Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 8–25

УДК 532:595

Побудова математичної моделі руху в'язкої капілярної рідини в посудині

М.Я. Барняк

Інститут математики НАН України, Київ; barnyak@imath.kiev.ua

The paper considers sloshing of a bounded capillary viscous liquid in the gravity field. The surface tension causes increasing both potential energy and dissipation. A slip-type condition with a friction is defined on the wetted tank surface. Based on the hypothesises introduced, we construct such a hydrodynamic model of a capillary liquid which explains mobility of the contact line between the liquid, gas, and the rigid tank.

В работе предложена модель движения вязкой жидкости, на которую кроме сил тяжести действуют силы поверхностного натяжения. В результате наряду с увеличением потенциальной энергии ограниченного объема жидкости существенно увеличивается скорость диссипации энергии жидкости. На твердой стенке полости задается условие проскальзывания с трением. На основании принятых гипотез удалось построить такую модель движения капиллярной жидкости, в которой объясняется также подвижность линии раздела трех сред — жидкости газа и твердого тела.

1. Вступ

На динаміку рідини в посудині нарівні із силами ваги та силами в'язкості можуть суттєво впливати сили поверхневого натягу рідини. Це особливо проявляється у випадках невеликих розмірів посудини або в умовах близьких до невагомості, коли сила ваги порівняна з поверхневими силами. Першою задачею, яка виникає при цьому дослідженні, є визначення стійкої форми рівноваги вільної поверхні заданого об'єму рідини в посудині конкретної геометричної форми. Дослідження динаміки рідини в посудині грунтується на побудові розв'язків задачі про малі коливання капілярної рідини. У даній статті пропонується нова постановка цієї задачі з урахування пружності поверхневих сил.

* Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0112U001015

2. Задача гідростатики

Нехай рідина частково заповнює нерухому порожнину, яка має форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Під дією сил ваги і сил поверхневого натягу статична вільна поверхня рідини набуває криволінійної конфігурації і, зокрема, у цьому випадку вона може мати також форму поверхні обертання відносно вертикальної осі z.

Як відомо [1] , твірна осесиметричної вільної поверхні капілярної рідини описується диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{r\,r'}\left(\frac{rz'}{\sqrt{r'^2+z'^2}}\right)' = bz + c\left(' = \frac{d}{d\xi}\right), \tag{1}$$

де ξ — параметр, $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$ — параметричне рівняння твірної вільної поверхні рідини, $b = \dfrac{\rho\,gL^2}{\sigma}$ — число Бонда, ρ — густина рідини, g — прискорення сил земного тяжіння, L — характерний лінійний розмір посудини (тут радіус вільної поверхні рідини), σ — коефіцієнт поверхневого натягу на межі розділу рідина–газ, c — константа що визначається в процесі побудови розв'язків задачі. Якщо параметр ξ є змінна r, то рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{1}{r}\left(\frac{rz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right)' = bz + c. \tag{2}$$

Вибираючи параметр ξ довжину дуги s, одержимо таку систему рівнянь:

$$\frac{1}{r}(rz')' = r'(bz+c), \quad r'^2 + z'^2 = 1. \tag{3}$$

Оскільки константа c залишається невизначеною, при $b \neq 0$ можна зробити заміну змінної z :

$$z(r) = f(r) - \frac{c}{b} \tag{4}$$

тоді рівняння (2) і (3) відповідно набудуть вигляду

$$\left(\frac{rf'}{\sqrt{1+(f')^2}}\right)' = bfr, \tag{5}$$

$$(rz^{'})^{'} = bzrr', \;\; r^{'2} + z^{'2} = 1. \tag{6}$$

У точці перетину твірної вільної поверхні рідини з твердою стінкою виконується умова Дюпре–Юнга: умова рівності кута змочування γ заданому:

$$\sigma \cos\gamma = \sigma_1 - \sigma_2, \tag{7}$$

де σ_1 і σ_2 — коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях розділу відповідно тверда стінка–газ і тверда стінка–рідина.

Для побудови розв'язків відповідних крайових задач для рівнянь (2) або (3) будуємо розв'язки допоміжних задач для цих рівнянь. При невеликих значеннях числа Бонда ($b < 100$) ці крайові задачі розв'яжемо наступним способом.

Розглянемо задачу Коші для системи рівнянь (3) при початкових умовах

$$r = 0, r' = 1, z = c/b \text{ при } s = 0, \tag{8}$$

де константи c є подвоєна середня кривизна вільної поверхні рідини в її центрі, тобто на осі симетрії. Зрозуміло, що її значення невідоме апріорі. Кожному значенню константи c відповідає крива сімейства рівноважних форм і значення об'єму рідини. За допомогою деякого ітераційного методу знаходимо це значення константи, яке відповідає заданому об'єму рідини. Будувати розв'язки задачі Коші можна чисельними [1] або аналітичними методами. Зокрема в праці [2] для цієї мети застосовано метод степеневих рядів.

Як видно із рівнянь (2) і (3), при великих числах Бонда малий параметр $1/b$ міститься при старших похідних, а тому крайові задачі для цих рівнянь є некоректно поставлені. Їхні розв'язки матимуть характер примежевого шару. Зрозуміло, що середня кривизна в центрі вільної поверхні рідини при великих числах Бонда є дуже малою і вона не може характеризувати відповідну криву сімейства рівноважних форм.

Розглянемо задачу визначення форми рівноваги рідини в прямому круговому вертикальному циліндрі радіусом a. Потрібно розв'язати рівняння (5) при крайових умовах

$$f = 0 \text{ при } r = 0, \; f' = \cos\gamma = \varepsilon \text{ при } r = a. \tag{9}$$

Зауважимо, що задача (5), (9), як відомо із [1], має таке варіаційне формулювання, згідно з яким функція $f(r)$ визначається як така, що надає мінімум функціоналу

$$F_1(a, f(r)) = \int_0^a r\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2}\, dr + \frac{b}{2}\int_0^a rf^2 dr - \frac{f(a)\cdot\varepsilon\cdot a}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad (10)$$

на класі функцій $f(r)$, які дорівнюють нулю при $r = 0$ і інтегровані з квадратом разом з першою похідною на відрізку [0;a].

Очевидно, що функція $f(r)$ та її похідна на відрізку [0;a] є монотонно зростаючими, причому $\frac{df}{dr}$ набуває всіх значень від 0 до $\cot\gamma$ при $r = a$. При фіксованих значеннях кута γ і ε існує таке значення $r = a$ $(0 < a < 1)$, що $\frac{df(a)}{dr} = \varepsilon$. Якщо значення ε достатньо мале, то відповідно і значення функції $\frac{df(r)}{dr}$ на відрізку $[0; a]$, не перевищують ε, а функціонал $F_1(a, f(r))$ з точністю до членів другого порядку малості можна замінити таким:

$$F_2(a, f(r)) = \int_0^a r\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right) dr + \frac{b}{2}\int_0^a rf^2 dr - f(a)\varepsilon a. \qquad (11)$$

Функція $f_0(r)$, яка надає мінімум цьому функціоналу, задовольняє рівняння

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_0}{dr}\right) + brf_0 = 0$$

і крайові умови

$$\frac{df_0}{dr} = 0 \text{ при } r = 0, \quad \frac{df_0}{dr} = \varepsilon \text{ при } r = a.$$

Отже, $f_0(r) = cI_0(\sqrt{b}\, r)$, де

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{b}\, I_1(\sqrt{b}\, a)}. \qquad (12)$$

Оцінимо похибку при заміні функціонала $F_1(a, f)$ функціоналом $F_2(a, f)$:

$$|F_1(a, f(r)) - F_2(a, f)| = \left|\int_0^a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2} - \right.\right.$$

$$-\sqrt{1+\left(\frac{df}{dr}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\right)^4}\Bigg) r\,dr + \left|\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right| f(a) \le$$

$$\le \int\limits_0^a \frac{1}{8}\left(\frac{df}{dr}\right)^4 r\,dr + \left|\varepsilon - \varepsilon\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right|\varepsilon < \frac{\varepsilon^4}{16} + \frac{\varepsilon^4}{2} = \frac{7}{16}\varepsilon^4. \qquad (13)$$

Отже, функція $f_0(r)$ мінімізує функціонал $F_1(a, f)$ на відрізку $[0; a]$ з точністю до $\dfrac{\varepsilon^4}{2}$.

Для визначення форми вільної поверхні рідини при заданих значеннях числа Бонда, кута змочування γ і числа ε потрібно знати значення параметра a, щоб знайти функцію f_0. Нехай значення a задано. Тоді обчислимо значення похідних $\dfrac{dz}{ds}$ і $\dfrac{dr}{ds}$ у точці $r = a$:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{df_0}{dr}\frac{dr}{ds} = \varepsilon \cdot \cos\beta = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

де β — кут нахилу дотичної до твірної.

При $s = s_0$ маємо такі початкові умови:

$$r = r_0 = a,\ \ z = z_0 = \frac{\varepsilon I_0(\sqrt{b}\,a)}{\sqrt{b}\,I_1(\sqrt{b}\,a)},\ \ r' = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},\ \ z' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \qquad (14)$$

Довжину дуги кривої знаходимо так:

$$s_0 = \int\limits_0^a \sqrt{1+\left(\frac{df}{dr}\right)^2}\,dr = \int\limits_0^a \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right) dr =$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^a \left(\frac{I_1(\sqrt{b}\,r)}{I_1(\sqrt{b}\,a)}\right)^2 dr = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{b}}\int\limits_0^{\sqrt{b}\,a} \left(\frac{I_1(t)}{I_1(\sqrt{b}\,a)}\right)^2 dt.$$

Аналогічно розв'язуємо задачу гідростатики в деякому околі центру однозв'язної вільної поверхні рідини для довільної порожнини.

Далі апроксимуємо розв'язки задачі степеневими рядами:

$$r(s) = \sum_{k=0}^{N} a_{1,k}(s-s_0)^k, \quad z(s) = \sum_{k=0}^{N} b_{1,k}(s-s_0)^k, \tag{15}$$

де $a_{1,0} = a, \ a_{1,1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \ b_{1,0} = z_0, \ b_{1,0} = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$.

Запишемо рекурентні формули для обчислення коефіцієнтів $a_{1,k}$ і $b_{1,k}$:

$$d_1 = 1, \ d_k = 0 \ (k > 1), \ c_{m,k-1} = b\sum_{i=0}^{k-1} a_{m,i}b_{m,k-i+1}, \ m = 1,$$

$$b_{m,k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{(k+1)a_{m,0}} \left(\frac{1}{k} a_{m,i+1}c_{m,k-i-1} - b_{m,i+1}a_{m,k-i} \right), \tag{16}$$

$$a_{m,k+1} = \frac{d_k}{2a_{m,0}} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{(k+1)a_{m,0}} \left(\frac{1}{k} b_{m,i+1}c_{m,k-i-1} - a_{m,i+1}a_{m,k-i} \right).$$

За необхідності будуємо аналітичне продовження:

$$r = \sum_{k=0}^{N} a_{m,k}(s-s_{m-1})^k, \quad z = \sum_{k=0}^{N} b_{m,k}(s-s_{m-1})^k, \ m \geq 2. \tag{17}$$

Коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$ визначають за формулами (16). Перші два коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$ $(k = 0,1)$ знаходять за формулами (15) при $m = 1$ і (17) при $m \geq 2$ і $s = s_{m-1}$. Тут $s_{m-1} = \dfrac{1}{3}R_m$, де R_m — радіус збіжності рядів (15), або (18), який наближено можна визначити так:

$$R_m = \frac{1}{6} \sum_{k=N-2}^{N} \left(|a_{m,k}|^{-\frac{1}{k}} + |b_{m,k}|^{-\frac{1}{k}} \right). \tag{18}$$

Тепер на підставі побудованих функцій $r(s)$ і $z(s)$ при заданому значенні a знаходимо значення s^*, для якого виконується умова (7). Зауважимо, що функція $z(s)$ визначається з точністю до константи. Тоді застосовуючи метод хорд, знаходимо це значення параметра a, при якому об'єм рідини дорівнює заданому. Тут константа a є визначальним параметром для шуканої форми рівноваги.

Таким чином розв'язується задача гідростатики при великих значеннях числа Бонда $b \geq 100$.

3. Малі коливання рідини в посудині

Розглянемо об'єм рідини, на який діють сили поверхневого натягу на вільній поверхні Σ та на твердій стінці порожнини S. Об'єм рідини обмежено пружною плівкою на Σ , зміна площі якої на dS спричинює зміну її потенціальної енергії на σdS, а зміна площі плівки на S на величину dS приводить до зміни її потенціальної енергії на $\sigma_1 dS$. Таким чином, будемо розглядати плівку рідини, яку утворюють поверхневі сили як м'яку оболонку.

При дослідженні малих коливань рідини будемо опиратися на закон збереження енергії:

$$E(\vec{v},\vec{v}) + S(\vec{v},\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(T(\vec{v},\vec{v}) + P(\vec{u},\vec{u})) = 0, \tag{19}$$

де $\vec{u}(\vec{r},t)$ — переміщення частинок рідини в точці з радіусом $\vec{r}$ у момент часу t, $\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(\vec{r},t)$ — швидкість частинок рідини, $p(\vec{r},t)$ — тиск в рідині, $E(\vec{v},\vec{v})$ — швидкість дисипації енергії у внутрішніх точках області, $S(\vec{v},\vec{v})$ — швидкість розсіювання енергії завдяки тертю плівки рідини по твердій стінці посудини,
$T(\vec{v},\vec{v})$ — кінетична енергія рідини, $P(\vec{u},\vec{u})$ — потенціальна енергія рідини.

Дві із записаних вище квадратичних форм можна задати відразу:

$$T(\vec{v},\vec{v}) = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega} \mid \vec{v} \mid d\Omega, \tag{20}$$

де ρ — густина рідини, Ω — об'єм зайнятий рідиною;

$$E(\vec{v},\vec{v}) = \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mid^2 d\Omega, \tag{21}$$

де μ — динамічний коефіцієнт в'язкості, (x_1, x_2, x_3) — декартові координати, v_i — компоненти вектора швидкості $\vec{v}$.

Співвідношення (19) можна записати у вигляді

$$E(\vec{v},\vec{v}) + S(\vec{v},\vec{v}) + 2T(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t},\vec{v}) + 2P(\vec{u},\vec{v})) = 0. \tag{22}$$

Це співвідношення можна узагальнити, вибираючи замість соленоїдальної вектор-функції $\vec{v}$ довільну соленоїдальну вектор-функцію $\vec{w}$, яка задовольняє умову

$$(\vec{w},\vec{n}) = 0 \text{ на } S.$$

Рівняння руху в'язкої капілярної рідини одержимо на підставі наступного твердження. Якщо для довільної соленоїдальної вектор-функції $\vec{w}(\vec{r})$ виконується співвідношення

$$E(\vec{v},\vec{w}) + S(\vec{v},\vec{w}) + 2T(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t},\vec{w}) + 2P(\vec{u},\vec{w})) = 0, \qquad (23)$$

то вектор-функції $\vec{u}$ і $\vec{v}$ та скалярна функція p описують рух в'язкої капілярної рідини в посудині.

Далі наведемо виведення поданих білінійних функціоналів для порожнин, які мають форму тіла обертання.

4. Швидкість дисипації енергії рідини

Розглянемо детальніше білінійний функціонал

$$E(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\mu}{2}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})d\Omega = \qquad (24)$$

$$= \mu\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})d\Omega =$$

$$= \mu\int_{\Omega}(\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}w_i(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) - w_i(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i x_j}))d\Omega =$$

$$= \mu\int_{S+\Sigma}(\vec{w},\frac{\partial \vec{v}}{\partial n})dS - \mu\int_{\Omega}(\vec{w},\triangle\vec{v})d\Omega - \mu\int_{S+\Sigma}\sum_{i,j=1}^{3}w_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}cos(n,x_j)dS.$$

Позначимо підінтегральний вираз останнього інтеграла через $G(\vec{v},\vec{w})$. Його можна записати так:

$$G(\vec{v},\vec{w}) = (n_1,n_2,n_3)\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

де (n_1,n_2,n_3) — нормаль до поверхні.

Подаючи складові вектор-функцій $\vec{v}(z,r,\eta)$ і $\vec{w}(z,r,\eta)$ у циліндричній системі координат

$$\begin{aligned} v_x(z,r,\eta) &= v_r(z,r,\eta)\cos\eta - v_\eta(z,r,\eta)\sin\eta, \\ v_y(z,r,\eta) &= v_r(z,r,\eta)\sin\eta + v_\eta(z,r,\eta)\cos\eta, \\ w_x(z,r,\eta) &= w_r(z,r,\eta)\cos\eta - w_\eta(z,r,\eta)\sin\eta, \\ w_y(z,r,\eta) &= w_r(z,r,\eta)\sin\eta + w_\eta(z,r,\eta)\cos\eta, \end{aligned}$$

маємо

$$G(\vec{v},\vec{w}) = w_r\big(n_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + n_z\frac{\partial v_z}{\partial r}\big) + \frac{w_\eta}{r}\big(n_r\frac{\partial v_r}{\partial \eta} + n_z\frac{\partial v_z}{\partial \eta} - n_r v_\eta\big) +$$

$$+ w_z\big(n_r\frac{\partial v_r}{\partial z} + n_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\big),$$

де $(n_z, n_r, 0)$ — нормаль до поверхні.

Нехай поверхні S і Σ мають форму поверхонь обертання. В цьому випадку доцільно перейти до криволінійних координат (s,n,η), де s — довжина дуги кривої, n — нормаль до меридіального перерізу.

Складові вектор-функцій $\vec{v}(s,n,\eta)$ і $\vec{w}(s,n,\eta)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} v_r(s,n,\eta) &= v_s(s,n,\eta)\cos\beta(s) - v_n(s,n,\eta)\sin\beta(s), \\ v_z(s,n,\eta) &= v_s(n,s,\eta)\sin\beta(s) + v_n(n,s,\eta)\cos\beta(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_r(s,n,\eta) &= w_s(s,n,\eta)\cos\beta(s) - w_n(s,n,\eta)\sin\beta(s), \\ w_z(s,n,\eta) &= w_s(s,n,\eta)\sin\beta(s) + w_n(s,n,\eta)\cos\beta(s), \end{aligned}$$

де $\beta(s)$ — кут нахилу дотичної до меридіанного перерізу поверхні. Нехай $f(s,n,\eta,\beta(s))$ — функція змінних (s,n,η), тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial s}\cos\beta - \frac{\partial f}{\partial n}\sin\beta + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{ds}\cos\beta, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial s}\sin\beta + \frac{\partial f}{\partial n}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{ds}\sin\beta. \end{aligned}$$

Користуючись цими формулами, визначимо вираз для $G(\vec{v},\vec{w})$ у системі координат (s,n,η) :

$$G(\vec{v},\vec{w}) = w_n\frac{\partial v_n}{\partial n} + w_s(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{d\beta}{ds}v_s) + \frac{w_\eta}{r}(\frac{\partial v_n}{\partial \eta} + \sin\beta v_\eta). \qquad (25)$$

Тоді

$$E(\vec{v},\vec{w}) = -\mu\int_{\Omega}(\triangle\vec{v},\vec{w})d\Omega + \mu\int_{S+\Sigma}\Big[2\frac{\partial v_n}{\partial n}w_n + \Big(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{d\beta}{ds}v_s\Big)w_s + \Big(\frac{\partial v_n}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial n} + \sin\beta v_\eta\Big)\frac{w_\eta}{r}\Big]rdsd\eta. \quad (26)$$

Для областей, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі, розв'язки відповідних задач будуються на піставі частинних розв'язків такого вигляду:

$$v_s(s,n,\eta) = v_s(s,n)\cos(m\eta),\ v_n(s,n,\eta) = v_n(s,n)\cos(m\eta),$$

$$v_\eta(s,n,\eta) = v_\eta(s,n)\sin(m\eta),$$

$$w_s(s,n,\eta) = w_s(s,n)\cos(m\eta),\ w_n(s,n,\eta) = w_n(s,n)\cos(m\eta),$$

$$w_\eta(s,n,\eta) = w_\eta(s,n)\sin(m\eta).$$

Тоді формула (26) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{E(\vec{w},\vec{v})}{\pi\mu} = &-\int_G\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\big) + r\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r}v_r - \frac{2m}{r}v_\eta\Big]w_r +\\ &+\Big[\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial v_\eta}{\partial r}\big) + r\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r}v_\eta - \frac{2m}{r}v_r\Big]w_\eta +\\ &+\Big[\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\big) + r\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r}v_z\Big]w_z\Big\}dG +\\ &+\int_0^{s_1}\Big[2\frac{\partial v_n}{\partial n}w_n + \Big(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{d\beta}{ds}v_s\Big)w_s +\\ &+\Big(-mv_n + \frac{\partial v_\eta}{\partial n} + \sin\beta v_\eta\Big)\frac{w_\eta}{r}\Big]rds.\end{aligned}$$

5. Потенціальна енергія обмеженого об'єму капілярної рідини

На вільній поверхні рідини Σ та на поверхні контакту рідини з твердою стінкою порожнини S діють сили поверхневого натягу. Під дією цих сил та сил земного тяжіння утворюється рівноважна конфігурація об'єму рідини. На поверхнях Σ та S утворюється дуже тонка плівка рідини, в якій діють сили поверхневого натягу. Згідно з гіпотезою Гауса потенціальна енергія капілярних сил пропорційна площі поверхні розділу між різними середовищами. В працях [3], [1] показано, що при нормальних (перпендикуляних до незбуреної вільної поверхні) відхиленнях вільної поверхні рідини потенціальна енергія під дією поверхневих і масових сил набуде приросту:

$$P_1(u_n, u_n) = \int_{\Sigma} \left[\sigma(\nabla_{\Sigma} u_n)^2 + a u_n^2\right] d\Sigma + \sigma \int_l \chi u_n^2 dl, \tag{27}$$

де

$$a = \rho g r' - \sigma(k_1^2 + k_2^2), \chi = \frac{k_{\Sigma}\cos\gamma - k_S}{\sin\gamma},$$

k_1 і k_2 — головні кривизни поверхні Σ, $(\nabla_{\Sigma} u_n)^2$ — означає так званий перший диференціальний параметр Бельтрамі, який є узагальненим квадрата градієнта для функцій заданих на криволінійній поверхні, k_{Σ} і k_S — кривизни нормальних меридіальних перерізів поверхонь Σ і S у точці їх перетину.

Для областей, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі, відокремлюється кругова координата і частинні розв'язки відповідних крайових задач мають вигляд

$$u_n(s, \eta) = u_n(s)\cos(m\eta), m = 0, 1, ...$$

Тоді вираз для $P_1(u_n, u_n)$ є таким:

$$\frac{P_1(u_n, u_n)}{\pi} = \int_0^{s_1} \left\{(\sigma\left[r(\frac{du_n}{ds})^2 + \frac{m^2}{r}u_n^2\right] + r a u_n^2\right\} ds + \sigma\chi r(s_1) u_n(s_1)^2.$$

Відповідну білінійну форму після інтегрування по частинах подамо у вигляді

$$\frac{P_1(u_n, w_n)}{\pi} = \int_0^{s_1} \left\{\sigma\left[-\frac{d}{ds}\left(r\frac{du_n}{ds}\right)\frac{m^2}{r}u_n\right] + r a u_n\right\} w_n ds +$$

$$+\sigma\left[r(s_1)\frac{du_n}{ds}(s_1) + \chi r(s_1) u_n(s_1)\right]) w_n(s_1).$$

Під час руху плівки рідини в дотичній площині змінюється локальна площа поверхні dS розділу різних середовищ, тобто змінюється її потенціальна енергія, причому ця зміна відбувається в додатному напрямку, оскільки в стані статичної рівноваги потенціальна енергія досягає локального мінімуму. Вважаємо, що в динаміці плівка рідини проявляє пружні властивості, тому розглядаємо її як тонку оболонку.

Потенціальну енергію деформації в теорії тонких оболонок записують у такому вигляді:

$$P(\vec{u},\vec{u}) = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\int_{\Sigma}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4})A_1A_2\,ds\,d\eta, \quad (28)$$

де s — довжина дуги меридіана, η — кутова координата, E — модуль Юнга, h — товщина оболонки, ν — модуль зсуву,

$$A_1 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial s})^2 + (\frac{\partial y}{\partial s})^2 + (\frac{\partial z}{\partial s})^2},\ A_2 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \eta})^2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \eta}u_\eta + \frac{u_n}{R_1},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s}u_\eta + \frac{u_n}{R_2},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_\eta}{\partial s} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \eta}u_s,\ \omega_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_s}{\partial \eta} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s}u_\eta,$$

(u_s, u_η, u_n) — переміщення точок оболонки в напрямках дотичних до зростання (s,η,n), R_1, R_2 — головні радіуси кривизни. Враховуючи, що $x = r(s)\cos\eta, y = r(s)\sin\eta, z = z(s)$, маємо такі вирази для виписаних вище величин:

$$A_1 = \sqrt{r'^2 + z'^2} = 1, A_2 = r(s),\ \varepsilon_1 = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{R_1},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{r'}{r}u_s + \frac{u_n}{R_2},$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{\partial u_\eta}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_\eta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \eta}.$$

Підінтегральний вираз в (28) можна записати так:

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 =$$

$$= \frac{1+\nu}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 + \frac{1-\nu}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2.$$

Як наслідок формула (28) набуває вигляду

$$P_2(\vec{u},\vec{u}) = \frac{Eh}{4(1-\nu)}\int_\Sigma \Big[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 + \frac{(1-\nu)\big[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+\omega^2\big]}{1+\nu}\Big] r ds d\eta. \tag{29}$$

Вплив нормальної деформації вільної поверхні рідини на зміну потенціальної енергії враховано вище, а тому покладемо $u_n = 0$.

Тоді

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{r'}{r}u_s + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta},\ \varepsilon_1-\varepsilon_2 = \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_s 1 - \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta},$$

$$\omega = \frac{\partial u_\eta}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_\eta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \eta}.$$

Введемо позначення:

$$\sigma_3 = \frac{E}{4(1-\nu)},\ \sigma_4 = \frac{E}{4(1+\nu)}.$$

Як σ_3 на поверхні Σ можна вибрати значення коефіцієнта поверхневого натягу на Σ, а на поверхні S — значення коефіцієнта поверхневого натягу на S, а як σ_4 можна вибрати відповідно одну третю цих коефіцієнтів. Одержимо

$$\begin{aligned} P_2(\vec{u},\vec{u}) &= \sigma_3\int_\Sigma \big(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{r'}{r}u_s + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\big)^2 r ds d\eta + \\ &+ \sigma_4\int_\Sigma r\Big[\big(\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_s - \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\big)^2 + \\ &+ \big(\frac{\partial u_\eta}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_\eta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \eta}\big)^2\Big] r ds d\eta. \end{aligned}$$

Розглянемо білінійну форму

$$\begin{aligned} P_2(\vec{u},\vec{w}) &= \sigma_3\int_\Sigma r\big(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{r'}{r}u_s + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\big)\big(\frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{r'}{r}w_s + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\eta}{\partial \eta}\big) ds d\eta + \\ &+ \sigma_4\int_\Sigma r\Big[\big(\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_s - \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\big)\big(\frac{\partial w_s}{\partial s} - \frac{r'}{r}w_s - \frac{1}{r}\frac{\partial w_\eta}{\partial \eta}\big) + \\ &+ \big(\frac{\partial u_\eta}{\partial s} - \frac{r'}{r}u_\eta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \eta}\big)\big(\frac{\partial w_\eta}{\partial s} - \frac{r'}{r}w_\eta + \frac{1}{r}\frac{\partial w_s}{\partial \eta}\big)\Big] r ds d\eta. \end{aligned}$$

Частинні розв'язки подамо у вигляді

$$\begin{aligned}u_s(s,\eta) &= u_s(s)\cos(m\eta),\ u_\eta(s,\eta)=u_\eta(s)\sin(m\eta),\\ w_s(s,\eta) &= w_s(s)\cos(m\eta).w_\eta(s,\eta)=w_\eta(s)\sin(m\eta), m=0,1,....\end{aligned} \tag{30}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{P_2(\vec{u},\vec{w})}{\pi} &= \sigma_3\int_0^{s_1} r\big(\frac{du_s}{ds}+\frac{r'}{r}u_s+\frac{m}{r}u_\eta\big)\big(\frac{dw_s}{ds}+\frac{r'}{r}w_s+\frac{m}{r}w_\eta\big)ds+\\ &+ \sigma_4\int_0^{s_1} r\Big[\big(\frac{du_s}{ds}-\frac{r'}{r}u_s-\frac{m}{r}u_\eta\big)\big(\frac{dw_s}{ds}-\frac{r'}{r}w_s-\frac{m}{r}w_\eta\big)+\\ &+ \big(\frac{du_\eta}{ds}-\frac{r'}{r}u_\eta-\frac{m}{r}u_s\big)\big(\frac{dw_\eta}{ds}-\frac{r'}{r}w_\eta-\frac{m}{r}w_s\big)\Big]rds.\end{aligned}$$

Інтегруючи по частинах, маємо

$$\frac{P_2(\vec{u},\vec{w})}{\pi}=\sigma_3\Big\{\big(\frac{du_s}{ds}+r'u_s+mu_\eta\big)w_s\mid_{s=s_1}+\int_0^{s_1}\Big[\Big(-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}\big)+$$

$$+r'u_s+mu_2\Big)w_s+\big(\frac{du_s}{ds}+\frac{r'}{r}u_s+\frac{m}{r}u_\eta\big)\big(r'w_s+mw_\eta\big)\Big]ds\Big\}+$$

$$\sigma_4\Big\{\big(\frac{du_s}{ds}-r'u_s-mu_\eta\big)w_s\mid_{s=s_1}+\int_0^{s_1}\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}-$$

$$-r'u_s-mu_2)w_s+\big(\frac{du_s}{ds}-\frac{r'}{r}u_s-\frac{m}{r}u_\eta\big)\big(r'w_s+mw_\eta\big)\Big]ds\Big\}+$$

$$+\sigma_4\Big\{\big(\frac{du_\eta}{ds}-r'u_\eta-mu_s\big)w_\eta\mid_{s=s_1}+\int_0^{s_1}\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_\eta}{ds}-$$

$$r'u_\eta-mu_s)w_\eta-\big(\frac{du_\eta}{ds}-\frac{r'}{r}u_\eta-\frac{m}{r}u_s\big)\big(r'w_\eta+mw_s\big)\Big]ds\Big\}.$$

Згрупуємо члени при w_s і w_n :

$$\frac{P_2(\vec{u},\vec{w})}{\pi}=\sigma_3\big(r\frac{du_s}{ds}+r'u_s+mu_2\big)w_s\mid_{s=s_1}+$$

$$+\sigma_3\int_0^{s_1}\Big\{\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}\big)-m\frac{du_\eta}{ds}+\big(\frac{r'^2}{r}-r''\big)u_s+\frac{r'm}{r}u_\eta\big)\Big]w_s+$$

$$+\big(m\frac{du_s}{ds}+\frac{mr'u_s}{r}+\frac{m^2}{r}u_\eta\big)w_\eta\Big\}ds+$$

$$+\sigma_4\Big\langle\Big[\big(r\frac{du_s}{ds}-r'u_s-mu_\eta\big)u_s+\big(r\frac{du_\eta}{ds}-r'u_\eta-mu_s\big)w_\eta\Big]\,|_{s=s_1}+$$
$$+\int_0^{s_1}\Big\{\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}\big)+\big(\frac{r'^2}{r}+\frac{m^2}{r}+r''\big)u_s+\frac{2mr'}{r}u_\eta\Big]w_s+$$
$$+\int_0^{s_1}\Big\{\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_\eta}{ds}\big)+\big(\frac{r'^2}{r}+\frac{m^2}{r}+r''\big)u_\eta+\frac{2mr'}{r}u_s\Big]w_\eta\Big\}ds\Big\rangle.$$

6. Швидкість розсіювання енергії унаслідок тертя плівки рідини по твердій стінці посудини

У процесі коливання рідини в нерухомій посудині можна спостерігати, що лінія контакту трьох середовищ є рухомою, а тому зрозуміло, що умова прилипання частинок рідини на твердій стінці не виконується . Замість умови прилипання задамо умову проковзування з тертям плівки рідини по поверхні твердого тіла. Логічно припустити, що коефіцієнт тертя f_t залежить від різниці між коефіцієнтами поверхневого натягу на Σ і на S.

Якщо рідина не змочує тверду стінку, то можна припустити, що коефіцієнт тертя дорівнює нулю. У випадку повного змочування рідиною твердої стінки порожнини покладемо $f_t \gg 0$.

Швидкість розсіювання енергії унаслідок тертя плівки рідини по твердій стінці посудини визначаються так

$$S(\vec{v},\vec{w})=f_t\int_S(\vec{v},\vec{w})dS. \qquad (31)$$

7. Рівняння руху капілярної рідини в посудині, яка має форму тіла обертання

Оскільки $div\vec{w}=0$ і $w_n=0$ на S, то

$$\int_\Omega(\nabla p,\vec{w})d\Omega=\int_\Omega div(p\vec{w})=\int_\Sigma pw_n dS.$$

Підставимо вирази для відповідних білінійних форм у співвідношення (19) та згрупуємо вирази при відповідних складових вектор-функції $\vec{w}$ в області G, на меридіальних перерізах L і Γ відповідно поверхонь S і Σ.

Для вектор-функцій $\vec{w}^0$, які дорівнють нулю на межі області G, одержуємо співвідношення

$$\int_G \Big\langle \Big\{ \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v_r - \frac{2m}{r} v_\eta \Big] + \frac{\partial p}{\partial r} \Big\} w_r^0 +$$
$$+ \Big\{ \rho \frac{\partial v_\eta}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_\eta}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v_\eta - \frac{2m}{r} v_r \Big] - mp \Big\} w_\eta^0 +$$
$$+ \Big\{ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v_z \Big] + \frac{\partial p}{\partial z} \Big\} w_z^0 \Big\rangle r dG = 0,$$

із урахуванням якого рівняння руху рідини в області набувають вигляду:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r} v_r - \frac{2m}{r} v_\eta \Big] + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (32)$$
$$\rho \frac{\partial v_\eta}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_\eta}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v_\eta - \frac{2m}{r} v_r \Big] - mp = 0, \quad (33)$$
$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \mu \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \big) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v_z \Big] + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (34)$$

На вільній поверхні маємо наступні крайові умови:

$$2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \sigma \Big[- \frac{d}{ds} \Big(r \frac{du_n}{ds} \Big) + \frac{m^2}{r} u_n \Big] + aru_n - p = 0, \quad (35)$$

$$\mu \Big(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{d\beta}{ds} v_s \Big) + \sigma_3 \Big[- \frac{d}{ds} \big(r \frac{du_s}{ds} \big) - m \frac{du_\eta}{ds} + \quad (36)$$
$$+ \big(\frac{r'^2}{r} - r'' \big) u_s + \frac{r' m}{r} u_\eta \big) \Big] + \sigma_4 \big[- \frac{d}{ds} \big(r \frac{du_s}{ds} \big) +$$
$$+ \big(\frac{r'^2}{r} + \frac{m^2}{r} + r'' \big) u_s + \frac{2mr'}{r} u_\eta \Big] = 0,$$

$$\mu \Big(- mv_n + \frac{\partial v_\eta}{\partial n} + \sin \beta v_\eta \Big) + \sigma_3 \Big[m \frac{du_s}{ds} + \frac{mr' u_s}{r} + \frac{m^2}{r} u_\eta \Big] + \quad (37)$$
$$+ \sigma_4 \Big[- \frac{d}{ds} \big(r \frac{du_\eta}{ds} \big) + \big(\frac{r'^2}{r} + \frac{m^2}{r} + r'' \big) u_\eta + \frac{2mr'}{r} u_s \Big] = 0.$$

На межі L, тобто на твердій стінці порожнини, крайові умови матимуть вигляд

$$u_n = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\mu\Big(\frac{\partial v_n}{\partial s}+\frac{\partial v_s}{\partial n}+\frac{d\beta}{ds}v_s\Big)+\sigma_5\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}\big)-m\frac{du_\eta}{ds}\quad+\\ +\big(\frac{r'^2}{r}-r''\big)u_s+\frac{r'm}{r}u_\eta)\Big]+f_tu_s+\sigma_6[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_s}{ds}\big)\quad+\\ +\big(\frac{r'^2}{r}+\frac{m^2}{r}+r''\big)u_s+\frac{2mr'}{r}u_\eta\Big]=0,\end{aligned}\tag{39}$$

$$\begin{aligned}\mu\Big(-mv_n+\frac{\partial v_\eta}{\partial n}+\sin\beta v_\eta\Big)+\sigma_5\Big[m\frac{du_s}{ds}+\frac{mr'u_s}{r}+\frac{m^2}{r}u_\eta\Big]+\\ +f_tu_\eta+\sigma_6\Big[-\frac{d}{ds}\big(r\frac{du_\eta}{ds}\big)+\big(\frac{r'^2}{r}+\frac{m^2}{r}+r''\big)u_\eta+\frac{2mr'}{r}u_s\Big]=0.\end{aligned}\tag{40}$$

Тут σ_5 і σ_6 відповідні коефіцієнти, які пов'язані з пружністю плівки рідини на твердій стінці порожнини.

У точці перетину ліній L і Γ ставляться умови сумісності. Позначимо складові вектор-функцій переміщення та швидкості вільної поверхні $\vec{u}^1$ і $\vec{v}^1$, а складові вектор-функцій переміщення та швидкості твердої стінки $\vec{u}^2$ і $\vec{v}^2$. Отже, маємо такі умови сумісності:

$$\frac{du_n^1}{ds}+\chi u_n^1=0,\tag{41}$$

$$u_\eta^1=u_\eta^2,\ u_s^1=u_s^2\cos\gamma,\ w_\eta^1=w_\eta^2,\ w_s^1=w_s^2\cos\gamma.\tag{42}$$

Крім записаних вище умов повинні виконуватися умови в точці перетину ліній L і Γ:

$$\begin{aligned}\Big[r\frac{du_s^1}{ds}(\sigma_3+\sigma_4)+(r'u_s^1+mu_\eta^1)(\sigma_3-\sigma_4)\Big]\cos\gamma\quad+\\ +\Big[r\frac{du_s^2}{ds}(\sigma_5+\sigma_6)+(r'u_s^2+mu_\eta^2)(\sigma_5-\sigma_6)\Big]\quad=\quad 0,\end{aligned}\tag{43}$$

$$\Big(\frac{du_\eta^1}{ds}-r'u_\eta^1-mu_s^1\Big)\sigma_4+\Big(\frac{du_\eta^2}{ds}-r'u_\eta^2-mu_s^2\Big)\sigma_6\quad=\quad 0.\tag{44}$$

8. Висновки

Одержані вище крайові умови задачі суттєво змінюють кінематику руху рідини. Зокрема, унаслідок умови проковзування з тертям лінія перетину трьох середовищ є рухомою. Замість умов відсутності дотичних напружень на вільній поверхні, враховуючи пружність поверхневих сил , одержуємо істотно змінені крайові умови. Отже, можна очікувати, що буде змінена якісна і кількісна картини течії рідини в околі вільної поверхні.

[1] *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости.— М.: Наука, 1976. — 504 с.

[2] *Барняк М.Я.* Определение формы равновесия свободной поверхности жидкости в сосуде, находящемся в слабом гравитационном поле // Труды семинара по дифференциальным уравнениям. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. — С. 166–175.

[3] *Тюпцов А.Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.— 1966. — №2. — С. 78–85.