

Ефективне використання попередньо обчислених даних у схемі ітеративної Sinc–апроксимації

Д.О. Ситник

Інститут математики НАН України, Київ; sytnik@imath.kiev.ua

We study the problem on how to reuse the previously calculated values of approximated function in the scheme of iteratively refining sequence of Sinc approximations. The proposed method is based upon the collocation of a current step Sinc approximation to the given function on the set of points where the function values are already known from the Sinc approximations calculated in the previous steps. Theoretical considerations are supported by several numerical examples.

В статье изучается проблема повторного использования ранее вычисленных значений аппроксимируемой функции для нахождения ее более точных приближений в схеме итеративно уточняющейся последовательности Sinc–аппроксимаций. Предложен метод решения этой проблемы который основан на принципе коллокации текущего Sinc–аппроксиманта некоторой функции в точках где значения этой функции уже известны в результате Sinc–аппроксимаций вычисленных во время предыдущих шагов. Теоретические выкладки подтверждены численными экспериментами.

1. Вступ

Використання експоненціально збіжних методів в математичному моделюванні багатьох фізичних, біологічних, хімічних явищ дало можливість отримувати наближені розв'язки з високою точністю за прийнятний час (див., наприклад, [7]). Широкої популярності серед застосовуваних методів останнім часом набув Sinc–метод [7,9]. За допомогою Sinc–наближень вдалося створити багато методів з експоненціальною швидкістю збіжності, а саме: апроксимація функцій, їх

похідних та первісних, квадратурні формули для інтегралів та згорток, чисельне обчислення прямого та оберненого перетворень Лапласа, наближення потенціалів тощо. Окрім цього, на основі Sinc-квадратурних формул вдалося побудувати чисельні методи з експоненціальною швидкістю збіжності для абстрактних диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами [3, 5] та еволюційних рівнянь у неklasичній постановці таких як нелокальні [4, 15] та зворотні у часі задачі [14].

Такому розповсюдженню Sinc-методів сприяє той факт, що ці методи забезпечують експоненціальну швидкість збіжності для досить широкого класу аналітичних функцій [9], а також те, що вони дозволяють відносно просту та ефективну (паралельну) реалізацію. Так наприклад в результаті застосування Sinc-методів до обчислення визначеного інтегралу на \mathbb{R} отримується загальновідома формула трапецій, яка, за умови деяких обмежень на підінтегральний вираз [9], буде експоненціально збіжною. В порівнянні з детально дослідженими теоретичними аспектами застосування Sinc-методів проблемам пов'язаним з реалізацією згаданих методів присвячуються відносно мало уваги.

Одна з таких проблем досліджується у теперішній роботі. Ця проблема пов'язана з тим, що у більшості прикладних задач точна інформація про властивості розв'язку та вхідних даних не доступна апріорі і тому потрібно використовувати апостеріорні методи оцінки похибки. Такі методи оцінки, як правило, вимагають обчислення наближення розв'язку для декількох значень параметра дискретизації з подальшим ітераційним покращенням чисельного розв'язку за необхідності. При такому підході використання попередньо обчислених наближень розв'язку під час обчислення його більш точних наближень є ключовим для ефективною реалізації та застосування чисельного методу. Згідно до теорії Sinc-методів розташування точок дискретизації нелінійно залежить від параметра дискретизації і тому точки в яких обчислені попередні наближення розв'язку у більшості випадків не співпадатимуть з відповідними точками для обчислення його більш-точних наближень.

Типовим в цьому сенсі є застосування згаданої формули трапецій на R до функції $f(x)$. Крок цієї квадратурної формули h та її похибка ε_N залежать від параметру дискретизації N , наступним чином [9]

$$h \propto N^{-1/2}, \quad \varepsilon_N = e^{-C\sqrt{N}}.$$

Вузли квадратури kh , як видно, будуть різними для різних значень кроку h ($k \neq 0$). Раніше обчислені значення функції $f(h_0k)$ для сітки з кроком h_0 можуть бути використані повторно тільки тоді, коли крок нової сітки [11]

$$ph = h_0, \quad p \geq 2, p \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

При цьому, кількість вузлів квадратури зростає у p^2 разів і тому навіть у найкращому випадку $p = 2$ тільки четверта частина значень функції може бути використана повторно. Знаходження раніше не обчислених значень $f(x)$ у багатьох важливих застосуваннях [3–5] вимагає значних обчислювальних ресурсів. Саме тому відшукання можливості повторного використання раніше обчислених значень функції під час побудови більш точного наближення цієї функції на щільнішій сітці з мінімізацією додаткових розрахунків є актуальною у контексті застосування Sinc-методів проблемою. Ми пропонуємо один з варіантів розв'язку цієї проблеми для випадку Sinc-апроксимації функцій.

Більш детальні відомості з теорії Sinc-методів та, зокрема, теорії Sinc-апроксимації представлені у пункті 2. Загальна ідея методу знаходження невідомих значень апроксимованої функції використовуючи її відомі значення обчислені в точках відмінних від точок апроксимації сформульована в 3 пункті. Деталі застосування цієї ідеї до Sinc-апроксимації присвячений пункт 4. Теоретичні міркування підтвердженні чисельними експериментами.

2. Sinc-апроксимація

Методи що обговорюються у даному пункті завдячують своєю назвою Sinc-функції:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

яка вперше була використана у теорії інформації (див. наприклад доведення Теорема Віттакера-Котельнікова-Шенона [1]). Ця функція математично описує ідеальний низькочастотний фільтр і тому широко застосовуються у цифровій обробці сигналів. Для спрощення подальшого викладу теорії ми також введемо до розгляду наступне позначення

$$S\{k, h\}(x) \equiv \text{sinc}\left(\frac{x}{h} - k\right), \quad h > 0, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

для функції, що є зсунутою та про-масштабованою версією $\text{sinc}(x)$. Це позначення є більш зручним для описання основаних на Sinc -функції апроксимаційних та квадратурних формул. Послідовність

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} S(k, h) \right\}_{k=-\infty}^{\infty} \quad (3)$$

утворює повний ортонормований базис у просторі $\mathbf{W}(\pi/h)$ інтегрованих з квадратом функцій $f(x) \in \mathbb{R}$, таких, що $\forall z \in \mathbb{C}$ функція $f(z)$ аналітична, причому $|f(z)| \leq C e^{\pi|z|/h}$, з деякою додатною константою C [9]. Унікальною властивістю набору функцій (2) є те що проєкція $\forall f \in \mathbf{W}(\pi/h)$ на k -й елемент базису $S\{k, h\}(x)$ дорівнює $f(kh)$. Звідки, позначивши

$$C_{\infty}\{f, h\}(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S\{k, h\}(x),$$

матимемо

$$f(x) = C_{\infty}\{f, h\}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Простір $\mathbf{W}(\pi/h)$ є завузким з точки зору застосувань оскільки вимагає аналітичності функції у всій комплексній площині. Виявилось [9], що обмеження області аналітичності функції до смуги D_d

$$D_d = \{z = x + iy \quad x \in (-\infty, \infty), |y| \leq d\} \quad (4)$$

не призводить до втрати якісних апроксимаційних властивостей базису (3). Множина функцій $f(z)$ аналітичних у смузі $z \in D_d$, для деякого $d < \pi/2$ і таких, що величина

$$N_1(f, D_d) \equiv \int_{\partial D_d} |f(z)| dz < \infty,$$

утворює простір, який називається простором Харді $H^1(D_d)$ з нормою $\|f\| = N_1(f, D_d)$ (аналогічно можна визначити простір $H^t(D_d)$ для $t = 2, 3, \dots$ [9]). У цьому просторі розклад $f(x)$ по послідовності функцій $S\{k, h\}$ (3) вже не є точним. Тим не менше, $\forall f \in H^1(D_d)$ справедлива наступна оцінка точності цього розкладу [10, с. 383]

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - C_{\infty}\{f, h\}(x)| \leq C e^{-\pi d/h}, \quad (5)$$

константа $C > 0$ не залежить від h . Тобто, заміна функції $f \in H^1(D_d)$ рядом який побудований з використанням значень $f(x)$ на дискретній множині точок призводить до виникнення експоненціально малої похибки, при $h \rightarrow 0$. Похибку такого роду у літературі прийнято називати похибкою дискретизації [13]. Згідно підходу, запропонованому в [2] для аналізу точності чисельних методів з використанням теорії функцій комплексної змінної, похибка дискретизації є однією з двох складових загальної похибки апроксимаційного методу. Інша складова загальної похибки виникає при заміні $C_\infty\{f, h\}(x)$ рядом скінченної довжини $C_N\{f, h\}(x)$:

$$C_N\{f, h\}(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=-N}^N f(kh)S\{k, h\}(x), \quad (6)$$

де $N > 0$ – цілий параметр, який визначає кількість точок Sinc-апроксимаційної формули рівну $2N + 1$. Таку похибку називають похибкою округлення (відкидання). Має місце наступна теорема [9, с. 137]:

Теорема 2.1. *Якщо функція $f \in H^1(D_d)$ є такою, що $\forall x \in \mathbb{R}$ виконується умова*

$$|f(x)| \leq L e^{-\alpha|x|}, \quad \text{з деякими } \alpha, L > 0. \quad (7)$$

Тоді, вибравши

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}}, \quad (8)$$

для похибки Sinc-апроксимації функції $f(x)$ рядом $C_N\{f, h\}(x)$ справедлива оцінка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - C_N\{f, h\}(x)| \leq C \mathcal{E}_N, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}_N = N^{1/2} e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}},$$

з константою C залежною від f, d, α та незалежною від N .

При доведені теореми, загальну похибку Sinc-апроксимації представляють у вигляді суми двох згаданих складових. Умова (7) накладена для того, щоб оцінити залишок ряду $|C_\infty\{f, h\}(x) - C_N\{f, h\}(x)| \leq e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}$ і таким чином узгодити похибку округлення з похибкою дискретизації (5). Подібні міркування можуть бути

застосованими до ситуації коли область аналітичності не змінюється, а швидкість спадання $f(x)$ на \mathbb{R} повільніша ніж експоненціальна. Похибка округлення, в такій ситуації, домінуватиме над похибкою дискретизації і буде вносити основний вклад до загальної похибки методу.

У переважній більшості застосувань параметри d, α не доступні апріорно, тому наступний вигляд похибки є більш зручним на практиці

$$\mathcal{E}(N) = C_1 \sqrt{N} e^{-C_2 \sqrt{N}}. \quad (10)$$

Цю формулу, насправді застосовують для зворотної задачі оцінки N , як функції від \mathcal{E} :

$$N(\mathcal{E}) = \left[\frac{1}{C_2} \mathbf{W}^2 \left(-\frac{C_2}{C_1} \mathcal{E} \right) + 1 \right], \quad (11)$$

де $\mathbf{W}(z)$ означає нижню гілку функції Ламберта $\text{LambertW}(-1, z)$, [8], а $[\cdot]$ – ціла частина від числа. Для цього спочатку за допомогою (10) наближено знаходяться сталі C_1, C_2 , а потім за формулою (11) обчислюється значення N . Оцінки на C_1, C_2 можна отримати використовуючи апостеріорну схему, що базується на визначенні невідомих сталих з системи рівнянь складених на основі значення функції $f(x)$ та двох її наближень $C_N\{f, h\}(x)$ при $N = N_0, 2N_0$. Або трьох наближень $N = N_0, 2N_0, 4N_0$, якщо точне значення функції не доступно для жодного x . Строго кажучи, для формування системи рівнянь з невідомими C_1, C_2 потрібно чотири наближення до $f(x)$. Три наближених значення дозволяють тільки оцінити константи C_1 та C_2 знизу. У більшості випадків (для достатньо великих N_0) така оцінка є досить точною.

Окрім згаданого вище результатів, що стосуються Sinc-апроксимації, міркування викладені у пункті 3 спираються на поняття колокації. Наступний результат дозволяє оцінити точність наближення деякої $f(x)$ Sinc-апроксимантом за умови, що відомі тільки наближенні значення $f(x)$ у відповідних точках апроксимації.

Теорема 2.2 (Stenger, [10, Теорема 3.3]). *Нехай для функції $f \in H^1(D_d)$ виконуються всі умови Теорема 2.1. Якщо для набору чисел $c_k \in \mathbb{C}$, $k = -N, \overline{N}$ виконується умова*

$$\left(\sum_{k=-N}^{\overline{N}} |f(kh) - c_k|^2 \right)^{1/2} < \delta, \quad (12)$$

з деяким додатнім $\delta \in \mathbb{R}$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{h} \sum_{k=-N}^N c_k S\{k, h\}(x) \right| \leq C\mathcal{E}_N + \delta, \quad (13)$$

з \mathcal{E}_N визначеним в (9).

3. Колокація значень $f(x)$ між апроксимаційними сітками

Два наступні пункти присвячені побудові схеми для повторного використання попередньо обчислених значень апроксимованої функції $f(x)$ при обчисленні її більш точних наближень в схемі ітеративної уточнювальної послідовності Sinc-апроксимацій. Тут ми дослідимо проміжну задачу знаходження невідомих значень функції на деякій сітці, по її відомим значенням у вузлах сіток меншої розмірності. При досить загальних припущеннях досліджувану проблему можна звести до системи лінійних рівнянь.

Припустимо, що на R визначена послідовність сіток (впорядкованих множин) Δ_k , $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta_k = \{x_{k,j}\}_{j=0}^{l_k}, \quad x_{k,j} \in R, \quad l_k \in \mathbb{N}, \quad l_{k+1} > l_k$$

таких, що k -та сітка містить m_k нових, по відношенню до попередніх сіток вузлів

$$m_k = \# \left(\Delta_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \Delta_i \right),$$

причому $m_1 = l_1$, $m_k > 0$, $\forall k \geq 2$. В цій роботі символ $\#(X)$ використовується для позначення кількості елементів множини X .

Для моделювання реалістичного випадку, що виникає при застосуванні Sinc-апроксимації ми накладемо додаткову вимогу на послідовність сіток Δ_k

$$\bigcap_{i=k}^p \Delta_i = \Delta_0, \quad \forall k, p \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

яка забороняє ієрархічне вкладення сіток послідовності і постулює існування деякої (можливо порожньої) спільної множини вузлів Δ_0 .

Умова (14), форма базисних функцій (3) і та обставина, що у застосуваннях [4, 15] використовується апроксимація на сітках утворених конформними відображеннями Δ_k , відкидає можливість застосування прийомів подібних до швидкого перетворення Фур'є [1] для знаходження невідомих $f(x_{n,j})$ по відомим $f(x_{k,i}), k \leq n$. Тому що такі прийоми базуються на ієрархічній вкладеності сіток та рекурентних співвідношеннях між базисними функціями. Отже, відкинувши ідею побудови подібних методів для Sinc -апроксимації на Δ_k , ми зосередимось на іншому підході, який базується на застосуванні колокації.

Припустимо, що в результаті послідовного застосування n кроків апроксимації функції $f(x)$ на $\Delta_k, k = \overline{1, n}$ ми отримали послідовність наближень $\widetilde{f}_k(x)$. Для обчислення кожного з \widetilde{f}_k було використано j значень $\widetilde{f}_{k,j} \equiv f(x_{k,j})$, які лінійно входять до формули апроксиманту (6). Далі нам потрібно обчислити наближення $\widetilde{f}_{n+1}(x)$ використовуючи сітку Δ_{n+1} . Вважатимемо, що серед обчислених значень $f(x)$ використаних для наближення на попередніх сітках є, як мінімум m_{n+1} унікальних:

$$m_{n+1} \leq \sum_{i=1}^n m_i. \quad (15)$$

Для знаходження невідомих значень $\widetilde{f}_{n+1,j}, j = \overline{1, m_{n+1}}$ достатньо розв'язати систему лінійних рівнянь (СЛР)

$$\widetilde{f}_{n+1}(x) = f(x_j), \quad x_j \in \Theta_{n+1}, \quad j = \overline{1, m_{n+1}}, \quad (16)$$

на підмножині вузлів Θ_{n+1} , де значення функції були обчислені під час попередніх кроків апроксимації

$$\Theta_{n+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Delta_i, \quad \#(\Theta_{n+1}) = m_{n+1}. \quad (17)$$

Доцільність використання системи (16) для знаходження невідомих $\widetilde{f}_{n+1}(x)$ виглядає не виправданою на перший погляд, оскільки у більшості випадків ефективнішим є пряме обчислення невідомих значень функції та апроксиманту $\widetilde{f}_{n+1}(x)$. Підхід з використанням СЛР виправдовуватиме себе, якщо, по-перше система (16) має розв'язок, по-друге цей розв'язок може бути обчислений з потрібною точністю,

і, по-третє, обчислювальна складність знаходження $\widetilde{f_{n+1,j}}$ вище ніж складність розв'язання цієї системи.

Перепишемо СЛР (16) у матричному вигляді

$$M_n W_{n+1} = F_n, \quad (18)$$

де W_{n+1} — це вектор невідомих значень функції у точках Δ_{n+1} , матриця M_n має розмірність $m_{n+1} \times m_{n+1}$, F_n — вектор значень функції $f(x)$ у вузлах $x_j \in \Theta_{n+1}$, $j = \overline{1, m_{n+1}}$. Система (16), як відомо, має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця M_n невироджена, тобто коли всі її рядки та стовпці є лінійно незалежними. В загальному випадку така лінійна незалежність не є очевидним фактом, тому що вона вимагає, щоб множина функцій $S\{j, h(N_{n+1})\}(x)$ залишалась поточково лінійно-незалежною відносно множини вузлів Θ_{n+1} . Довільність вибору цієї множини впливає з довільності вибору Δ_k , $k \leq n$. Незважаючи на це, у кожному конкретному випадку системи (18) завжди можна забезпечити невиродженість M_n під час розв'язування цієї системи методом Гаусса, наприклад. Для цього достатньо виключити один з лінійно залежних рядків/стовпців, якщо такі трапляються, за допомогою прямого обчислення значення $f(x)$ у відповідному вузлі Δ_{n+1} . І хоча такий спосіб частково нівелює переваги використання (16), він є зручним для апріорного контролю норми M_n на додачу. Від норми M_n залежить, не тільки існування розв'язку (18) (див. [6]), а й стійкість алгоритмів обчислення цього розв'язку [12]. Контроль точності знаходження розв'язку W_{n+1} здійснюється за допомогою застосування теореми 2.2.

Зрозуміло, що повністю уникнути прямих обчислень $f(x)$ неможливо, оскільки для формування СЛР (16) потрібно як мінімум m_{n+1} значень $f(x)$ (15). Тому обчислення $f(x)$ неминучі на початковому кроці формування першої системи і можуть також знадобитися на наступних кроках для забезпечення виконання (15), невиродженості M_n або стійкості вибраного чисельного методу знаходження W_{n+1} з (18).

У зв'язку з цим виникає цікаве питання: наскільки швидко зростання послідовності m_k є допустимим в рамках виконання умови (15)? Розв'язок рекурентної нерівності (15) мажорнується розв'язком рекурентного рівняння

$$r_{n+1} = \sum_{i=1}^n r_i.$$

Використавши стандартну підстановку $r_j = aq^j$ та просумувавши матимемо

$$q^{n+1} - 2q^n + 1 = 0,$$

звідки видно, що m_k не повинно зростати швидше ніж 2^k .

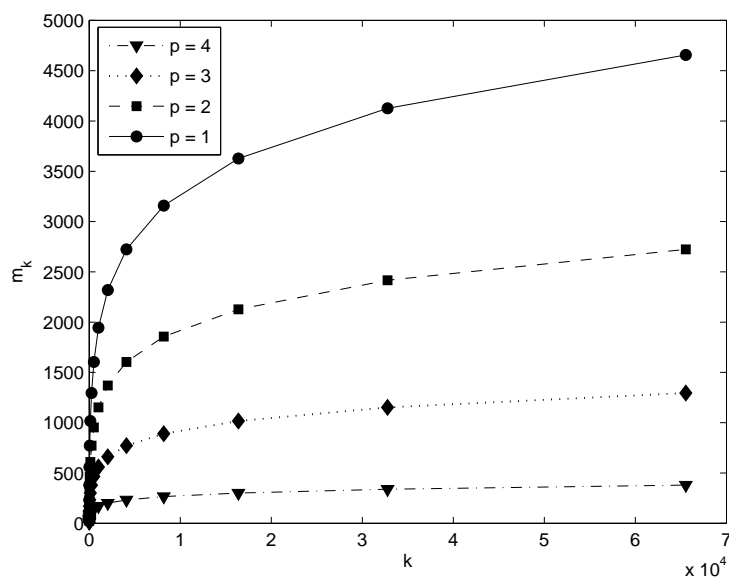
На практиці, коли необхідна швидкість ітераційного покращення похибки Sinc-апроксимації нижче ніж експоненціальна, m_k зростає значно повільніше ніж 2^k . Загальна кількість вузлів k -ї сітки $l_k = 2N_k + 1$, а отже

$$m_k < l_k = \left[\frac{2}{C_2} \mathbf{W}^2 \left(-\frac{C_2}{C_1} \mathcal{E}_k \right) + 3 \right] \\ \propto \left[\frac{2}{C_2} \ln \left(-\frac{C_2}{C_1} \mathcal{E}_k \right) \left\{ \ln \left(-\frac{C_2}{C_1} \mathcal{E}_k \right) - 2 \ln \left(-\ln \left(-\frac{C_2}{C_1} \mathcal{E}_k \right) \right) \right\} \right]$$

остання асимптотична оцінка спирається на розклад (4.20) з [8]. Випадок коли $\mathcal{E}_k = k^{-p}$ проілюстровано на Рис. З цього рисунку чітко видно логарифмічний характер зростання m_k відносно k . При побудови графіків для m_k була використана послідовність $k = 1, 2, 4, 8, \dots$ з метою моделювання реалістичної ситуації з узгодженням похибок. Тобто ситуації, коли $\mathcal{E}_k = k^{-p}$ це похибка іншого чисельного методу (пов'язаного, наприклад, з обчисленням резольвенти [4, 5]), що має бути узгоджена з похибкою Sinc-апроксимації. У випадку змальованому на Рис. $\forall k, p : \Delta_k \cap \Delta_p = \{0\}$, тобто $m_k = l_k - 1$ – жодне з обчислених значень $f(x)$ не буде використане повторно.

Якщо $N_{k+1} = 2N_k$ то реальна швидкість зростання $\{m_k\}$ для Sinc-апроксимації буде менше ніж 2^k оскільки частина вузлів Δ_{k+2} співпадатиме з Δ_k .

У наступному пункті ми більш детально зосередимось на формалізації описаної вище схеми для випадку Sinc-апроксимації. Слід зазначити, що згадана схема є досить загальною у сенсі свободи вибору послідовності вкладених сіток Δ_k та точок для формування колокаційної системи (16), а отже залишається можливість існування таких послідовностей Δ_k та Θ_k для яких відповідні матриці M_k – структуровані. Особливо перспективним є випадок коли M_k це циркулянтна (блочно-циркулянтна) або теплицева матриця [12]. У такому разі M_k має обернену є добре обумовленою, а обчислювальна складність розв'язування (18) – низька. Знаходження послідовностей Δ_k , Θ_k таких, що M_k належить одному зі згаданих класів, могло б значно розширити межі застосування схеми ітеративної Sinc-апроксимації і тому лишається перспективним напрямом досліджень на майбутнє.



Графік залежності параметру m_k Sinc-апроксимації, який характеризує кількість нових вузлів, від кроку k ітеративної схеми Sinc-апроксимації, якщо $\mathcal{E}_k = k^{-p}$ ($C_1 = C_2 = 1$).

4. Алгоритм методу

Дано $f(x)$ та послідовність $\{\Delta_k\}$, $\{l_k\}$, $\{m_k\}$ $k = \overline{1, K}$

Знайти Послідовність Sinc-апроксиматнів $\widetilde{f_k}(x)$

Обчислимо початковий вектор значень $f(x)$: $F_0 = f(\Delta_0)$

Для k від 1 до K

$$1: S_{k-1} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \Delta_i \quad s_{k-1} = \#(S_{k-1}).$$

2: Утворимо Θ_k виключивши з множини вузлів S_{k-1} ті, відстань від яких до Δ_k більше ніж відстань від решти вузлів S_{k-1} до тієї ж множини $\text{dist}(x, \Delta_k) > \text{dist}(S_{k-1} \setminus \{x\}, \Delta_k)$:

$$\Theta_k = \{y \in S_{k-1} | \forall x \in \Delta_k \exists ! y : \text{dist}(y, \Delta_k) \leq \text{dist}(y, \Delta_k \setminus \{x\})\}.$$

3: Якщо $\#(\Theta_k) < m_k$ то

Прямим обчисленням $f(x)$ виключимо з розгляду ті вузли $x \in \Delta'_k \subset \Delta_k$, що не мають відповідних пар в Θ_k :

$$\text{dist}(\Delta'_k, \Theta_k) > \text{dist}(\Delta_k, \Delta_k \setminus \Delta'_k).$$

4: Розв'яжемо систему (18)

$$W_k = M_{k-1}^{-1} F_{k-1}.$$

5: Застосувавши (6) побудуємо наближення $\widetilde{f_k}(x)$ з використанням щойно обчислених значень функції W_k , а також F_0 і значень $f(x)$ обчислених у кроці 3.

Щоб проілюструвати використання наведеного алгоритму розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.1. У цьому прикладі розглянемо Sinc-апроксимацію на послідовності рівномірних сіток Δ_k індукованих $N_k = 2^k$:

$$\Delta_k = \{jh_k | j = \overline{-N_k, N_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

де крок h_k , визначається (8). Кожна з множин Δ_k — це стандартна для Sinc-апроксимації сітка, що використовується у теоремі 2.1 та інших методах на основі Sinc-функцій [9]. При прямому застосуванні формули (6) для знаходження послідовності $\widetilde{f_k}(x) = C_{N_k}\{f(x), h_k\}(x)$, $k = \overline{1, N}$ загальна кількість вузлів у яких необхідно обчислити $f(x)$ виражається формулою

$$s_{k-1} = \#(S_{k-1}). \quad (19)$$

Для такої послідовності Δ_k множина $\Delta_0 = \{0\}$, а послідовність $l_k = 2^{k+1} + 1$. Вище було зазначено, що послідовність m_k зростатиме повільніше ніж l_k , оскільки $\forall k > 1 \Delta_k \subset \Delta_{k+2}$.

$$m_k = 2^{k+1} - 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}.$$

Результати застосування алгоритму ітеративної Sinc-апроксимації до наближеного обчислення функції $f(x) = e^{-x^2}$ подані в таблицю В ній для кожного кроку k сформульованого вище алгоритму, представлено наступні дані:

s_k — загальна кількість унікальних вузлів послідовності сіток $\bigcup_{i=1}^k \Delta_i$

m_k — кількість унікальних вузлів Δ_k , які не зустрічались під час побудови наближень на Δ_j , $j < k$.

d_k — величина що показує скільки прямих обчислень $f(x)$ необхідно здійснити на k -му кроці алгоритму $d_k = \#(\Theta_k) - m_k$.

$\mathcal{K}(M_{k-1}) = \|M_{k-1}^{-1}\| \|M_{k-1}\|$ — число обусовленості матриці M_{k-1} .

\mathcal{E}_{alg} , \mathcal{E}_{N_k} — експериментально обчислена похибка наближення алгоритму та класичної Sinc-апроксимації, відповідно.

N_k	s_k	m_k	d_k	$\mathcal{K}(M_{k-1})$	\mathcal{E}_{alg}	\mathcal{E}_{N_k}
4	9	8	4	2.322	0.01646	0.01531
8	19	16	10	3.11	7.705E-03	3.370E-03
16	35	32	16	8.106	4.992E-04	3.794E-04
32	69	64	34	9.425	2.967E-05	1.560E-05
64	131	128	62	38.96	5.681E-07	1.622E-07
128	261	256	130	37.2	1.043E-09	2.520E-10
256	523	512	262	86.5	9.688E-12	9.000E-12

Аналіз представлених у таблиці даних показує, що при послідовному знаходженні семи апроксимантів загальна кількість безпосередніх обчислень $f(x)$ склала $\sum_{i=1}^7 d_i + 1 = 519$ в той час, як застосування звичайної апроксимації потребувало б $\sum_{i=1}^7 m_i = 765$ безпосередніх обчислень $f(x)$ у найкращому випадку. Варто також зазначити, що зменшення кількості прямих обчислень $f(x)$ досягнуто без втрати точності апроксимації (див. порівняння \mathcal{E}_{alg} та \mathcal{E}_{N_k} у таблиці)

- [1] *Brigham E.* The Fast Fourier Transform and Its Applications. — Prentice Hall, 1988. — 463 p.
- [2] *Davis P.* Errors of numerical approximation for analytic functions // Journal of Rational Mechanics and Analysis. — 1953. — Vol. 2, no. 3. — P. 303–313.

- [3] Exponentially convergent duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a banach space / Т.Ю.Bohonova, I.P.Gavrilyuk, V.L.Makarov, V.B.Vasylyk // SIAM J. Numer. Anal. — 2007/08. — Vol. 46, no. 5. — P. 365–396.
- [4] Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in banach space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2010. — Vol. 31, no. 1. — P. 1–21.
- [5] *Gavrilyuk I., Makarov V.* Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2005. — Vol. 43, no. 5. — P. 2144–2171.
- [6] *Gil' M. I.* Operator functions and localization of spectra. Lecture Notes in Mathematics. — Berlin : Springer, 2003. — 260 p.
- [7] *Lund J., Bowers K.* Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations. — SIAM, Philadelphia, 1992.
- [8] On the LambertW function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare et al. //Advances in Computational Mathematics. — 1996. — Vol. 5, no. 1. — P. 329–359.
- [9] *Stenger F.* Numerical methods based on Sinc and analytic functions. — Springer, New York, 1993. — 580 p.
- [10] *Stenger F.* Summary of sinc numerical methods // J. Comput. Appl. Math. — 2000. — Vol. 121. — P. 379–420.
- [11] *Stenger F.* Handbook of Sinc Numerical Methods. Chapman and Hall/CRC numerical analysis and scientific computation series. — USA : CRC Press, 2011. — 483 p.
- [12] *Trefethen L., Bau D.* Numerical linear algebra. — SIAM, 1997. — P. 376. —
- [13] *Trefethen L. N., Weideman J.* The exponentially convergent trapezoidal rule // *SIAM Review.* — 2014. — Vol. 56, no. 3. — P. 385–458.
- [14] *Vasylyk V.* Exponentially convergent method for the final value problem for the first order differential equation in banach space // Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine . — 2014. — Vol. 11, no. 4. — P. 509–523.
- [15] *Ситник Д. О.* Експоненціально збіжні методи для нелокальної абстрактної задачі Коші та нелінійних крайових задач : Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук : 01.01.07 / Дмитро Олексійович Ситник ; Ін-т математики НАН України. — Київ, 2012. — 131 с.