Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 308–317

УДК 517.51

# Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике *

*С.А. Стасюк*

*Институт математики НАН Украины, Киев,*
*stasyuk@imath.kiev.ua*

We obtain the exact order estimates of classes $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic function of several variables by Vallée-Poussin sums with spectrum in generalized step-hyperbolic crosses in the uniform metric.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Валле Пуссена зі спектром із узагальнених східчасто-гіперболічних хрестів у рівномірній метриці.

## 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — $d$-мерное евклидово пространство с элементами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$, $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, — пространство $2\pi$-периодических по каждой переменной функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

---

* Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences))

Для $f \in L_p$ будем считать выполненным условие

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x})\,dx_j = 0, \qquad j = \overline{1,d}.$$

Для функции $f \in L_p$ рассмотрим смешанный модуль непрерывности порядка $\boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_d) \in \mathbb{N}^d$ следующего вида:

$$\Omega_{\boldsymbol{l}}(f,\mathbf{t})_p := \sup_{\substack{|h_j| \le t_j,\\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta^{\boldsymbol{l}}_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p,$$

где $\Delta^{\boldsymbol{l}}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) := \Delta^{l_d}_{h_d} \dots \Delta^{l_1}_{h_1} f(\mathbf{x}) := \Delta^{l_d}_{h_d}(\dots(\Delta^{l_1}_{h_1} f(\mathbf{x})))$ — $\boldsymbol{l}$-смешанная разность функции $f$ с векторным шагом $\mathbf{h} = (h_1,\dots,h_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta^{l_j}_{h_j} f(\mathbf{x}) := \sum_{n=0}^{l_j} (-1)^{l_j-n} \binom{l_j}{n} f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+nh_j,x_{j+1},\dots,x_d).$$

Далее, не ограничивая общности и для простоты изложений, полагаем, что $l_1 = \dots = l_d = l$.

Пусть $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1,\dots,t_d)$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка $\boldsymbol{l}$, которая удовлетворяет таким условиям:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ возрастает по каждой переменной;

3) $\Omega(m_1 t_1,\dots,m_d t_d) \le \prod_{j=1}^d m_j^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(\mathbf{t})$ непрерывна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будем считать, что функция $\Omega(\mathbf{t})$ удовлетворяет также условиям $(S)$, $(S_l)$, которые называют условиями Бари–Стечкина [1]. Это означает следующее.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию $(S)$, если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором $\alpha$: $\alpha > 0$, т. е. существует такая независимая от $\tau_1$ и $\tau_2$ постоянная $C_1 > 0$, что $\varphi(\tau_1)/\tau_1^\alpha \le C_1 \varphi(\tau_2)/\tau_2^\alpha$, $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Функция $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию $(S_l)$, если $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при некотором $\gamma$: $0 < \gamma < l$, т. е. существует такая независимая от $\tau_1$ и $\tau_2$ постоянная $C_2 > 0$, что $\varphi(\tau_1)/\tau_1^\gamma \ge C_2\, \varphi(\tau_2)/\tau_2^\gamma$, $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Будем предполагать, что функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ удовлетворяет условиям $(S)$ и $(S_l)$, если она удовлетворяет этим условиям по каждой переменной $t_j$ при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество функций $\Omega$, для которых выполняются сформулированные выше условия 1–4, а также условия Бари–Стечкина $(S)$ и $(S_l)$ обозначаем через $\Phi_{\alpha,l}$.

Теперь приведём определение пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые рассмотрены в работе [2].

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$, а $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка $\boldsymbol{l}$, которая удовлетворяет условиям $1-4$. Тогда пространство $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$MB^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

где

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} := \left( \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left( \frac{\Omega_{\boldsymbol{l}}(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\Omega}_{p}} := \sup_{\mathbf{t} > \mathbf{0}} \frac{\Omega_{\boldsymbol{l}}(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})}. \tag{2}$$

При $\theta = \infty$ считаем, что $MB^{\Omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\Omega}_{p}$. Шкала пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ (в случае произвольной функции $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ типа смешанного модуля непрерывности порядка $\boldsymbol{l}$, удовлетворяющей условиям $1-4$) является естественным обобщением шкалы пространств (смешанной гладкости) Никольского–Бесова $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, периодических функций многих переменных (см., например, [3]) и $MB^{\Omega}_{p,\theta} \equiv MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ при $\Omega(\mathbf{t}) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $r_j < l$, $j = \overline{1, d}$. Заметим, что $MB^{\mathbf{r}}_{p,\infty} \equiv MH^{\mathbf{r}}_{p}$ — пространства Никольского, а $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, — пространства Бесова. Иногда пространства $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, смешанной гладкости называют пространствами Никольского–Бесова–Аманова.

В дальнейшем, при оценке аппроксимативных характеристик, нам будет удобно рассматривать пространства $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ с декомпозиционной точки зрения и использовать при этом эквивалентные (1) и (2) представления нормы функций из пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$.

Обозначим $\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $\rho(\mathbf{s}) := \{\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) : 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ s_j \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,d}\}$, $\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) := := (f * \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})})(\mathbf{x})$, где значком “$*$” обозначена операция свёртки двух функций, т. е. $\varphi * g := (\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$.

Отметим, что запись $a \asymp b$ означает, что для неотрицательных величин $a$ и $b$, определяемых некоторой совокупностью параметров, существует положительная величина $C$, не зависящая от одного, обозначенного контекстом параметра, такая, что $C^{-1}a \le b \le Ca$. Если же выполняется неравенство $b \le Ca$ или $b \ge C^{-1}a$, то часто будем писать $b \ll a$ или $b \gg a$ соответственно.

Далее, через $\mathcal{V}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим ядро Валле Пуссена вида $\mathcal{V}_n(t) := 1/n \sum_{k=n}^{2n-1} \mathcal{D}_k(t)$, где $\mathcal{D}_k(t) := \sum_{m=-k}^{k} e^{imt}$ — ядро Дирихле. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, и $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_d) \in \mathbb{N}^d$, положим $A_{\mathbf{s}}(f) := f * A_{\mathbf{s}}$, где $A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} \big(\mathcal{V}_{2^{s_j}}(x_j) - \mathcal{V}_{2^{s_j-1}}(x_j)\big)$. Заметим, что (см., например, [4, гл. 1, § 1])

$$||A_{\mathbf{s}}||_p \asymp 2^{||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}. \tag{3}$$

Как установлено в [5] ($\theta = \infty$) и [6] ($1 \le \theta < \infty$), для функций из пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, справедливы соотношения

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \, \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \qquad 1 \le \theta < \infty, \tag{4}$$

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathbf{s}} \frac{\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}, \tag{5}$$

где $\Omega(2^{-\mathbf{s}}) := \Omega(2^{-s_1},\dots,2^{-s_d})$.

При $\Omega(\mathbf{t}) = t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, т. е. для пространств Никольского–Бесова $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, соотношения, соответствующие (4) и (5), установлены в [3] (для случая $\theta = \infty$ см. также [7]).

Через $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ обозначим шар единичного радиуса в пространстве $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, т. е.

$$\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in MB^{\Omega}_{p,\theta} :\ ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\}.$$

Введем обозначение множеств, которые будут являться спектром тригонометрических полиномов, применяемых для приближения рассматриваемых функциональных классов. Для произвольного

$N \in \mathbb{N}$ положим, что

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, p, q, N) := \{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d : \ \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{||\mathbf{s}||_1 (1/p-1/q)_+} \geq N^{-1}\},$$

$$Q(N) := Q(\Omega, p, q, N) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa(N)} \rho(\mathbf{s}),$$

где $a_+ := \max\{a; 0\}$.

Отметим, что множества $Q(N)$ порождаются поверхностями уровня функции $\Omega_1(\mathbf{t}) := \Omega(\mathbf{t}) / \prod_{j=1}^d t_j^{(1/p-1/q)_+}$. В том случае, когда $\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $(1/p - 1/q)_+ < r_j$, $j = \overline{1, d}$, множества $Q(N)$ являются ступенчатыми гиперболическими крестами. В общем случае множества $Q(N)$ будем называть обобщёнными ступенчатыми гиперболическими крестами.

Далее обозначим

$$\kappa^{\perp}(N) := \mathbb{N}^d \setminus \kappa(N) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d : \ \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{||\mathbf{s}||_1 (1/p-1/q)_+} < N^{-1}\}, \quad (6)$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N) \setminus \kappa^{\perp}(2^l N). \quad (7)$$

Из (6), (7) получаем $(2^l N)^{-1} \leq \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{||\mathbf{s}||_1 (1/p-1/q)_+} < N^{-1}$, т. е.

$$\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{||\mathbf{s}||_1 (1/p-1/q)_+} \asymp N^{-1}, \quad (8)$$

где $\mathbf{s} \in \Theta(N)$.

В [8] показано, что $\Theta(N) \neq \varnothing$ и

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \quad (9)$$

где через $|\mathcal{M}|$ обозначается количество элементов множества $\mathcal{M}$.

Теперь перейдем к определению аппроксимативной характеристики.

Положим

$$\mathcal{V}_{Q(N)}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{s} :\, \mathbf{s} - \mathbf{1} \in \kappa(N)} A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}),$$

$$V_{Q(N)}(f) := f * \mathcal{V}_{Q(N)}(\mathbf{x}).$$

$\mathcal{V}_{Q(N)}(\mathbf{x})$ является аналогом ядра Валле Пуссена, а $V_{Q(N)}(f)$ — аналогом суммы Валле Пуссена функции $f$ (с “номерами” гармоник из множества $Q(N)$).

Отметим, что множества, аналогичные $Q(N)$, рассматривались в работе [9].

Данная работа является продолжением исследований автора, которые проводились в [10,11], и при этом используются и развиваются подходы, применяемые в работах [4, 7, 8, 12].

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.1.** [8]. *Пусть функция* $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ *типа смешанного модуля непрерывности порядка* $\boldsymbol{l}$ *удовлетворяет условию* $(S)$. *Тогда для* $0 < p < \infty$

$$\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^p \ll \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^p. \tag{10}$$

Таким образом, учитывая включение $\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N)$ и соотношения (8)–(10), для $0 < p < \infty$ можем записать

$$\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^p \asymp \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^p \asymp N^{-p} \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 \asymp$$

$$\asymp N^{-p}(\log_2 N)^{d-1}. \tag{11}$$

Заметим, что (10) и (11) имеют место, если $\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)$ и $\mathbf{s} \in \Theta(N)$ заменить на $\mathbf{s} : \mathbf{s} - \mathbf{1} \in \kappa^{\perp}(N)$ и $\mathbf{s} : \mathbf{s} - \mathbf{1} \in \Theta(N)$ соответственно.

## 2. Основные результаты

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** . *Пусть* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, $l > [\frac{1}{p}]$, $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p}$, *тогда*

$$\sup_{f\in\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}} ||f - V_{Q(N)}(f)||_{\infty} \asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{12}$$

**Доказательство.** Сначала докажем в (12) оценку сверху. Пусть $1 \le \theta < \infty$, тогда, применяя неравенства Минковского, разных метрик Никольского, Гельдера (с соответствующей модификацией при $\theta = 1$) и учитывая (11) для $\Omega_1$ и (5), получаем

$$||f - V_{Q(N)}(f)||_{\infty} = ||\sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} A_{\mathbf{s}}(f)||_{\infty} \le \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_{\infty} \ll$$

$$\ll \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p\, 2^{\frac{||\mathbf{s}||_1}{p}} = \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-1}||A_{\mathbf{s}}(f)||_p\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{\frac{||\mathbf{s}||_1}{p}} \le$$

$$\le\Bigg(\sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} \Big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{\frac{||\mathbf{s}||_1}{p}}\Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} N^{-1}|\Theta(N)|^{1-1/\theta} \ll N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \qquad (13)$$

В случае $\theta=\infty$, аналогично (13), с учетом (5) имеем

$$||f - V_{Q(N)}(f)||_{\infty} \ll \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-1}||A_{\mathbf{s}}(f)||_p\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{||\mathbf{s}||_1/p} \le$$

$$\le \sup_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} \frac{||A_{\mathbf{s}}(f)||_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})} \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}})\, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} N^{-1}|\Theta(N)| \ll N^{-1}(\log_2 N)^{d-1}. \qquad (14)$$

Из (13) и (14), следует оценка сверху в (12).

Перейдем к установлению в (12) соответствующей оценки снизу, которая будет достигаться на функции, построенной с использованием “пачек” $A_{\mathbf{s}}$.

Рассмотрим функцию

$$g(\mathbf{x}, N) = C_1|\Theta(N)|^{-1/\theta} \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{-||\mathbf{s}||_1(1-1/p)}A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}),$$

где $C_1 > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

Покажем, что $g \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ при некотором значении $C_1 > 0$. Действительно, учитывая (4), неравенство для свертки и соотношение (9), для $1 \le \theta < \infty$ получаем

$$||g(\cdot, N)||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp C_1|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1} (\Omega(2^{-s'}))^{-\theta}\times$$

$$\times\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'} * \Bigg(\sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_p^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_1|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}':||s'-s||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}'}))^{-\theta}\times$$

$$\times\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'}*\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)\\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}}\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_p^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\le$$

$$\le C_1|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}}(\Omega(2^{-\mathbf{s}'}))^{-\theta}\times$$

$$\times\Bigg(\|A_{\mathbf{s}'}\|_1\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)\\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}}\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\mathbf{s}}\|_p\Bigg)^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\asymp$$

$$\asymp|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}}\Bigg(\|A_{\mathbf{s}'}\|_1\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)\\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}}2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\mathbf{s}}\|_p\Bigg)^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\asymp$$

$$\asymp|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)\\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}}1\Bigg)^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\le$$

$$\le|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}}3^{d\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{j=-d}^{d}\sum_{\mathbf{s}'-\mathbf{1}\in\Theta(2^{lj}N)}1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\asymp|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{j=-d}^{d}|\Theta(2^{lj}N)|\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\asymp 1. \tag{15}$$

В случае $\theta=\infty$, учитывая (5) аналогично, как и в (15), имеем

$$||g(\cdot,N)||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}}\asymp\sup_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}\frac{\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'}*\Bigg(\sum\limits_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}\Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}'})}\ll$$

$$\ll\sup_{\substack{\mathbf{s}':||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}}\Bigg(\|A_{\mathbf{s}'}\|_1\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)\\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}}2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\mathbf{s}}\|_p\Bigg)\ll$$

$$\ll \sup_{\substack{\mathbf{s}': ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty \le 1 \\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}} \left( \|A_{\mathbf{s}'}\|_1 \sum_{\substack{\mathbf{s}:\, \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N) \\ ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty \le 1}} 1 \right) \ll \sup_{\substack{\mathbf{s}': ||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty \le 1 \\ \mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(N)}} \|A_{\mathbf{s}'}\|_1 \ll 1. \tag{16}$$

На основании (15) и (16) делаем вывод, что $g(\mathbf{x}, N) \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, при некотором значении $C_1 > 0$.

Покажем, что функция $g(\mathbf{x}, 2^{ld}N) \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, реализует нижнюю оценку в (12). Действительно, учитывая, что $V_{Q(N)}(g(\mathbf{x}, 2^{ld}N)) = 0$, имеем

$$||g(\cdot, 2^{ld}N) - V_{Q(N)}(g(\cdot, 2^{ld}N))||_\infty = ||g(\cdot, 2^{ld}N)||_\infty \asymp$$

$$\asymp |\Theta(2^{ld}N)|^{-1/\theta} \left\| \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})} A_{\mathbf{s}} \right\|_\infty \ge$$

$$\ge |\Theta(2^{ld}N)|^{-1/\theta} \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})} A_{\mathbf{s}}(0) \asymp$$

$$\asymp |\Theta(2^{ld}N)|^{-1/\theta} \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \asymp$$

$$\asymp (2^{ld}N)^{-1} |\Theta(2^{ld}N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\mathbf{s}-\mathbf{1}\in\Theta(2^{ld}N)} 1 \asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}.$$

Оценка снизу в (12) установлена.

Теорема доказана.

□

[1] *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1952. — **2**. — С. 489–523.

[2] *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.

[3] *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

[4] *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — Nova Science: New York, 1993. — 419 p.

[5] *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**, № 1. — P. 35–48.

[6] *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.

[7] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

[8] *Пустовойтов Н.Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 1999. — **65**, № 1. — С. 107–117.

[9] *Романюк А.С.* О приближении классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 5. — С. 662–672.

[10] *Стасюк С.А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. — 2010. — **87**, № 1. — С. 108–121.

[11] *Стасюк С.А.* Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — **20**, № 1. — С. 247–257.

[12] *Романюк А.С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Пр. Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. — **92**. — 353 с.