Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 413–424

УДК 517.5

Найкращі наближення аналогів ядер Бернуллі та класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій

В.В. Шкапа

Інститут математики НАН України, Київ; vshkapa@ukr.net

We obtain the exact order estimates of the best approximations of periodic functions that are analogues of the Bernoulli kernels in the space L_q, $1 < q < \infty$. We also establish the order of the best m-term trigonometric approximations of functions of the classes $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ in the space L_∞.

Получены точные по порядку оценки наилучших приближений периодических функций, которые являются аналогами ядер Бернулли в пространстве L_q, $1 < q < \infty$. Установлены также порядки наилучших m-членных тригонометрических приближений функций из классов $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ в пространстве L_∞.

1. Вступ

Встановлено порядкові оцінки найкращих наближень 2π-періодичних функцій $F_\psi(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$. Отримано точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці. Детальніше ці величини розглядатимуться нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення, які будуть нами використовуватися.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку

$[-\pi,\pi]$ функцій f. Норма у цьому просторі визначається так:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|\,, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Розглянемо ряд Фур'є функції $f \in L_1$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Нехай далі $\psi \ne 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її згідно з [1, с. 25] (див. також [2, с. 132]) називатимемо (ψ,β)-похідною функції f і позначатимемо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \text{ і } f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \big\{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \le 1\big\}, 1 \le p \le \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ збігаються з класами Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,p}$ (див., наприклад, [1, с.25]).

Нехай, для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta \in \mathbb{R}$, ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi, \pi]$ функції $F_\psi(x, \beta)$. Тоді кожну функцію $f \in L^\psi_{\beta,p}$ можна зобразити у вигляді згортки:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) F_\psi(t, \beta) dt,$$

де $\|\varphi\|_p \le 1,\ 1 \le p \le \infty$ (див., наприклад, [2, с. 135]).

Зазначимо, що функції $F_\psi(x, \beta)$ природньо називати аналогами ядер Бернуллі, оскільки при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0$, функція $F_\psi(x, \beta)$ є відомим ядром Бернуллі.

Позначимо через B множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ ($B \ge C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, ...$, які є у праці, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення.

2. Найкращі наближення функцій $\mathbf{F}_\psi(\mathbf{x}, \beta)$

Означимо апроксимативну характеристику, яку будемо тут досліджувати.

Нехай T_m — множина тригонометричних поліномів t, які мають вигляд

$$t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$, покладемо, що

$$E_m(f)_q = \inf_{t \in T_m} \left\| f(\cdot) - t(\cdot) \right\|_q. \tag{1}$$

Величину (1) називають найкращим наближенням функції f множиною поліномів T_m у просторі L_q. З дослідженнями величин $E_m(f)_q$ для деяких важливих функцій можна ознайомитися в працях [3, 4].

Наведемо, далі, допоміжні твердження, які будемо використовувати.

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{k: \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s\right\}$$

і покладемо, що

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема 2.1. *(Літтлвуда-Пелі)* (див., наприклад, [5, Т.2, гл. 15]). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_3(q)$, $C_4(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_3(q) \|f\|_q \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \le C_4(q) \|f\|_q.$$

Теорема 2.2. *(Марцинкевича)* [5, Т.2, с. 346]. *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, *що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \le M, \ n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum\limits_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu}-1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \le M, \ \nu \in \mathbb{N}$.

Тоді, якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q, \ 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q$$

і існує стала $C_5(q)$ *така, що*

$$\|F\|_q \le C_5(q) M \|f\|_q.$$

Доведемо наступне твердження.

Теорема 2.3. . *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$E_m(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху. Нехай l і m такі, що $2^l < m \leq 2^{l+1}$. Спочатку розглянемо випадок $1 < q \leq 2$. Застосувавши теорему 2.1, одержимо

$$E_m(F_\psi)_q \ll \left\| F_\psi - \sum_{s<l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q = \left\| \sum_{s \geq l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = I_1.$$

Далі, скориставшись нерівністю $|a+b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1$, можемо записати

$$I_1^q \ll \int_{\pi}^{\pi} \sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^q dx \ll \sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q,$$

тобто

$$I_1 \ll \left(\sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Для продовження (2) виконаємо оцінку:

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

Спочатку покажемо, що виконується співвідношення

$$\left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q \ll \psi(2^s) \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q, \ 1 < q < \infty.$$

З цією метою для $s \geq l$ розглянемо послідовність $\{\lambda_k\}$, яка задається так:

$$\{\lambda_k\} = \left\{ \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k}, \ 2^{s-1} \leq |k| < 2^s \right\}.$$

Переконаємося, що послідовність $\{\lambda_k\}$ задовольняє умови теореми 2.2. Очевидно, що для цього достатньо перевірити виконання умов 1, 2 цієї теореми для додатних k таких, що $2^{s-1} \le k < 2^s$.

Оскільки $\psi \in B$ і $2^{s-1} \le k < 2^s$, то

$$1)\ |\lambda_k| = \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| = \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} \le \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \le M,$$

$$2)\ \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \big(\psi(k) - \psi(k+1)\big) = \frac{1}{\psi(2^s)} \big(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\big) \le$$

$$\le \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \le M.$$

Подіявши мультиплікатором Λ_s, який задається послідовністю $\{\lambda_k\}$, на поліном $\sum\limits_{k\in\rho(s)} e^{ikx}$, одержимо

$$\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} = \sum_{k\in\rho(s)} \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx}.$$

Таким чином, можемо записати

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

Проте, за теоремою 2.2 має місце оцінка

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \right\|_q \le C_6(q) M \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \right\|_q.$$

Отже, в підсумку отримаємо

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q = \Big\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \Big\|_q \ll \psi(2^s) \Big\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \Big\|_q .$$

Далі, використовуючи останню оцінку, а також відоме співвідношення (див., наприклад, [4, с.25]):

$$\Big\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \Big\|_q \asymp 2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1<q<\infty, \tag{3}$$

одержуємо

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q \ll \psi(2^s) 2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)}. \tag{4}$$

Об'єднавши співвідношення (2) та (4), маємо

$$I_1 = \Big\| \sum_{s\geq l} \delta_s(F_\psi) \Big\|_q \ll \left(\sum_{s\geq l} \psi^q(2^s) 2^{qs\left(1-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Врахувавши, що $\psi(t) t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає, можемо записати

$$E_m(F_\psi)_q \ll I_1 \ll \psi(2^l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \left(\sum_{s\geq l} 2^{-s\varepsilon q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \psi(2^l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)} \asymp \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Тепер розглянемо випадок $2<q<\infty$. Застосувавши теорему 2.1 і нерівність Мінковського, одержимо

$$\|F_\psi - \sum_{s<l} \delta_s(F_\psi)\|_q = \Big\| \sum_{s\geq l} \delta_s(F_\psi) \Big\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{s\geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \left(\Big\| \sum_{s\geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \Big\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\geq l} \big\| |\delta_s(F_\psi)|^2 \big\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s\geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Використавши (4) і повторивши міркування, які проводились для випадку $1 < q \leq 2$, отримаємо шукану оцінку

$$E_m(F_\psi)_q \ll \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}},\ 2 < q < \infty.$$

Таким чином, оцінку зверху в теоремі 2.3 встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Нехай $t^* \in T_m$ — поліном найкращого наближення функції $F_\psi(x,\beta)$ у просторі $L_q,\ 1 < q < \infty$, тобто

$$E_m(F_\psi)_q = \inf_{t \in T_m} \|F_\psi - t\|_q = \|F_\psi - t^*\|_q,$$

і

$$F_2(x,\beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-2} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx}.$$

Розглянемо величину

$$J = (F_\psi - t^*,\ F_2 - S_m(F_2)) = (F_\psi,\ F_2 - S_m(F_2)) -$$

$$-(t^*,\ F_2 - S_m(F_2)) = (F_\psi,\ F_2 - S_m(F_2)).$$

З одного боку, за нерівністю Гельдера має місце співвідношення

$$J \leq \|F_\psi - t^*\|_q \|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'} = E_m(F_\psi)_q \|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'},$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Оскільки (див. [3, с.39]),

$$\|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'} \ll 2^{-m(2-\frac{1}{q})},$$

то

$$J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-m(2-\frac{1}{q})}. \tag{5}$$

З іншого боку, для J можемо записати

$$J \gg \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \psi(|k|)|k|^{-2} \gg \sum_{s \geq m} \sum_{k \in \rho^+(s)} \psi(k) k^{-2} = \sum_{s \geq m} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s} \psi(k) k^{-2} \gg$$

$$\gg \sum_{s \geq m} \psi(2^s) 2^{-s} \gg \psi(m) 2^{-m}. \tag{6}$$

де $\rho^+(l) = \left\{k :\ 2^{l-1} \leq k < 2^l\right\}$.

З урахуванням співвідношень (5) та (6) отримаємо

$$\psi(m)2^{-m} \ll J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-m(2-\frac{1}{q})},$$

тобто

$$E_m(F_\psi)_q \gg \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Теорему доведено.

$\square$

Зауваження 2.1. . У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 1-\frac{1}{q}$, $1 \le q \le \infty$ відповідний результат було одержано В.М. Темляковим [3, с.38].

3. Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів $\mathbf{L}^{\psi}_{\beta,\infty}$ у просторі $\mathbf{L}_\infty$

Розглянемо для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$ апроксимативну характеристику

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot)\|_q \ , \tag{7}$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа.

Величину (7) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q, \tag{8}$$

Величину $e_m(f)_2$ для функції однієї змінної було введено С.Б. Стєчкіним [6] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f)_q$ і $e_m(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджувати вже з погляду апроксимації як індивідуальних функцій, так і певних класів функцій. Перші оцінки величини $e_m(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були отримані Р.С. Ісмагіловим [7]. Систематичне вивчення величин (8) на класах періодичних функцій багатьох змінних Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та Нікольського H^r_p було розпочато В.Н. Темляковим [8]. Подальше дослідження величин $e_m(F)_q$ на цих класах функцій, а також на класах Бєсова $B^r_{p,\theta}$ виконувалося у працях Е.С. Белінського [9, 10], А.С. Романюка [11–13] та ін. З детальнішою бібліографією і відповідними результатами, що стосуються дослідження величин (7) та (8), можна ознайомитися в [14].

Наведемо твердження, які будемо використовувати.

Теорема 3.1. [15]. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{a+\varepsilon}, a = \max\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\},\ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе таке співвідношення:*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},$$

де $b_+ = \max\{b; 0\}$.

Твердження 3.1. [16, с. 33]. *Нехай* a_k *послідовність додатних чисел така, що* $\sum\limits_k a_k^2 = 1$. *Тоді існує обмежена функція* f *така, що* $\|f\|_{\infty} \leq 1$ *і* $|\hat{f}(k)| \geq \frac{a_k}{3}$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3.2. [17]. *Нехай* $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе таке співвідношення:*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Далі доведемо твердження, в якому одержано оцінку величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty}$.

Теорема 3.3. . *Нехай* $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе таке співвідношення:*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty} \asymp \psi(m).$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху достатньо скористатися вкладенням $L^{\psi}_{\beta,\infty} \subset L^{\psi}_{\beta,2}$ та результатом, отриманим у теоремі 3.1 при $p = 2$, оскільки в цьому випадку

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty} \ll e_m(L^{\psi}_{\beta,2})_{\infty} \asymp \psi(m).$$

Доведемо оцінку знизу. Згідно з рівністю Парсеваля маємо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty} \gg e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_2 = \sup_{\|f\|_{\infty} \leq 1} \inf_{\{\Theta_m\}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Theta_m} |\hat{f}(k)|^2 \psi^2(m) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши твердження 3.1 та взявши супремум по $g \in L_2$, можемо записати

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty} \gg \sup_{\|g\|_2 \le 1} \inf_{\{\Theta_m\}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Theta_m} |\hat{g}(k)|^2 \psi^2(m) \right)^{\frac{1}{2}} = e_m(L^{\psi}_{\beta,2})_2.$$

Скориставшись результатом теореми 3.2, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_{\infty}$.

Теорему 3.3 доведено. □

Зауваження 3.1. . У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, порядок величини $e_m(W^r_{\beta,\infty})_{\infty}$ встановлено в праці [18].

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. // Пр. Ін-ту математики НАН України, 2002. — **40**, Т.1. — 427 с.

[3] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — 112 с.

[4] *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sc. Publ. Inc, 1993. — 272 p.

[5] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.; — Т.2. — 537 с.

[6] *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37–40.

[7] *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, № 3. — С. 161–178.

[8] *Темляков В.Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. — 1984. — **279**, № 2. — С. 301–305.

[9] *Белинский Э.С.* Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. — 1985. — **284**, № 6. — С. 1294–1297.

[10] *Белинский Э.С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — **180** — С. 46–47.

[11] *Романюк А.С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ I // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 11. — С. 1535–1547.

[12] *Романюк А.С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II // Там же. 1993. — **45**, № 10. — С. 1411–1423.

[13] *Романюк А.С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. Матем. — 2003. — **67**, № 2. — С. 61–100.

[14] *Романюк А.С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. // Пр. Ін-ту математики НАН України — 2012. — **Т. 93**. — 352 с.

[15] *Шкапа В.В.* Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 305–317.

[16] *R.M. Trigub, E.S. Bellinsky.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. — Kluwer Academic Publishers, 2004. — 585 p.

[17] *Федоренко А.С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — С. 356–364.

[18] *Belinskii E.S.* Decomposition theorems and approximation by a "floating" system of exponentials // Trans. Amer. Math. Soc. — 1998. — **350**, N 1. — C. 43–53.