{j=0}^{m} \lambda_{n,\nu,i}^{(j)} \right\| \le \frac{\bar{L} \left\| \varphi(B) u_{n,\nu,i}^{(0)} \right\|}{(m+1)^{1+\varepsilon}} \frac{q_{n,\nu,i}^{m}}{1 - q_{n,\nu,i}}. \end{aligned} \tag{77}$$

Якщо $q_{n,\nu,i} = 1$, *то замість оцінок* (77) *справджуються наступні оцінки:*

$$\begin{aligned} \left\| u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i} \right\| &\le 2\bar{L} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \le \frac{2\bar{L}}{\varepsilon m^{\varepsilon}}, \\ \left\| \lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i} \right\| &\le \bar{L} \left\| \varphi(B) u_{n,\nu,i}^{(0)} \right\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \le \frac{\bar{L} \left\| \varphi(B) u_{n,\nu,i}^{(0)} \right\|}{\varepsilon m^{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{78}$$

Тут $\bar{L} = \max(L_1, L_2, L_3), \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), i = \overline{1, \mu_\nu}, \nu = \overline{1, r}, \sum_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$.

Приклад 5.1. Розглянемо одновимірну по простору векторно-матричну задачу Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Діріхле на відрізку $(0,1)$, тобто задачу (1), в якій оператори A, B визначені наступним чином:

$$D\left(A\right)=\left\{v\in W_2^2\left(0,1\right): v\left(0\right)=v\left(1\right)=0\right\},\ Av=\frac{d^2v\left(x\right)}{dx^2}\quad\forall v\in D\left(A\right),$$

$$D\left(B\right)=L_2\left(0,1\right),\quad Bv=Q\left(x\right)v\left(x\right),$$

$$Q\left(x\right)=\left(1/2-x\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & \left(1/2-x\right)^2\\ 1 & 1 & 1\\ \left(1/2-x\right)^2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad x\in(0,1).$$

У табл. 1 наведено трійки власних значень $\lambda_{n,l}^{ex}$, $l=\overline{1,3}$, $n=\overline{1,4},8$, отримані методом стрільби з використанням методу Гіра для інтегрування відповідних задач Коші. Обчислення здійснені за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 17 (з `Digits`=128, `maxord`=11, `abserr`=10^{-36}, `relerr`=10^{-24}).

За допомогою реалізованого в пакеті MATSCS в Matlab методу CPM$\{10,8\}$ (див. [17]) знайдено власні значення E_t у режимі обчислень із подвійною точністю та допустимим відхиленням `tol`$=10^{-15}$. Деякі з них при $t=\overline{0,11}$ та $t=\overline{21,23}$ разом з похибками обчислень ΔE_t наведені в табл. 1. Кількість інтервалів розбиття "основної" сітки `nint`$=25$. Як бачимо з табл. 1, вже при невеликих номерах t власні значення в трійках співпадають, а саме $E_3=E_4$, $E_6=E_7$, $E_{3t}=E_{3t+1}=E_{3t+2}$, $t>=3$. Це зумовлено близькістю власних значень у трійках та використанням розбиття відрізка, яке генерується на початку виконання алгоритму CPM-методу, для обчислення всіх власних значень.

Застосуємо найпростіший варіант FD-методу, коли $\bar{B}\equiv 0$. Псевдооберненний оператор Мура-Пенроуза Γ^+ має вигляд

$$\Gamma^+v=(g_n(x,\cdot),v_n(\cdot))=\int_0^1 g_n(x,\xi)v_n(\xi)d\xi,$$

$$g_n(x,\xi)=\frac{1}{4\pi^2n^2}(\cos(n\pi(x+\xi))-\cos(n\pi(x-\xi)))-\frac{1}{2\pi n}(\sin(n\pi(x+\xi))\times$$
$$\times(1-x-\xi)-\sin(n\pi|x-\xi|)(1-|x-\xi|)),$$

де $g_n(x,\xi)$ – узагальнена функція Гріна.

Таблиця 1. Обчислення, здійснені за допомогою методу стрільби (з використанням методу Гіра з maxord=11, abserr=10^{-36}, relerr=10^{-24}) та методу CPM$\{10, 8\}$ (з tol= 10^{-15}, nint= 25)

n	l	$\lambda_{n,l}^{ex}$	k	E_t	ΔE_t
1	1	9.863005897991451947257214	0	9.86300589799145	$+3.55{\cdot}10^{-15}$
	2	9.868665687828881068818954	1	9.86866568782887	$+2.19{\cdot}10^{-15}$
	3	9.869448153557578352854274	2	9.86944815355757	$+2.19{\cdot}10^{-15}$
2	1	39.47847505309593329887386	3	39.4784750530959	$+8.77{\cdot}10^{-15}$
	2	39.47875905307639709887213	4	39.4784750530959	$+8.77{\cdot}10^{-15}$
	3	39.48029773815411128857833	5	39.4802977381541	$-1.42{\cdot}10^{-14}$
3	1	88.82646667897491171279617	6	88.8264666789749	$+1.97{\cdot}10^{-14}$
	2	88.82660431609601029718887	7	88.8264666789749	$+1.97{\cdot}10^{-14}$
	3	88.82761296473985512606048	8	88.8276129647398	$+2.84{\cdot}10^{-14}$
4	1	157.9136858376700168133047	9	157.913685837670	$+3.51{\cdot}10^{-14}$
	2	157.9137647274037242550664	10	157.913685837670	$+3.51{\cdot}10^{-14}$
	3	157.9143992106911288540809	11	157.913685837670	$+3.51{\cdot}10^{-14}$
8	1	631.6546855642199543269033	21	631.654685564219	$+1.40{\cdot}10^{-13}$
	2	631.6547055560593258633251	22	631.654685564219	$+1.40{\cdot}10^{-13}$
	3	631.6548807432349298044469	23	631.654685564219	$+1.40{\cdot}10^{-13}$

В цьому випадку кожне власне значення $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$ базової задачі має кратність 3 і йому відповідає ортонормальна система власних векторів $e_{n,m}(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)\|[\delta_{m,s}]\|_{s=\overline{1,3}}$, $m = \overline{1,3}$. Загальними розв'язками базової задачі є власні вектори

$$u_{n,p}^{(0)}(x) = \sum_{m=1}^{3} C_{n,p,m}^{(0)} e_{n,m}(x), \; p = \overline{1,3},$$

де $\vec{C}_{n,p}^{(0)} = \|[C_{n,p,m}^{(0)}]\|_{m=\overline{1,3}}$, $p = \overline{1,3}$ – ортонормальна система векторів, що є розв'язком відповідної системи (49). Кожне власне значення $\lambda_{n,\nu}^{(2)}$ матриці (50) має кратність 1 ($\mu_\nu = 1, \nu = \overline{1,3}$), тому індекс i (введений згідно з позначеннями п. 4) можна опустити.

FD-метод в цьому прикладі є *таким, що точно реалізується* (див. [18]). Для матричного потенціала $Q(x)$ виконуються співвідношення

$$(Q(x)e_{n,p}(x), e_{n,m}(x)) = 0, \; p, m = \overline{1,3}.$$

Умови теореми 4.1 виконуються, зокрема $\lambda_{n,l}^{(2j-1)} = 0$, $l = \overline{1,3}$, $j = 1, 2, ...$

Таблиця 2. Збіжність FD-методу для власних значень $\lambda_{n,l}, l = \overline{1,3}$ з номерами $n = \overline{1,4}, 8$.

n	j	$\left\|\lambda_{n.1}^{(j)}\right\|$	$\Delta_{n.1}(j)$	$\left\|\lambda_{n.2}^{(j)}\right\|$	$\Delta_{n.2}(j)$	$\left\|\lambda_{n.3}^{(j)}\right\|$	$\Delta_{n.3}(j)$
1	0	9.870	$6.6{\cdot}10^{-3}$	9.870	$9.4{\cdot}10^{-4}$	9.870	$1.6{\cdot}10^{-4}$
	2	$6.599{\cdot}10^{-3}$	$7.8{\cdot}10^{-7}$	$9.387{\cdot}10^{-4}$	$1.8{\cdot}10^{-8}$	$1.562{\cdot}10^{-4}$	$5.0{\cdot}10^{-10}$
	4	$7.877{\cdot}10^{-7}$	$2.3{\cdot}10^{-10}$	$1.778{\cdot}10^{-8}$	$7.9{\cdot}10^{-13}$	$4.995{\cdot}10^{-10}$	$3.7{\cdot}10^{-15}$
	6	$2.301{\cdot}10^{-10}$	$8.7{\cdot}10^{-14}$	$7.916{\cdot}10^{-13}$	$4.9{\cdot}10^{-17}$	$3.746{\cdot}10^{-15}$	$1.4{\cdot}10^{-18}$
2	0	39.48	$5.7{\cdot}10^{-5}$	39.48	$3.4{\cdot}10^{-4}$	39.48	$1.9{\cdot}10^{-3}$
	2	$5.745{\cdot}10^{-5}$	$6.8{\cdot}10^{-10}$	$3.415{\cdot}10^{-4}$	$1.7{\cdot}10^{-8}$	$1.881{\cdot}10^{-3}$	$7.6{\cdot}10^{-7}$
	4	$6.796{\cdot}10^{-10}$	$2.2{\cdot}10^{-14}$	$1.778{\cdot}10^{-8}$	$8.0{\cdot}10^{-13}$	$7.567{\cdot}10^{-7}$	$2.3{\cdot}10^{-10}$
	6	$2.125{\cdot}10^{-14}$	$1.2{\cdot}10^{-15}$	$8.050{\cdot}10^{-13}$	$4.5{\cdot}10^{-17}$	$2.329{\cdot}10^{-10}$	$4.4{\cdot}10^{-14}$
3	0	88.83	$2.7{\cdot}10^{-5}$	88.83	$1.6{\cdot}10^{-4}$	88.83	$1.2{\cdot}10^{-3}$
	2	$2.707{\cdot}10^{-5}$	$3.5{\cdot}10^{-12}$	$1.647{\cdot}10^{-4}$	$4.3{\cdot}10^{-11}$	$1.173{\cdot}10^{-3}$	$3.0{\cdot}10^{-8}$
	4	$3.477{\cdot}10^{-12}$	$3.1{\cdot}10^{-16}$	$4.269{\cdot}10^{-11}$	$1.3{\cdot}10^{-14}$	$2.968{\cdot}10^{-8}$	$2.7{\cdot}10^{-12}$
	6	$3.314{\cdot}10^{-16}$	$2.4{\cdot}10^{-17}$	$1.322{\cdot}10^{-14}$	$8.5{\cdot}10^{-20}$	$2.710{\cdot}10^{-12}$	$9.2{\cdot}10^{-16}$
4	0	157.9	$1.5{\cdot}10^{-5}$	157.9	$9.4{\cdot}10^{-5}$	157.9	$7.3{\cdot}10^{-4}$
	2	$1.542{\cdot}10^{-5}$	$3.3{\cdot}10^{-12}$	$9.431{\cdot}10^{-5}$	$2.4{\cdot}10^{-11}$	$7.288{\cdot}10^{-4}$	$1.6{\cdot}10^{-9}$
	4	$3.334{\cdot}10^{-12}$	$5.9{\cdot}10^{-17}$	$2.438{\cdot}10^{-11}$	$1.4{\cdot}10^{-16}$	$1.604{\cdot}10^{-9}$	$1.6{\cdot}10^{-13}$
	6	$6.218{\cdot}10^{-17}$	$2.8{\cdot}10^{-18}$	$1.408{\cdot}10^{-16}$	$1.2{\cdot}10^{-19}$	$1.635{\cdot}10^{-13}$	$5.9{\cdot}10^{-17}$
8	0	631.8	$3.9{\cdot}10^{-6}$	631.8	$2.4{\cdot}10^{-5}$	631.8	$2.0{\cdot}10^{-4}$
	2	$3.895{\cdot}10^{-6}$	$2.4{\cdot}10^{-13}$	$2.389{\cdot}10^{-5}$	$6.3{\cdot}10^{-13}$	$1.991{\cdot}10^{-4}$	$4.4{\cdot}10^{-11}$
	4	$2.373{\cdot}10^{-13}$	$8.5{\cdot}10^{-19}$	$6.257{\cdot}10^{-13}$	$2.8{\cdot}10^{-20}$	$4.364{\cdot}10^{-11}$	$2.1{\cdot}10^{-17}$
	6	$8.430{\cdot}10^{-19}$	$1.1{\cdot}10^{-20}$	$3.603{\cdot}10^{-20}$	$7.7{\cdot}10^{-21}$	$2.111{\cdot}10^{-17}$	$1.2{\cdot}10^{-19}$

Наближення $\overset{2j}{\lambda}_{n,l}$, $\overset{2j}{u}_{n,l}(x)$, $\overset{2j-1}{u}_{n,l}(x)$, $l = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$ знайдено в аналітичній формі, що дає можливість проаналізувати їх залежність від номера n трійки власних значень. Завдяки цьому при використанні FD-методу вдається уникнути наведених вище труднощів, які виникають при обчисленнях за допомогою методу CPM$\{10, 8\}$. Для прикладу наведемо другі поправки до трійок власних значень (інші не наводимо через їх громіздкість):

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = -\frac{1181}{17920\pi^2 n^2} + \frac{2921}{2560 n^4\pi^4} - \frac{267}{128\pi^6 n^6} + \frac{621}{128\pi^8 n^8} + \frac{1}{53760\pi^2 n^2}\times$$

$$\times\left[11630417 - \frac{416639286}{\pi^2 n^2} + \frac{4510913841}{\pi^4 n^4} - \frac{14640469200}{\pi^6 n^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{28240070040}{\pi^8 n^8} - \frac{58496709600}{\pi^{10} n^{10}} + \frac{68027072400}{\pi^{12} n^{12}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_{n,2}^{(2)} = -\frac{407}{26880\pi^2 n^2} + \frac{41}{1280 n^4\pi^4} + \frac{69}{64\pi^6 n^6} + \frac{621}{64\pi^8 n^8},$$

$$\lambda_{n,3}^{(2)} = -\frac{1181}{17920\pi^2n^2} + \frac{2921}{2560n^4\pi^4} - \frac{267}{128\pi^6n^6} + \frac{621}{128\pi^8n^8} - \frac{1}{53760\pi^2n^2}\times$$
$$\times\left[11630417 - \frac{416639286}{\pi^2n^2} + \frac{4510913841}{\pi^4n^4} - \frac{14640469200}{\pi^6n^6} + \right.$$
$$\left. + \frac{28240070040}{\pi^8n^8} - \frac{58496709600}{\pi^{10}n^{10}} + \frac{68027072400}{\pi^{12}n^{12}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Асимптотична поведінка знайдених поправок до власних значень відносно n є наступною: $\lambda_{n,2}^{(2j)} = O(n^{-2j+2})$, $\lambda_{n,l}^{(2j)} = O(n^{-2j}), l = 1, 3$, $j = \overline{1,3}$. Аналітичні перетворення та обчислення згідно з FD-методом здійснено за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 17 (з `Digits`=128). Поправки до власних значень за абсолютною величиною та абсолютні похибки наближень $\Delta_{n,l}(N) = |\lambda_{n,l}^{ex} - \overset{N}{\lambda}_{n,l}|$ FD-методу рангу $N = 0, 2, 4, 6$ до власних значень $\lambda_{n,l}^{ex}, l = \overline{1,3}$, з номерами $n = \overline{1,4}, 8$ наведені в табл. 2. Як бачимо, числові розрахунки підтверджують теорему 5.1 про суперекспоненціальну швидкість збіжності алгоритму.

[1] *Akulenko L., Nesterov S.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. – Chapman&Hall/ CRC Press Company. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2005. – 264 p.

[2] *Pryce J.D.* Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems. – Clarendon Press. – Oxford, New York, Tokyo, 1993. – 323 p.

[3] *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung// Math. Annalen. — 1937. — **113**, Mitt. I. — P. 600 – 619.

[4] *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung// Math. Annalen. — 1937. — **113**, Mitt. II. — P. 677 – 685.

[5] *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung// Math. Annalen. — 1939. — **116**, Mitt. III. — P. 555 – 570.

[6] *Armstrong M.A.* Basic Topology. – Springer-Verlag New York Inc., 1983. – 260 p.

[7] *Allgower E., Georg K.* Introduction to Numerical Continuation Methods. – Colorado State University, 1990. – 397 p.

[8] *Макаров В.Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами// Докл. АН СССР.— 1991.—**320**, №1.— С. 34 – 39.

[9] *Бандирськuй Б.Й., Макаров В.Л., Уханьов О.Л.* FD-метод для задач Штурма-Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності// Журн. обч. прикл. матем. — 2000. — **85**, №1. — С. 1 – 60.

[10] *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Popov A.M.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ODE's// J. Numer. Appl. Math. — 2010. — **100**, №1. — P. 60 – 81.

[11] *Bandyrskii B.I., Gavrilyuk I.P., Lazurchak I.I., Makarov V.L.* Functional-discrete method (FD-method) for matrix Sturm-Liouville problems// CMAM.— 2005.— **5**, №4. — P.362 – 386.

[12] *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems in Hilbert spaces: proceedings of the international conference "Differential equations and their applications (DETA 2009)", September 10-12, 2009, Panevezys, Lithuania// Kaunas university of technology Panevezys institute, Vilnius university, Institute of mathematics and informatics. — Kaunas: Technologija, 2009. — P. 86 – 92.

[13] *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Romanyuk N.M.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for an abstract eigenvalue problem with applications to the higher order ODEs// CMAM. – 2014.

[14] *Макаров В.Л.* FD-метод — экспоненциальная скорость сходимости// Обч. прикл. матем. — 1997. — №82. — P. 69 – 74.

[15] *Pruess S.* Estimating the eigenvalues of Sturm-Liouville problems by approximating the differential equation// SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — №10. — P. 55 – 68.

[16] *Pruess S., Fulton C.* Mathematical software for Sturm-Liouville problems// ACM Trans. Math. Software. (TOMS) — Sept.1993. — Vol. 19, №3. — P. 360 – 376.

[17] *Ledoux V., Van Daele M., Vanden Berghe G.* A numerical procedure to solve the multichannel Schrödinger eigenvalue problem// Comp. Phys. Commun. – 2007. – №176. – P. 191 – 199.

[18] *Makarov V. L.,Vinokur V. V.* The FD method for first-order linear hyperbolic differential equations with piecewise smooth coefficients// J. Math. Sci. – 1995.– **77**, №5. – P. 3399 – 3405.