

Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках

А.Ю. Швец, В.А. Сиренко

*НТУУ "Киевский политехнический институт", Киев;
alex.shvets@bigmir.net, sir_vasiliy@ukr.net*

The non-ideal two-mode mathematical model for oscillations of the free surface of a liquid in a cylindrical tank is considered. Revealed atypical features of the transition to deterministic chaos in this model. Discovered and carefully analyzed the relationship between the different scenarios of occurrence of various types of chaotic attractors in such systems.

Розглянуто неідеальну двомодову математичну модель коливань вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі. Відкрито нетипові особливості переходу до детермінованого хаосу в цій моделі. Виявлено і ретельно проаналізовано взаємозв'язок між різними сценаріями виникнення різноманітних хаотичних атракторів у таких системах.

Введение

Многие современные машины, механизмы, наземные и морские транспортные средства, авиационные и космические летательные аппараты в качестве основного конструктивного элемента содержат различные баки с жидкостями [1–3]. Во многих случаях хорошее описание динамики колебаний свободной поверхности жидкости в таких баках можно получить с помощью, сравнительно простых двумодовых математических моделей [1, 4]. Проблемы глобального энергосбережения выдвигают на первый план задачи максимальной минимизации тех или иных источников возбуждения колебаний динамических систем, в частности возбуждения колебаний баков с жидкостями. Это приводит к тому, что динамическую систему "бак с жидкостью–источник возбуждения" необходимо рассматривать как неидеальную

по Зоммерфельду–Кононенко [5]. В таких системах предполагается, что мощность, потребляемая колебательной нагрузкой (баком с жидкостью), сравнима с мощностью источника возбуждения колебаний. Поэтому необходимо учитывать влияние колебательной нагрузки на функционирование источника возбуждения колебаний. Такой подход приводит к появлению дополнительного уравнения в системе уравнений движения, вследствие чего кардинально (количественно и качественно) может измениться динамическое поведение исследуемой колебательной системы [4].

Заметим, что подавляющее большинство реальных колебательных систем являются неидеальными. В этих случаях пренебрежение взаимосвязью колебательной системы и источника возбуждения колебаний может привести к грубым ошибкам в описании динамики системы. В частности, может быть полностью утрачена информация об установившихся детерминированных хаотических режимах колебаний [4].

1. Математическая модель системы

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из бака, частично заполненного жидкостью, колебания которого в горизонтальной плоскости возбуждаются электродвигателем ограниченной мощности. В работах [4, 6] проведено детальное построение математической модели такой системы. Показано, что так называемую "маломерную" математическую модель системы "бак с жидкостью – электродвигатель" можно описать такой системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2, \\
 \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1, \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1, \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1, \\
 \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где p_1, q_1 и p_2, q_2 — коэффициенты разложения амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости соответственно по первой и второй основной доминантной модам, β — величина пропорциональная скорости вращения вала электродвигателя, μ_1 — коэффициент пропорциональности вибрационного момента, α — коэффициент сил вязкого демпфирования, N_1, N_3 — параметры статической характеристики электродвигателя, величины A, B — константы, зависящие от радиуса бака и высоты налитой в него жидкости [4].

Приведенная математическая модель (1) учитывает неидеальность возбуждения, т.е. обратное влияние колебательной системы (в данном случае бака с жидкостью) на источник возбуждения колебаний — электродвигатель ограниченной мощности.

В работах [4, 6–8] был описан сценарий обобщенной перемежаемости при переходах к детерминированному хаосу в системе (1). При этом, удалось обнаружить и описать сценарий обобщенной перемежаемости, как при переходах "регулярный режим — хаотический аттрактор" так и при переходах "хаотический аттрактор одного типа — хаотический аттрактор иного типа". В работах [9, 10] был выявлен сценарий обобщенной перемежаемости при переходах между гиперхаотическими аттракторами. Кроме того, в работах [4, 6–10] было установлено, что переход к детерминированному хаосу в системе (1) может осуществляться по всем "классическим" сценариям нелинейной динамики, а именно по сценариям Фейгенбаума, Пома–Манневилля, а также сценариям, связанным с разрушением инвариантных торов.

Целью данной работы является изучение взаимосвязи различных сценариев и выявление новых модификаций ранее описанных сценариев перехода к детерминированному хаосу.

2. Исследование различных сценариев перехода к хаосу

Система (1) является нелинейной системой дифференциальных уравнений пятого порядка. В пространстве параметров $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$ по этой системе уравнений был проведен большой цикл численных расчетов для определения характеристик установившихся динамических режимов и описания сценариев перехода между различными типами установившихся режимов. Методика проведения таких численных расчетов детально описана в работах [4, 6].

Пусть параметры системы (1) принимают следующие значения: $A = 1.12, B = -1.531, \mu_1 = 0.5, N_1 = -1, \alpha = -0.3$. В качестве бифуркационного выберем параметр N_3 . При изменении параметра N_3 в пределах $-0.6526 < N_3 < -0.6302$ в системе существуют два однократных устойчивых предельных цикла. Проекция фазовых портретов таких предельных циклов, построенные при $N_3 = -0.645$ представлены на рис. 1а,б. Их проекции являются симметричными относительно оси абсцисс $p_2 = 0$. Сигнатуры спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) таких циклов имеют вид $\langle 0, -, -, -, - \rangle$, что характерно для периодических режимов. При увеличении значения параметра N_3 происходит одновременное удвоение периодов существующих предельных циклов. Проекция фазовых портретов возникших циклов удвоенных периодов при $N_3 = -0.6368$ изображены на рис. 1в,г. Их проекции также являются симметричными относительно оси абсцисс $p_2 = 0$.

При дальнейшем увеличении значения N_3 происходит бесконечный каскад удвоения периодов существующих предельных циклов. Этот каскад заканчивается возникновением хаотического аттрактора при $N_3 = -0.6295$ (рис. 1д). Проекция такого аттрактора состоит из двух симметричных, относительно горизонтальной оси, частей и занимает области фазового пространства, в которых существовали предельные циклы. Сигнатура спектра ЛХП хаотического аттрактора имеет вид $\langle +, 0, -, -, - \rangle$. При этом, в отличие от регулярных аттракторов, хаотическому аттрактору присущи несколько важных отличительных особенностей: старший ляпуновский показатель является положительным, траектории аттрактора неустойчивы по Ляпунову, а моменты времени возврата траектории в некоторую заданную окрестность аттрактора представляют собой некоторую хаотическую последовательность.

Движение изображающей точки траектории по хаотическому аттрактору можно условно разбить на две фазы. В первой фазе траектория совершает хаотические блуждания вдоль витков верхней или нижней части аттрактора. В непредсказуемый момент времени траектория переходит в противоположную симметричную часть аттрактора и начинает совершать там хаотические блуждания. Такой процесс повторяется бесконечное число раз. Таким образом, в данном случае переход к хаосу имеет особенности, характерные как для сценария Фейгенбаума (бесконечный каскад бифуркаций удвоения предельных циклов), так и для перемежаемости (непредсказуемая пере-

межаемость между верхней и нижней частями возникающего хаотического аттрактора).

В работах [9, 10] показано, что при изменении параметра N_3 в интервале $-1.2105 < N_3 < -1.1829$ аттракторами системы (1) будут предельные циклы, а в левой полуокрестности граничной точки $N_3 = -1.2105$ и правой полуокрестности граничной точки $N_3 = -1.1829$ — хаотические аттракторы. Как известно, такие интервалы в пространстве параметров называются окнами периодичности [4, 11] в хаосе. Рассмотрим возможные сценарии перехода к хаосу при выходе параметра N_3 из окна периодичности, как через левую, так и через правую его границы. Численные расчеты показывают, что в окне периодичности в системе существуют два симметричных относительно оси абсцисс $p_2 = 0$, предельных цикла. Проекция фазовых портретов одной пары типичных предельных циклов, при $N_3 = -1.183$, изображены на рис. 2а,б. Эти циклы имеют более сложную структуру, чем приведенные на рис. 1а,б. При выходе значения N_3 как за левую, так и за правую границы указанного окна периодичности исчезают оба предельных цикла и возникают хаотические аттракторы сложной структуры (рис. 2в). Проекция каждого из возникших хаотических аттракторов является симметричной относительно оси абсцисс. Распределение инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора (рис. 2г) проясняет механизм его возникновения. Четко прорисованные области на рис. 2г по своей форме напоминают "склеенку" симметричных предельных циклов. Возникновение хаоса в этом случае имеет характерные особенности для перемежаемости.

Движение типичной траектории по аттрактору включает три фазы, две ламинарные и турбулентную. В каждой ламинарной фазе траектория совершает квазипериодические движения в малой окрестности "верхнего" или "нижнего" исчезнувшего предельного цикла. В непредсказуемый момент времени происходит турбулентный всплеск и траектория уходит в отдаленные от окрестности исчезнувшего цикла области фазового пространства. Турбулентной фазе движения на рис. 2г соответствуют более бледные участки распределения инвариантной меры. Процесс движения траектории по аттрактору вида "одна из ламинарных фаз—турбулентная фаза—одна из ламинарных фаз" повторяется бесконечно долго. Моменты "срыва" траектории в турбулентную фазу и "переключения" между двумя ламинарными фазами являются непредсказуемыми и представляют собой хаотическую последовательность моментов времени. В данном случае пе-

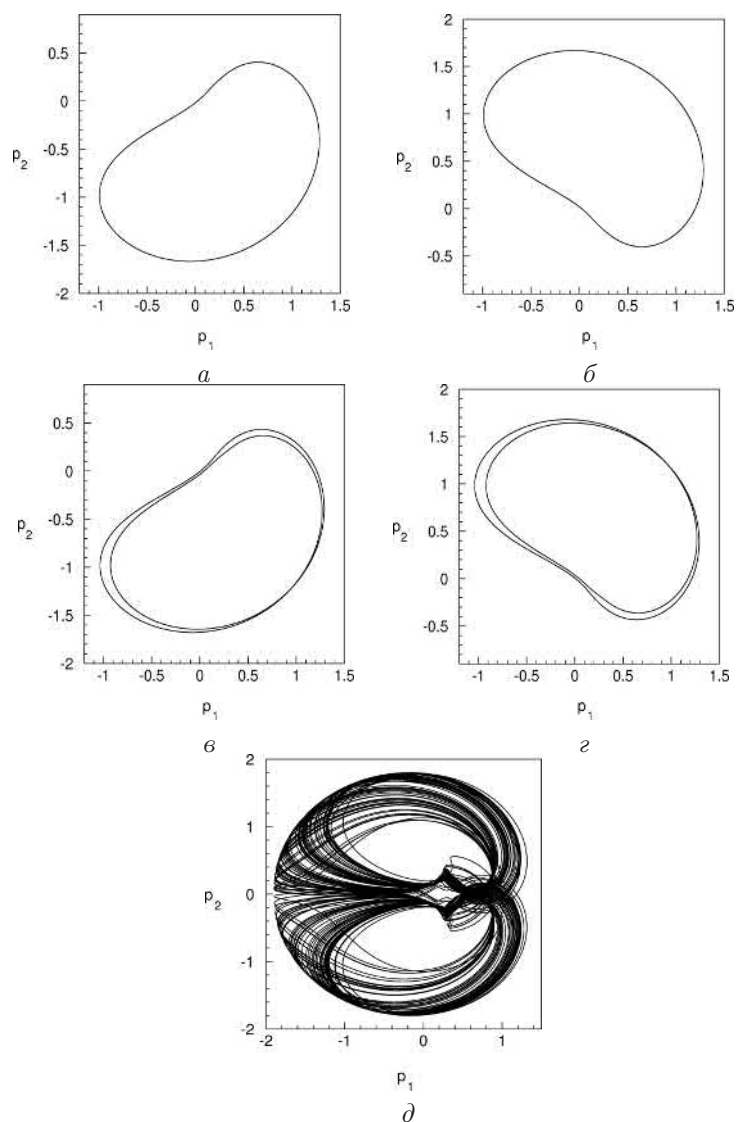


Рис. 1. Проекция фазовых портретов предельных циклов при $N_3 = -0.645$ (а,б), $N_3 = -0.6368$ (в,г), хаотического аттрактора при $N_3 = -0.6295$ (д).

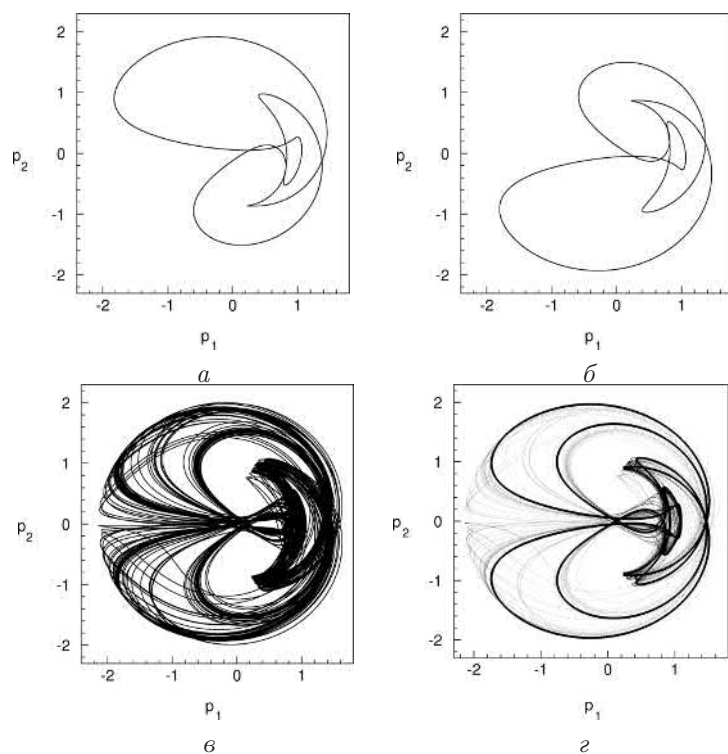


Рис. 2. Проекция фазовых портретов предельных циклов при $N_3 = -1.183$ (а,б), проекция фазового портрета (в) и распределение инвариантной меры (г) хаотического аттрактора при $N_3 = -1.182$.

реход к хаосу напоминает классический сценарий перемежаемости Пома–Манневилля. Однако в рассмотренном переходе к детерминированному хаосу наблюдается наличие не одной, а двух ламинарных фаз.

Рассмотрим сценарии перехода к хаосу, которые имеют место при выходе параметра N_3 за границы еще одного выявленного в $[9, 10]$ окна периодичности в хаосе, $-0.3916 < N_3 < -0.3873$. Рассмотрим выход из окна периодичности через его правую границу, т.е. при увеличении параметра N_3 . Проведенный комплекс компьютерных расчетов позволил установить, что при $-0.3916 < N_3 < -0.3893$ в системе существуют симметричные, относительно оси $p_2 = 0$, устойчивые

предельные циклы (рис. 3а,б). Увеличение значения $N_3 = -0.3892$ приводит к одновременной бифуркации удвоения периодов существующих циклов (рис. 3в,г). Дальнейшее увеличение значения параметра порождает бесконечный каскад удвоения периодов симметричных циклов, который заканчивается возникновением симметричных, относительно оси $p_2 = 0$, хаотических аттракторов при $N_3 = -0.3855$ (рис. 4а,б). Образование каждого из симметричных хаотических аттракторов происходит по сценарию Фейгенбаума. Следует отметить, что полученные хаотические аттракторы (рис. 4а,б) существуют отдельно и характеризуются различными бассейнами притяжения. При этом, в данном случае не происходит явление "склейки" аттракторов, которое наблюдалось при возникновении хаотических аттракторов, представленных на рис. 1д и рис. 2в.

Рассмотрим особенности сценария перехода к хаосу при уменьшении параметра N_3 , то есть при выходе через левую границу окна периодичности $-0.3916 < N_3 < -0.3873$. Как отмечалось, при значениях $-0.3916 < N_3 < -0.3893$ в системе существуют устойчивые симметричные, относительно оси $p_2 = 0$, предельные циклы (рис. 3а,б). При $N_3 = -0.39161$ возникают два симметричных, относительно оси $p_2 = 0$, хаотических аттракторы. Переход от регулярного режима к хаотическому для обоих симметричных хаотических аттракторов происходит по классическому сценарию перемежаемости Пома-Манневилля. Это хорошо иллюстрирует распределения инвариантной меры по проекциям фазовых портретов возникших хаотических аттракторов (рис. 4в,г).

Густо затемненные области расположенные в окрестности исчезающих симметричных предельных циклов, соответствуют ламинарной фазе перемежаемости. В этой фазе траектории хаотических аттракторов совершают квазипериодические движения в малой окрестности исчезающих предельных циклов. Более светлые участки распределений (рис. 4в,г) соответствуют турбулентной фазе перемежаемости. Симметричные хаотические аттракторы существуют на сравнительно небольшом интервале изменения параметра N_3 .

При уменьшении значения $N_3 = -0.397$ в системе возникает бифуркация "хаос-хаос". Вследствии такой бифуркации возникает хаотический аттрактор нового типа с более сложной структурой, который представляет собой "склею" исчезающих после прохождения точки бифуркации симметричных хаотических аттракторов (рис. 5а). Его структура подобна рассмотренным выше хаотическим аттракто-

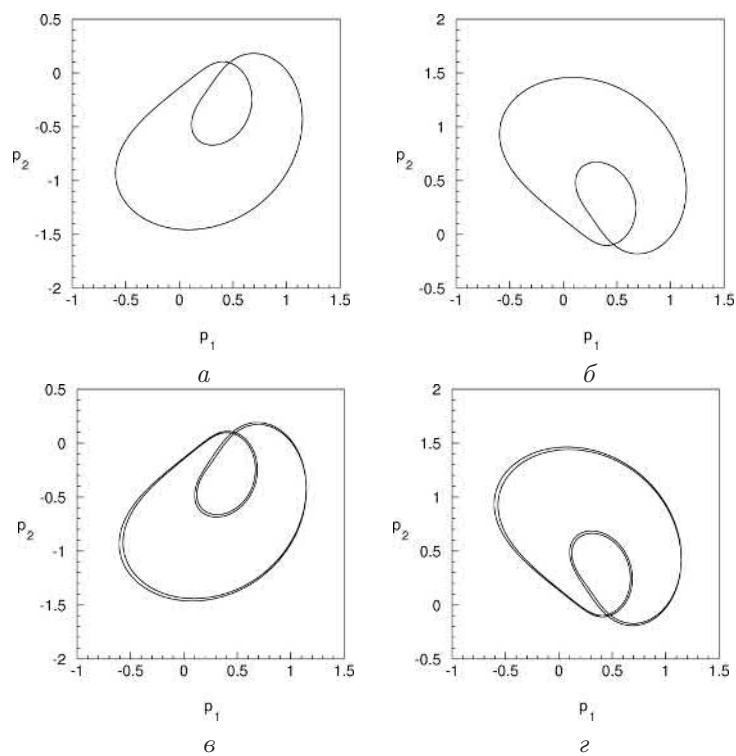


Рис. 3. Проекция фазовых портретов предельных циклов при $N_3 = -0.39$ (а,б), $N_3 = -0.3892$ (в,г).

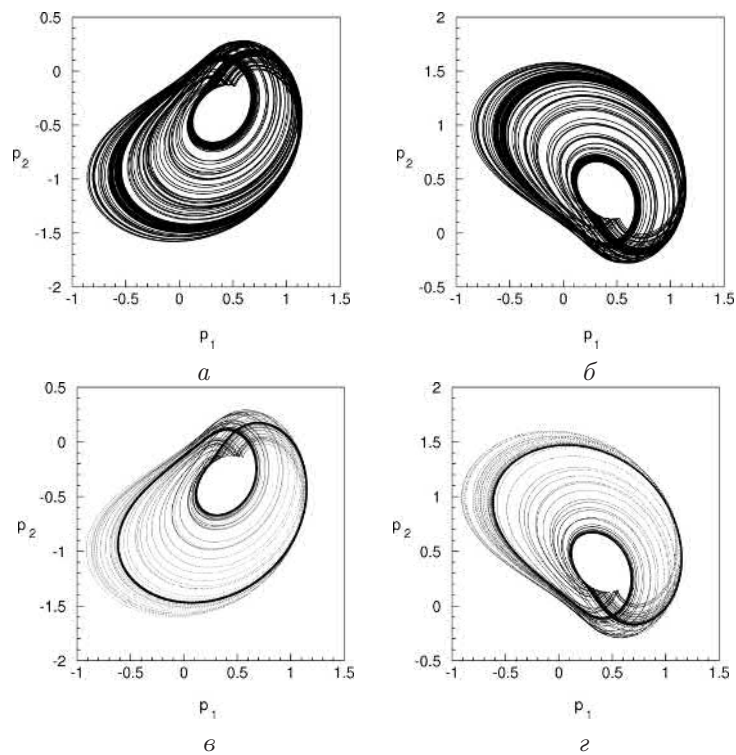


Рис. 4. Проекция фазовых портретов хаотических аттракторов при $N_3 = -0.3855$ (а,б); распределения их инвариантной меры при $N_3 = -0.39161$ (в,г).

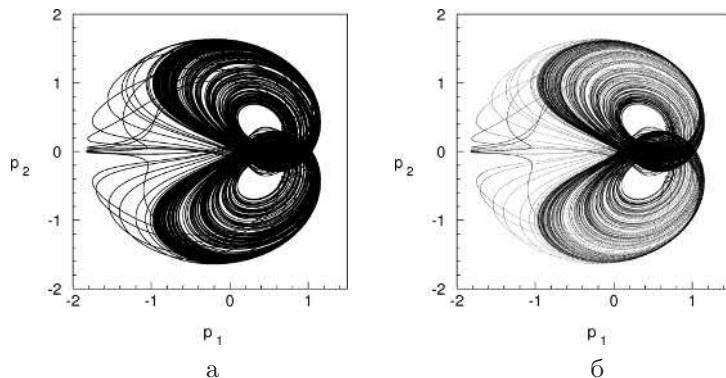


Рис. 5. Проекция фазового портрета (а) и распределение инвариантной меры (б) хаотического аттракторов при $N_3 = -0.397$.

рам (рис. 1д, рис. 2в). Переход к хаосу в этом случае происходит совершенно по иному сценарию, который значительно отличается от предыдущих. Распределение инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора нового типа (рис. 5б) проясняет механизм возникновения такого хаотического аттрактора. Две его более темные симметричные области являются по геометрической форме подобными хаотическим аттракторам на рис. 4в,г. Переход к хаосу здесь происходит по сценарию обобщенной перемежаемости [4].

Движение типичной траектории аттрактора состоит из трех фаз. Две из них называются грубо-ламинарными. В этих фазах происходят хаотические движения траектории в одной из затемненных областей рис. 5б. То есть в области исчезнувших хаотических аттракторов предыдущего типа. В третьей фазе — турбулентной, траектории аттрактора уходят в отдаленные области фазового пространства. На рис. 5б, таким выходам траекторий соответствуют более бледные участки. Отметим, что "переключение" траекторий между грубо-ламинарными фазами и их выходы в отдаленные области являются непредсказуемыми и повторяются бесконечно долго. Следует выделить тот факт, что в отличие от описанного в [8] сценария обобщенной перемежаемости здесь присутствуют две грубо-ламинарные фазы движения.

3. Заключение

В рассмотренной неидеальной динамической системе "бак с жидкостью – электродвигатель" обнаружен и описан сценарий перехода к детерминированному хаосу типа Пома–Манневилля не с одной, а с двумя ламинарными фазами, а также сценарий перехода к хаосу типа обобщенной перемежаемости с двумя грубо–ламинарными и одной турбулентной фазой.

Показано, что существует тесная взаимосвязь между, казалось бы, различными сценариями перехода к хаосу. В частности, обнаружен и описан сценарий, который начинается как каскад Фейгенбаума, а заканчивается как обобщенная перемежаемость.

Однако остаются открытыми вопросы о бассейнах притяжения рассмотренных в работе симметричных регулярных и хаотических аттракторов. Эти вопросы планируется исследовать при дальнейшем изучении системы "бак с жидкостью – электродвигатель".

- [1] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка, 2010. — 407 с.
- [2] *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1983. — 296 с.
- [3] *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. — Cambridge University Press, — 2005. — 970 p.
- [4] *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва-Ижевск: R&CD, 2008. — 280 с.
- [5] *Kononenko V.O.* Vibrating system with a limited power-supply. — London, Piffe, 1969. — 236 p.
- [6] *Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // J. Sound and Vibr. — 2009. — **322**, N 3. — С. 532–553.
- [7] *Швец А.Ю.* Сценарии переходов "порядок–хаос" при резонансных колебаниях жидкости в цилиндрических баках // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 216–249.
- [8] *Швець О.Ю.* Узагальнення сценарію переміжності при переході до детермінованого хаосу // Доп. НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. — 2010. — № 5. — С. 31–35.

-
- [9] *Швец А.Ю., Сиренко В.А.* Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе "бак с жидкостью – электродвигатель" // *Динамические системы.* — 2011. — Т.1, № 1. — С. 113–131.
- [10] *Швец А.Ю., Сиренко В.А.* Сценарии перехода к детерминированному хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках // *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* — 2011. — Т. 8, № 2. — С. 292–305.
- [11] *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2006. — 356 с.