

Оптимизация перелетов космических аппаратов с электроракетными двигателями

Я.В. Ткаченко

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев;
yaroslavvt@ukr.net*

Optimization of interplanetary flight at the given time is conducted. The optimization purpose is the maximum of mass of spacecraft payload. Two types of propulsion system are considered: a propulsion system of large thrust based on chemical thermal engine and the combined propulsion system consisting of the chemical thermal engine of large thrust and an electric propulsion. The provided estimation of payload mass for overfly the Earth – Mars confirmed advantage of a combined propulsion system.

Проведено оптимізацію міжпланетного перельоту за заданий час. Метою оптимізації є максимум корисного навантаження космічного апарата. Розглянуто два типи двигунних систем: система великої тяги на базі хімічного теплового двигуна та комбінована система, що складається з хімічного теплового двигуна та електрореактивного двигуна. Проведена оцінка маси корисного навантаження для перельоту Земля–Марс підтвердила перевагу комбінованої двигунної системи.

1. Введение

Исследование межпланетных перелетов является важной частью механики космического полета уже почти столетие. Современное состояние и тенденции развития космической техники позволяют в недалекой перспективе предположить интенсификацию полетов к ближайшим планетам и астероидам [1]. Также с высокой долей вероятности можно утверждать, что на гелиоцентрических участках полета будут использованы электрореактивные двигатели (ЭРД) в качестве

маршевых. Следует отметить плазменный ЭРД VASIMR с достаточно высокой удельной мощностью порядка $1 - 1.5 \text{ кг/кВт}$ [2, 3]. Анализируя научные публикации последних лет, можно сделать вывод, что наиболее вероятной планетой ближайших исследований, вплоть до пилотируемых экспедиций и колонизации, будет Марс. Поэтому большое количество публикаций посвящено изучению перелетов на Марс [4–9]. Для обеспечения таких перелетов потребуются достаточно мощные ЭРД, например, потребляемая мощность ЭРД VASIMR измеряется сотнями киловатт. Источником энергии таких двигателей, по-видимому, будет ядерный реактор. Данные по удельной мощности для реакторов, которые можно будет построить в ближайшем будущем, довольно различны – от 2 до 10 кг/кВт . Поэтому можем утверждать, что задача построения оптимальных траекторий перелетов к ближайшим планетам совместно с параметрическим анализом технических характеристик космического аппарата (КА) является актуальной задачей настоящего времени. Ее решение дает возможность вырабатывать требования к перспективной космической технике и оценивать возможности (масса полезной нагрузки, время перелета и т.п.) существующей.

В работе [4] проведено исследование эффективности комбинирования большой и малой тяги, выполненное на примере задачи об оптимизации межпланетного перелета Земля–Марс КА с двухрежимной двигательной системой на основе ядерного ракетного двигателя (ЯРД) за 180 суток. Согласно полученным результатам на планетоцентрических участках полета, где двигатель работает в режиме большой тяги, требуемая мощность реактора на два порядка выше, чем на гелиоцентрическом участке, где двигатель работает в режиме малой тяги. Продолжительность гелиоцентрического участка несоизмеримо больше, чем продолжительность планетоцентрических участков полета, и на нем можно было бы использовать существенно более маломощный и, соответственно, значительно более легкий реактор. Но КА приходится оснащать реактором, который большую часть полета использует максимум лишь 1% максимальной мощности.

Здесь рассмотрена задача о перелете КА с максимальной полезной массой с круговой орбиты планеты старта на круговую орбиту планеты назначения за заданное время. Комбинированная двигательная система состоит из химического теплового двигателя большой тяги и ЭРД. Химический тепловой РД менее экономичен, чем ЯРД (примерно в два раза), но имеет значительно меньшую массу на единицу

развиваемой тяги.

Орбиты планет принимаем компланарными. На планетоцентрических участках полета (разгон у планеты старта и торможение у планеты цели) предлагается использовать традиционные химические ракетные блоки. Планетоцентрические участки с использованием метода модифицированных сфер влияния рассмотрены в импульсном приближении. Задача оптимизации гелиоцентрической траектории решена с помощью принципа максимума Понтрягина в первом приближении метода транспортирующей траектории [10]. Проанализирована эффективность использования ЭРД для ряда времен перелета и удельных мощностей реактора. Удельная мощность двигателя принята 1.5 кг/кВт, что соответствует двигателю VASIMR.

2. Постановка задачи

Пусть начальная масса космического аппарата состоит из масс топлива ракетных блоков большой тяги M_{1f}^b, M_{2f}^b , масс топливных баков ракетных блоков большой тяги M_{1b}^b, M_{2b}^b и массы полезной нагрузки M_π – для случая перелета без ЭРД. Для КА с ЭРД к указанным массам добавляются масса самого ЭРД M_γ , масса источника энергии M_ν , масса рабочего тела ЭРД M_f^L и масса бака рабочего тела ЭРД M_b^L . Массу непосредственно двигателя большой тяги отнесем к массе полезной нагрузки. Как и в работах [11, 12], полагаем, что

$$M_\nu = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \quad (1)$$

где N_0 – максимальное значение мощности, вырабатываемой источником, α и γ – удельные массы источника мощности и двигателя. Массы баков пропорциональны соответствующим массам топлива:

$$M_{1b}^b = k_b M_{1f}^b, \quad M_{2b}^b = k_b M_{2f}^b, \quad M_b^L = k_L M_f^L. \quad (2)$$

Цель миссии КА – совершить перелет с низкой монтажной круговой орбиты планеты старта на низкую круговую орбиту планеты цели за заданное время T и доставить максимальную массу полезной нагрузки.

Введем систему координат Ox_1x_2 следующим образом: центр O разместим в гравитационном центре планетной системы (центре Солнца), ось Ox_1 направим в начальное положение планеты старта,

а ось Ox_2 направлена так, чтобы система координат оставалась правой (см. рис. 1). На рис. 1 штриховой линией изображена кеплерова орбита, которая соединяет точку старта на орбите планеты старта O_1 с точкой O_2 на орбите планеты цели за заданное время T . Транспортирующая система координат $O_t x_{1t} x_{2t}$ движется по указанной кеплеровой орбите, а ее оси параллельны осям системы координат $Ox_1 x_2$. В начальный момент времени точки O_1 и O_t совпадают. На этом рисунке $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор аппарата в абсолютном базисе $Ox_1 x_2$; $\mathbf{r}_t(t)$ – радиус-вектор транспортирующей системы координат в абсолютном базисе $Ox_1 x_2$; $\rho(t)$ – радиус-вектор аппарата в транспортирующей системе координат; $\mathbf{V}_{1t}, \mathbf{V}_{2t}$ – скорости транспортирующей системы координат в точках старта и прибытия; $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ – скорости планет старта и прибытия; $\mathbf{V}_{1s}, \mathbf{V}_{2s}$ – скорости КА относительно планет на сферах влияния.

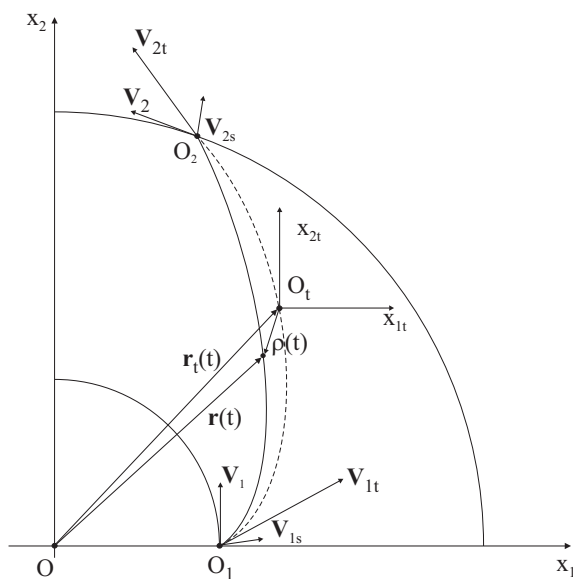


Рис 1. Общая схема перелета.

Рассмотрим планетоцентрический участок полета в окрестности планеты старта (рис. 2). Штриховой линией обозначена граница сферы влияния планеты.

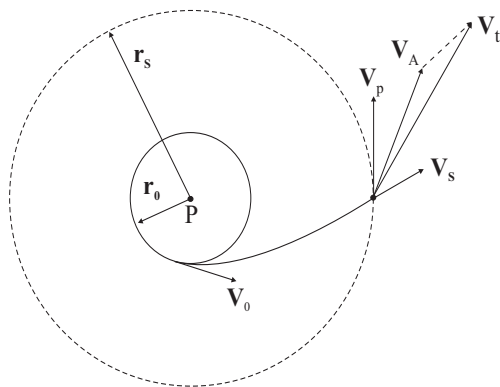


Рис 2. Планетоцентрический участок.

Здесь \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_s — радиусы монтажной орбиты и сферы влияния планеты с гравитационным центром в точке P ; \mathbf{V}_p , \mathbf{V}_s , \mathbf{V}_A , — скорость планеты в абсолютном базисе, скорость аппарата относительно планеты на выходе из сферы влияния и абсолютная скорость аппарата на выходе из сферы влияния; \mathbf{V}_0 — относительная скорость аппарата на монтажной орбите после действия реактивного импульса первого ракетного блока. Если

$$\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_A = \mathbf{V}_t, \quad (3)$$

то аппарат уже находится на нужной гелиоцентрической орбите и нет необходимости использовать электроракетный двигатель. Меняя точку приложения импульса большой тяги мы изменяем положение точки выхода на сфере влияния и направление скорости \mathbf{V}_s . Метод модифицированных сфер влияния позволяет пренебречь величиной \mathbf{r}_s , следовательно мы можем выбирать требуемое направление \mathbf{V}_s без дополнительных затрат топлива. Аналогичная ситуация и при торможении в окрестности планеты прибытия.

В данной работе все последующие соотношения записаны в безразмерной форме: линейный размер отнесен к радиусу орбиты планеты старта r^* , время t — к T^* периоду обращения по данной орбите, деленному на 2π , ускорения — к ускорению свободного падения на расстоянии r^* от притягивающего центра (Солнца), мощности двигателя и источника энергии электрореактивной двигательной системы

– к максимальной мощности источника N_0 , скорости – к величине r^*/T^* , а массы КА в целом и его составляющих – к начальной массе КА. Безразмерные массы обозначены маленькими буквами.

В случае двухимпульсного перелета, когда используются только ракетные двигатели большой тяги (имеет место формула (3)), масса полезной нагрузки аппарата m_π вычисляется с использованием формулы Циолковского. В силу выбора характерных величин начальная масса аппарата равна 1, тогда массу топлива для первого импульса у планеты старта вычисляют по формуле

$$m_{1f}^b = 1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s}^{2i} + \mathbf{V}_1)\|}{V}\right), \quad (4)$$

где V – скорость истечения реактивной струи. После отброса баков первого ракетного блока масса аппарата составляет

$$m_1^+ = 1 - (1 + k_b)m_{1f}^b = 1 - (1 + k_b)\left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s}^{2i} + \mathbf{V}_1)\|}{V}\right)\right), \quad (5)$$

Аналогично вычисляют массу топлива второго ракетного блока:

$$m_{2f}^b = 1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{V}_{2s}^{2i} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}\|}{V}\right), \quad (6)$$

Используя (4)–(6), находим значение массы полезной нагрузки аппарата:

$$m_\pi^{2i} = m_1^+ - (1 + k_b)m_1^+\left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{V}_{2s}^{2i} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}\|}{V}\right)\right). \quad (7)$$

В формулах (4)–(7) верхний индекс $2i$ означает, что данная скорость выхода из сферы слияния планеты соответствует двухимпульсному перелету с большой тягой.

В случае оснащения КА электрореактивной двигательной системой разгонный и тормозной импульсы можно уменьшить, и их оптимальное направление может отличаться от направления векторов $\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s}^{2i} + \mathbf{V}_1)$ и $\mathbf{V}_{2s}^{2i} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}$. Не теряя общности, можем положить

$$V_{1s} = k_1^s V_1^{2kosm}, \quad V_2^s = k_{2s} V_2^{2kosm}, \quad (8)$$

а векторы \mathbf{V}_{1s} и \mathbf{V}_{2s} считать повернутыми на углы α_1^s , α_2^s относительно векторов $\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s} + \mathbf{V}_1)$ и $\mathbf{V}_{2s} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}$ соответственно. Положительным направлением для α_1^s , α_2^s принимаем направление против часовой стрелки. В выражениях (8) k_1^s , k_2^s – неизвестные коэффициенты, которые, как и углы α_1^s , α_2^s , будут определены из условия максимума массы полезной нагрузки, а V_1^{2kosm} , V_2^{2kosm} – вторые космические скорости на заданных круговых орбитах у планет старта и прибытия.

Электрореактивную двигательную систему аппарата считаем идеально регулируемой с ограниченной мощностью. Тогда согласно [13] и введенным выше характерным величинам дифференциальное уравнение для массы КА примет вид

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\mu}{m_\gamma} \frac{m^2 \mathbf{a}^2}{2N}, \quad (9)$$

где $\mu = \gamma r^{*2} / T^{*3}$, \mathbf{a} – вектор реактивного ускорения, N – потребляемая мощность. В начальный момент времени масса КА равна 1. После первого импульса массу аппарата вычисляют аналогично (5):

$$m_1^+ = 1 - (1 + k_b) \left(1 - \exp \left(-\frac{\|\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s} + \mathbf{V}_1)\|}{V} \right) \right). \quad (10)$$

Теперь, следуя методу модифицированных сфер влияния, сформулируем математическую постановку задачи оптимального управления движением КА на гелиоцентрическом участке полета. Применяя нулевое приближение метода транспортирующей траектории, можем записать

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\frac{\mu}{m_\gamma} \frac{m^2 \mathbf{a}^2}{2N}, \quad m(0) = m_1^+, \quad m(T) - m_\gamma - m_\nu \rightarrow \max, \\ \dot{y}_1 &= y_3, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(T) = 0, \\ \dot{y}_2 &= y_4, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(T) = 0, \\ \dot{y}_3 &= a_1, \quad y_3(0) = \Phi_1, \quad y_3(T) = \Theta_1, \\ \dot{y}_4 &= a_2, \quad y_4(0) = \Phi_2, \quad y_4(T) = \Theta_2, \\ \mathbf{a}^2 &= a_1^2 + a_2^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $y_1 = x_{1t}$, $y_2 = x_{2t}$, а Φ_1 , Φ_2 и Θ_1 , Θ_2 – проекции векторов $\mathbf{V}_{1t} - (\mathbf{V}_{1s} + \mathbf{V}_1)$ и $\mathbf{V}_{2s} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}$ на оси транспортирующей системы

координат (см. Рис. 1). Перед тормозным импульсом в окрестности планеты прибытия отбрасываются баки рабочего тела ЭРД, источник энергии ЭРД и непосредственно сам ЭРД. Таким образом, масса КА на момент времени начала импульса составляет

$$m_2^- = m(T) - m_\gamma - m_\nu - m_b^L. \quad (12)$$

Аналогично (7) записываем формулу для массы полезной нагрузки:

$$m_\pi = m_1^+ - (1 + k_b)m_1^+ \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{V}_{2s} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}\|}{V}\right) \right). \quad (13)$$

Значения и направления скоростей \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_{2t} , \mathbf{V}_{1t} зависят от выбора транспортирующего эллипса, соединяющего точки O_1 и O_2 , за заданное время T . Как показано ниже, существует множество таких эллипсов. Согласно [14] и с учетом выбранных характерных величин, для эллиптической орбиты имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1 - \cos E_1), \\ r_2 &= a(1 - \cos E_2), \\ T &= a^{(3/2)}(E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)), \end{aligned} \quad (14)$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, r_1, r_2 и E_1, E_2 – радиус-векторы и эксцентрисические аномалии точек старта и прибытия. Имеем три уравнения с четырьмя неизвестными – a, e, E_1, E_2 , т.е. задавая одну из этих величин, получаем множество эллипсов. Из первых двух уравнений (14) найдем a и e как функции E_1 и E_2 :

$$e(E_1, E_2) = \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cos E_1 - r_1 \cos E_2}, \quad a(E_1, E_2) = \frac{r_1}{1 - e(E_1, E_2) \cos E_1}. \quad (15)$$

Подставив (15) в третье уравнение (14), получим следующее нелинейное уравнение относительно E_1 и E_2 :

$$T = a^{(3/2)}(E_1, E_2)(E_2 - E_1 - e(E_1, E_2)(\sin E_2 - \sin E_1)). \quad (16)$$

Задавая E_1 , из (15) и (16) находим a, e, E_2 , т.е., a, e, E_2 являются функциями E_1 . Выражения для проекций $\Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2$ из (11) здесь не приводим ввиду их громоздкости. Однако, отметим, что они являются функциями $k_1^s, k_2^s, \alpha_1^s, \alpha_2^s$.

3. Оптимальное управление на гелиоцентрическом участке полета

Задачу оптимального управления (11) решаем с помощью принципа максимума Поттнрягина [15]. Составим функцию

$$H = -\psi_m \frac{\mu}{m_\gamma} \frac{m^2(a_1^2 + a_2^2)}{2N} + \psi_1 y_3 + \psi_2 y_4 + \psi_3 a_1 + \psi_4 a_2.$$

Из условия максимума функции H по управлениям находим

$$N = 1, \quad a_1 = \frac{\psi_3}{\frac{\mu}{m_\gamma} \psi_m m^2}, \quad a_2 = \frac{\psi_4}{\frac{\mu}{m_\gamma} \psi_m m^2}. \quad (17)$$

Решив систему дифференциальных уравнений для присоединенных функций $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$, получим

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_{13}, \quad \psi_2 = A_{23}, \\ \psi_3 &= -A_{13}t + A_{12}, \\ \psi_4 &= -A_{23}t + A_{22}, \quad \psi_m m^2 = c_m, \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_{13}, A_{12}, A_{23}, A_{22}, c_m$ – постоянные во времени коэффициенты. Из (17) и (18) следует, что постоянную можно положить равной 1. Тогда проекции вектора реактивного ускорения принимают вид

$$a_1 = \frac{\psi_3}{\frac{\mu}{m_\gamma}}, \quad a_2 = \frac{\psi_4}{\frac{\mu}{m_\gamma}}. \quad (19)$$

Проинтегрировав уравнения движения из (11) с учетом (19), и удовлетворив начальным и конечным условиям, получим $A_{13}, A_{12}, A_{23}, A_{22}$ как функции $\Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2$. Зная A_{ij} из первого уравнения (11) и (12), (13), находим массу полезной нагрузки m_π в виде функции неизвестных $k_1^s, k_2^s, \alpha_1^s, \alpha_2^s, m_\gamma, E_1$, далее проводим максимизацию m_π по указанным неизвестным.

4. Масса полезной нагрузки КА для перелетов Земля–Марс

В табл. 1 представлены значения массы полезной нагрузки КА при перелете с круговой орбиты высотой 200 км. над Землей на орбиту такой же высоты над Марсом за разное время (время в таблице

указано в сутках) и для разных значений удельной массы источника энергии α , кг/кВт. Баковые коэффициенты для топлива разгонных блоков и рабочего тела ЭРД приняты $k_b = k_L = 0.15$, удельная масса двигателя $\gamma = 1.5$ кг/кВт.

Таблица 1. Масса полезной нагрузки при перелете с ЭРД

$\alpha \backslash T$	90	100	110	120	130	140	150
1	0.1027	0.1263	0.1464	0.1635	0.1779	0.1902	0.2006
2	0.0838	0.1081	0.1295	0.1480	0.1639	0.1776	0.1893
5	0.0534	0.0766	0.0988	0.1190	0.1370	0.1530	0.1669
10	0.0336	0.0536	0.0742	0.0944	0.1133	0.1306	0.1462
20	0.0172	0.0349	0.0542	0.0734	0.0920	0.1098	0.1264

Таблица 2. Масса полезной нагрузки при двухимпульсном перелете

T	90	100	110	120	130	140	150
m_{π}	0.0089	0.0207	0.0356	0.0525	0.0705	0.0888	0.1068

В табл. 2 приведены значения масс полезной нагрузки для случая двухимпульсного перелета за счет большой тяги традиционных химических тепловых ракетных двигателей. Как видно из таблиц, полученные результаты оказались вполне прогнозируемыми: при увеличении времени перелета масса полезной нагрузки возрастает, как и при улучшении характеристик источника мощности (энергии) для обеспечения работы ЭРД. Также из таблиц 1 и 2 следует, что наиболее эффективно применять ЭРД на гелиоцентрических участках полета для КА, которые будут осуществлять перелеты за относительно небольшое время. Так применение ЭРД при перелете за 90 суток позволяет на порядки увеличить массу полезной нагрузки.

5. Заключение

Полученные результаты в очередной раз подтвердили преимущества комбинированной двигательной системы перед традиционными хи-

мическими тепловыми ракетными двигателями. При проведении численного моделирования выяснилось, что требуемая масса рабочего тела разгонных блоков большой тяги существенно превышает требуемую массу рабочего тела ЭРД. Основные потери массы КА происходят на участках разгона и торможения. Поэтому, чтобы существенно увеличить массу полезной нагрузки КА, следует обратить внимание на изучение планетоцентрических участков полета.

- [1] *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. — 2008. — **40**, №3. — С. 224–237.
- [2] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Электромагнитный ракетный ускоритель](https://ru.wikipedia.org/wiki/Электромагнитный_ракетный_ускоритель).
- [3] <http://martiantime.narod.ru/Papers/01119.htm>.
- [4] *Кифоренко Б.Н., Харитонов А.М.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двухрежимными двигателями // Прикл. механика. — 2010. — **46**, №10. — С. 78–89.
- [5] *Borowski S.K., Corban R.R., McGuire M.I., Beke E.G.* Nuclear thermal rocket/vehicle design options for future NASA missions to the Moon and Mars // AIAA Paper. — 1993. — N4170. — 36 p.
- [6] *Borowski S.K., Dudzinski L.A., McGuire M.L.* Vehicle and mission design options for the human exploration of Mars/Phobos using “Bimodal” NTR and LANTR propulsion // NASA/TM. — 1998. — 208834, Lewis Research Center. — 1998. — 47 p.
- [7] *Miele A., Wang T., Williams P.N.* Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion. Part 1: Baseline solutions for deep interplanetary space // Acta astron. — 2004. — **55**. — P. 95–107.
- [8] *Miele A., Wang T., Williams P.N.* Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion. Part 2: Minimum time solutions with bounded thrust direction // Ibid. — 2005. — **57**. — P. 819–828.
- [9] *Miele A., Wang T., Williams P.N.* Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion. Part 3: Compromise solutions // Ibid. — 2005. — **57**. — P. 829–840.
- [10] *Белецкий В.В., Егоров В.А.* Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космические исследования. — 1964. — **2**, № 3. — С. 303–330.

- [11] *Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В.* Оптимизация перелетов космического аппарата с электрореактивной двигательной системой постоянной мощности и накопителем энергии между удаленными эллиптическими орбитами // Прикл. механика. — 2010. — **46**, № 11. — С. 117–125.
- [12] *Ткаченко Я.В.* Оптимизация работы электрических ракетных двигателей с постоянной и регулируемой тягами // Там же. — 2010. — **46**, № 3. — С. 114–123.
- [13] *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета с малой тягой. — М.: Наука, 1966. — 679 с.
- [14] *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. — М.: Наука, 1990. — 448 с.
- [15] *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1981. — 336 с.