Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 26–37

УДК 532:595

Власні симетричні коливання в'язкої рідини в посудині, що має форму тіла обертання *

М.Я. Барняк, О.М. Барняк

Інститут математики НАН України, Київ; barnyak@imath.kiev.ua

Natural axisymmetric sloshing modes of a viscous liquid are described by a spectral boundary problem with the spectral parameter in both the governing equation and a boundary condition. In the present paper, the problem reduces to the boundary value problem for the Laplace equation but the corresponding differential boundary condition includes an extra integral term. A projective scheme is applied to solve this problem. The scheme remains efficient for arbitrary viscosity, even though the low-viscous case implies a singular-perturbed problem. The results on the the eigenvalues are given for a spherical cavity.

Собственные симметричные колебания вязкой жидкости описываются спектральной задачей из спектральным параметром в уравнении и граничных условиях. Эта задача сведена к краевой задачи для уравнения Лапласа из спектральным параметром, который входит в интегродифференциальное граничное условие. Для решения этой задачи использован проекционный метод. Такая методика исследования позволяет решить задачу при произвольной вязкости жидкости, в частности для маловязкой жидкости, когда задача становится сингулярно возмущенной. Приведены результаты вычислений собственных значений задачи для сферической полости.

Нехай область Ω, яка частково заповнена рідиною, має форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Введемо циліндричну систему координат (r, η, z), де вісь z збігається з віссю симетрії порожнини. Точку $z = 0$ виберемо на вільній поверхні рідини.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

© М.Я. Барняк, О.М.Барняк, 2014

Власні коливання в'язкої рідини описуються наступною крайовою спектральною задачею:

$$-\frac{1}{H}\triangle\vec{v}+\nabla p=\lambda\vec{v},\quad div\vec{v}=0 \text{ в } \Omega,\quad \vec{v}=0 \text{ на } S,\quad v_z=-\lambda h \text{ на } \Sigma,$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}=0,\ \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \eta}+\frac{\partial v_\eta}{\partial z},\ \frac{2}{H}\frac{\partial v_z}{\partial z}-p+h=0 \text{ на } \Sigma. \tag{1}$$

Тут Σ — вільна поверхня рідини, S — тверда стінка порожнини, $\vec{v}(z,\eta,z)$ — швидкість частинок рідини, $p(z,\eta,z)$ — тиск у рідині, $h(r,\eta)$ — відхилення по вертикалі вільної поверхні рідини, $H=\dfrac{g^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}}{\nu}$ — число Галілея, g — прискорення сил земного тяжіння, L — характерний лінійний розмір порожнини, ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості, $\lambda=\dfrac{\omega^2 L}{g}$ — спектральний параметр, ω — частота власних коливань рідини.

Частинні розв'язки задачі (1) для порожнин, які мають форму тіла обертання, можна подати так:

$$\vec{v}(r,\eta,z)=v_r(r,z)\cos m\eta\,\vec{e}_r+v_\eta(r,z)\sin m\eta\,\vec{e}_\eta+v_z(z,\eta)\cos m\eta\,\vec{e}_z,$$
$$p(r,\eta,z)=p(r,z)\cos m\eta,\ \ h(r,\eta)=h(r)\cos m\eta. \tag{2}$$

При $m=0$ реалізуються осесиметричні коливання рідини, коли в довільному меридіальному перерізі області Ω відбувається один і той самий рух рідини, а вільна поверхня в збуреному стані має форму тіла обертання, тобто складові швидкості $v_r(r,\eta,z)$ і $v_z(r,\eta,z)$ та відхилення вільної поверхні $h(r,\eta)$ не залежать від кутової змінної η, а складова швидкості v_η тотожно дорівнює нулеві. У цьому випадку вектор швидкості набуває вигляду

$$\vec{v}(r,z)=v_r(r,z)\vec{e}_r+v_z(r,z)\vec{e}_z.$$

Його компоненти можна подати через функцію течії ψ_0 наступним чином:

$$v_r=-\frac{\partial\psi_0}{\partial z},\ \ v_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_0). \tag{3}$$

Підставивши (3) у задачу (1), одержимо наступне рівняння, яке задовольняє функція ψ_0 в меридіальному перерізі G області Ω:

$$\triangle_1(\triangle_1+\lambda H)\psi_0=0, \tag{4}$$

де

$$\triangle_1\psi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_0)\right) + \frac{\partial^r\psi_0}{\partial z^r}.$$

Нехай $\lambda H \neq 0$. Введемо позначення: $\triangle_1\psi_0 = -\lambda H\psi$, $\triangle_1\psi_0 + \lambda H\psi_0 = \lambda H\varphi$. Тоді

$$\psi_0 = \varphi + \psi, \text{ причому } \triangle_1\varphi = 0, \, (\triangle_1 + \lambda H)\psi = 0. \tag{5}$$

Введемо на Γ (меридіальний переріз поверхні Σ) оператор T_1, який породжується диференціальним виразом $t_1 u \equiv -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right)$ і діє на класі двічі неперервно-диференційовних функцій, що задовольняють умови $u(0) = u(a) = 0$, де a — радіус вільної поверхні рідини.

Таким чином, задача (1) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\triangle_1\varphi = 0, \; \triangle_1\psi + \lambda H\omega = 0 \text{ в } G, \; \varphi + \psi = 0, \; \frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi) = 0 \text{ на } L, \\ T_1(\varphi+\psi) - \frac{\lambda H}{2}\psi = 0, \; T_1\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi) - \frac{\lambda H}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}\psi = 0 \text{ на } \Gamma.\end{gathered} \tag{6}$$

Оператор T_1 має обернений інтегральний оператор T_{-1}, його можна записати через функцію Гріна такого вигляду

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2a^2}r\left(\xi - \frac{a^2}{\xi}\right) & \text{при } 0 \leq r \leq \xi, \\ \frac{1}{2a^2}\xi\left(r - \frac{a^2}{r}\right) & \text{при } \xi \leq r \leq a. \end{cases} \tag{7}$$

Отже,

$$T_1^{-1}u = \int_0^a G(\tau,\xi)u(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Подамо функцію φ як суму двох складових:

$$\varphi = -\tilde{\varphi} + \frac{\lambda H}{2}\Phi, \tag{9}$$

де функції $\tilde{\varphi}$ і Φ задовольняють рівняння

$$\triangle_1\tilde{\varphi} = 0, \;\; \triangle_1\Phi = 0 \text{ в } G$$

і крайові умови

$$\tilde{\varphi} = \psi \text{ на } L + \Gamma, \ \Phi = 0 \text{ на } L, \ \Phi = T_1^{-1}\psi \text{ на } \Gamma.$$

Функції $\tilde{\varphi}$ і Φ явно не залежать від λ і визначаються через межові значення функції ψ на L і Γ як розв'язки відповідних задач Діріхле для рівняння Лапласа.

Позначивши $\omega^2 = -\lambda H$, дійшли висновку, що власні симетричні коливання в'язкої рідини в осесиметричній порожнині описуються наступною крайовою спектральною задачею:

$$\triangle_1\psi - \omega^2\psi = 0, \ \triangle_1\varphi = 0, \ \triangle_1\Phi = 0 \text{ в } G,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \ \Phi = 0, \ \varphi = \psi \text{ на } L, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + T_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\omega^4}{4}T_1^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}\Phi = 0 \text{ на } L,$$

$$\Phi = T_1^{-1}\varphi, \ \ \varphi = \psi \ \text{ на } \Gamma.$$

Тут для скорочення запису значок "тильда"опускаємо.

Розглянемо рівняння Гельмгольца в тривимірному просторі:

$$\triangle_3\Psi - \omega^2\Psi = 0, \ \text{ де } \triangle_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Фундаментальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q(R) = \frac{e^{-\omega R}}{R}. \tag{12}$$

Для довільного розв'язку рівняння (11) і довільної області Ω, обмеженої поверхнями S і Σ, виконується співвідношення

$$\alpha(P)\Psi(P) + \int\limits_{S+\Sigma}\left(\Psi(r^{'}, \eta^{'}, z^{'})\frac{\partial Q(R)}{\partial n'} - \frac{\partial\Psi(r^{'}, \eta^{'}, z^{'})}{\partial n'}\right) dS = 0, \tag{13}$$

де (r, η, z) і $(r^{'}, \eta^{'}, z^{'})$ — циліндричні системи координат, $R = R(P(r, \eta, z), S(r^{'}, \eta^{'}, z^{'}))$ — віддаль між точками $P(r, \eta, z)$ і $S(r^{'}, \eta^{'}, z^{'})$, $\alpha = 4\pi$; якщо $P \in \Omega$ то $\alpha = 2\pi$; α дорівнює відповідному тілесному куту, у випадку, коли P лежить на ребрі або в кутовій точці межі області Ω.

Розглянемо область Ω, яка має форму тіла обертання відносно вертикальної осі z. Частинні розв'язки рівняння Гельмгольца (13) набувають вигляду

$$\Psi(r,\eta,z) = \psi_m(r,z)\cos m\eta, \tag{14}$$

де $\psi_m(r,z)$ задовольняє в G рівняння

$$\triangle_m \psi_m - \omega^2\psi_m \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\psi_m + \frac{\partial^2\psi_m}{\partial z^2} - \omega^2\psi_m = 0. \tag{15}$$

Віддаль $R(P,S)$ між точками $P(r,\eta,z)$ і $S(r^{'},\eta^{'},z^{'})$ визначається так:

$$R^2(P,S) = (z-z^{'})^2 + r^2 + r^{'} - 2rr^{'}\cos(\eta-\eta^{'}) =$$
$$= (r-r^{'})^2 + (z-z^{'})^2 + 4rr^{'}\sin^2\left(\frac{\eta-\eta^{'}}{2}\right). \tag{16}$$

Нехай $\beta = \eta-\eta^{'}$. Розвинемо функцію $Q(R(P,S)) = Q(r,z,r^{'},z^{'},\beta)$, як періодичну по β функцію з періодом 2π, у ряд Фур'є на відрізку $-\pi \le \beta \le \pi$. Ця функція парна щодо кута β, отже, маємо ряд тільки за косинусами

$$Q(r,z,r^{'},z^{'},\beta) = Q_0(r,z,r^{'},z^{'})\cos\beta + \ldots, \tag{17}$$

де

$$Q_0(r,z,r^{'},z^{'}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q(r,z,r^{'},z^{'},\beta)\,d\beta,$$

$$Q_m(r,z,r^{'},z^{'}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q(r,z,r^{'},z^{'})\cos m\beta\,d\beta,\ m = 1,2,\ldots .$$

Підставивши (14) і (17) в (13), отримаємо

$$\alpha(P)\psi(P)\cos m\eta + \int\limits_{S+\Sigma}\left(\psi_m(r^{'},z^{'})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial Q_j}{\partial n^{'}}\cos j\beta - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\psi_m(r^{'},z^{'})}{\partial n^{'}}\sum_{j=0}^{\infty} Q_j\cos j\beta\right)\cos m\eta^{'}\,dS = 0.$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_{S+\Sigma} f\,dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{L+\Gamma} f r^{'}\,dl\,d\eta^{'}$$

а також

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos m\eta^{'} \cos j\beta\,d\eta^{'} = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\eta^{'} \cos j(\eta - \eta^{'})\,d\eta^{'} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } m \neq j, \\ 2\pi, \text{ якщо } m = j = 0, \\ \pi \cos m\eta, \text{ якщо } m = j = 0, \end{cases}$$

маємо

$$\frac{\alpha(P)}{2}\psi_m(P) + \int\limits_{L+\Gamma} r^{'} \left[\psi_m(r^{'}, z^{'}) \frac{\partial Q_m}{\partial n^{'}} - \frac{\partial \psi_m(r^{'}, z^{'})}{\partial n^{'}} Q_m \right] dl = 0, \quad (18)$$

де

$$Q_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q(r, z, r^{'}, \beta, z^{'}) \cos m\beta\,d\beta.$$

Розглянемо детальніше випадок $m = 1$, який відповідає рівнянням (5). Функція $Q_1(r, z, r^{'}, z^{'})$ у цьому разі задається так:

$$Q_1 = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-\omega\sqrt{A^2 + B^2 \sin^2 t}}}{\sqrt{A^2 + B^2 \sin^2 t}} \cos 2t\,dt, \quad (19)$$

де $A^2 = (r - r^{'})^2 + (z - z^{'})^2,\ B^2 = 4\,r\,r^{'},\ t = \beta/2.$

Визначимо значення функції ψ та її нормальної похідної із крайових умов задачі (10) через значення функцій φ і Φ та їх похідних

$$\psi = \varphi \text{ на } L + \Gamma, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ на } L,$$

$$(20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + T_1^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\omega^4}{4} T_1^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{H^2}{4} \Phi \text{ на } L.$$

Після підстановки (20) в (18) задача (10) прийме вигляд

$$\triangle_1\varphi = 0,\ \ \triangle_1\Phi = 0 \ \text{ в } G,\ \ \Phi = 0 \ \text{ на } L,\ \ \Phi = T_1^{-1}\varphi \ \text{ на } \Gamma,$$

$$S\varphi \equiv \frac{\alpha}{2}\varphi + \int\limits_{L+\Gamma} r^{'}\left(\varphi\frac{\partial Q_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n^{'}}Q_1\right) dl -$$

$$-\frac{H^2}{4}\int\limits_{\Gamma} r^{'}\Phi Q_1 dr^{'} - \frac{\omega^2}{2}\left\{\int\limits_{L+\Gamma} r^{'}\frac{\partial\Phi}{\partial n^{'}}Q_1 dl + \int\limits_{\Gamma} r^{'}T_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}Q_1 dr^{'}\right\} -$$

$$-\frac{\omega^4}{4}\int\limits_{\Gamma} r^{'}T_1^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z^{'}}Q_1 dr^{'} = 0 \ \text{ на } \ L+\Gamma. \tag{21}$$

Використавши фундаментальний розв'язок для рівняння (15) зводемо задачу до крайової задачі для системи рівнянь Лапласа. Отже, задача (21) полягає в побудові двох розв'язків рівняння Лапласа, які задовольняють систему крайових умов, одна з яких є інтегродиференціальною.

Перейдемо до побудови наближеного методу розв'язування крайової спектральної задачі (21).

Апроксимуємо шуканий розв'язок задачі скінченими сумами:

$$\varphi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k,\ \ \Phi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi_k, \tag{22}$$

де w_k — однорідні гармонічні поліноми, які визначаються за допомогою наступних співвідношень:

$$w_1 = r,\ \ w_2 = zr,\ \ w_{k+1} = \frac{(2k+1)zw_k - (k-1)(r^2+z^2)w_{k-1}}{(k+2)}, \tag{23}$$

Φ_k — розв'язки допоміжних задач Діріхле:

$$\triangle_1\Phi_k = 0 \text{ в } G,\ \ \Phi_k = 0 \text{ на } L,\ \ \Phi_k = T_1^{-1}w_k \text{ на } \Gamma. \tag{24}$$

Розв'язки задач (24) побудуємо за допомогою методу Трефтца, апроксимуючи їх скінченими сумами

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} p_{jk} w_j. \tag{25}$$

Коефіцієнти p_{jk} визначаємо як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_{jk} = \beta_{ik},$$

де

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{L+\Gamma} r w_i \frac{\partial w_j}{\partial n} dl, \;\; \beta_{ik} = \int\limits_{\Gamma} r T_1^{-1} w_k \frac{\partial w_i}{\partial n} dl.$$

Коефіцієнти a_k в сумах (22) знаходимо, виходячи із умов ортогональності:

$$\int\limits_{L+\Gamma} r S \varphi^{(m)} \cdot w_i \, dl = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{26}$$

тобто задовольняємо інтегро–диференціальну крайову умову задачі (21) в середньоквадратичному сенсі.

Як наслідок одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k [\alpha_{ik}^{(0)} + \omega^2 \alpha_{ik}^{(1)} + \omega^4 \alpha_{ik}^{(2)}] = 0, \tag{27}$$

де

$$\alpha_{ik}^{(0)} = \int\limits_{L+\Gamma} r S_0(w_k) w_i dl, \; \alpha_{ik}^{(1)} = \int\limits_{L+\Gamma} r S_1(w_k) w_i dl, \; \alpha_{ik}^{(2)} = \int\limits_{\Gamma} r S_2(w_k) w_i dr,$$

$$S_0(\varphi) = \frac{\alpha(P)}{2} \varphi(P) + \int\limits_{L+\Gamma} r' \left(\varphi \frac{\partial Q_1}{\partial n'} - \frac{\partial \varphi}{\partial n'} Q_1 \right) dl - \frac{H^2}{4} \int\limits_{\Gamma} r' \Phi Q_1 dr',$$

$$S_1(\varphi) = -\frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{L+\Gamma} r' \frac{\partial \Phi}{\partial n'} Q_1 dl + \int\limits_{\Gamma} r' T_1^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} Q_1 dr' \right\},$$

$$S_2(\varphi) = -\frac{1}{4} \int\limits_{\Gamma} r' T_1^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} Q_1 dr'.$$

Коефіцієнти $\alpha_{ik}^{(0)}$, $\alpha_{ik}^{(1)}$ і $\alpha_{ik}^{(2)}$ — функції параметра ω, оскільки фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца Q_1 залежить від ω.

Характеристичне рівняння для визначення параметра ω має наступний вигляд:

$$\det[\alpha_{ik}^{(0)}(\omega) + \omega^2 \alpha_{ik}^{(1)}(\omega) + \omega^4 \alpha_{ik}^{(2)}(\omega)] = 0. \tag{28}$$

Оскільки визначення коефіцієнтів $\alpha_{ik}^{(0)}$, $\alpha_{ik}^{(1)}$, $\alpha_{ik}^{(2)}$ пов'язано з громіздкими обчисленнями, є сенс будувати розв'язки рівняння (28), використовуючи метод послідовних наближень, коли наступне наближення обчислюється як корінь рівняння

$$\det[\alpha_{ik}^{(0)}(\omega_n) + \omega_{n+1}^2 \alpha_{ik}^{(1)}(\omega_n) + \omega_{n+1}^4 \alpha_{ik}^{(2)}(\omega_n)] = 0. \tag{29}$$

Такий алгоритм дає змогу зменшити число ітерацій. Для обчислення оператора $S(\varphi)$ потрібно вираховувати квадратури

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma} r' f(r') Q_1 dr', \;\; I_2 = \int\limits_{\Gamma} r' f(r') \frac{\partial Q_1}{\partial n'} dr',$$

$$I_3 = \int\limits_{L} r' f(s) Q_1 dl, \;\; I_4 = \int\limits_{L} r' f(s) \frac{\partial Q_1}{\partial n'} dl. \tag{30}$$

Підставляючи вираз для Q_1 в (30), одержуємо квадратури вигляду

$$I_5 = 2 \int\limits_0^a r' f(r') \int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-\omega Rd}}{Rd} \cos 2t \, dt dr',$$

$$I_6 = 2 \int\limits_0^a r' f(r') \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-\omega Rd}}{Rd} \right) \cos 2t \, dt dr'.$$

Тут

$$Rd = \sqrt{z_P^2 + (r_P - r')^2 + 4 r_P r' \sin^2 t} \;\; (P \in L),$$

$$I_7 = 2 \int\limits_0^{\pi} r(\theta') f(\theta') \int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-\omega Rd}}{Rd} \cos 2t \, dt d\theta',$$

$$I_8 = 2 \int\limits_0^{\pi} r(\theta') f(\theta') \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\omega Rd}}{Rd} \right) \cos 2t \, dt d\theta',$$

де

$$Rd = \sqrt{z^2 + (r_P - r)^2 + 4r_P r \sin^2 t}, \ \ z = \cos\theta' - h_0, \ \ r = \sin\theta' \quad (P \in \Gamma).$$

Чисельну реалізацію методу проведено для сферичної порожнини одиничного радіуса і висоти $h = 1$ заповнення порожнини рідиною.

За координатні функції вибиралися однорідні многочлени $w_k(r, z)$, які задовольняють рівняння $\triangle_1 w_k = 0$ і визначаються за рекурентними формулами (23).

Побудуємо розв'язки допоміжних задач (24). Враховуючи, що всі $w_{2k} = 0$ на Γ, маємо, що всі функції $\Phi_{2k} \equiv 0$ на Γ. Функції Φ_{2k-1} визначаються як розв'язки крайових задач:

$$\triangle_1 \Phi_{2k-1} = 0 \text{ в } G, \ \ \Phi_{2k-1} = 0 \text{ на } L, \ \ \Phi_{2k-1} = T_1^{-1} w_{2k-1} \text{ на } \Gamma.$$

Вирахуємо значення w_{2k-1} на Γ, тобто при $z = 0$

$$w_1 = r, \ \ w_2 = 0, \ \ w_{2k+1} = -\frac{(2k-1)}{(2k+2)} r^2 w_{2k-1},$$

звідки за математичною індукцією одержуємо, що

$$w_{2k+1}(r, 0) = -\frac{(2k-1)}{(2k+2)} r^2 w_{2k-1}(r, 0) = (-1)^k \frac{2(2k-1)!!}{(2k+2)!!} r^{2k+1}.$$

Нехай $u_k = T_1^{-1} w_{2k-1}$. Подамо u_k у вигляді $u_k = c_k r^{2k+1} - d_k r$. Коефіцієнти c_k визначимо на основі співвідношення

$$c_k T_1 r^{2k+1} = w_{2k-1} = (-1)^{k-1} \frac{2(2k-3)!!}{(2k)!!} r^{2k-1}.$$

Тоді

$$c_k = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{k(2k-1)(2k+2)!!}, \ \ d_k = \frac{w_{2k+1}(r_0, 0)}{2k(2k-1) w_1(r_0, 0)}.$$

Отже,

$$u_k = \frac{1}{2k(2k-1)} \left\{ w_{2k+1}(r, 0) - \frac{w_{2k+1}(r_0, 0)}{w_1(r_0, 0)} w_1(r, 0) \right\}.$$

Подамо шукану функцію $\Phi_{2k-1}(r, z)$ у вигляді

$$\Phi_{2k-1}(r, z) = \frac{1}{2k(2k-1)} \left\{ w_{2k+1}(r, z) - \frac{w_{2k+1}(r_0, 0)}{w_1(r_0, r)} w_1(r, z) \right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2} q_{jk} w_{2j}(r,z).$$

Коефіцієнти q_{jk} визначимо із умови $\Phi_{2k-1}=0$ на L, тобто

$$\sum_{j=1}^{n_2} q_{jk} w_{2j} = \frac{1}{2k(2k-1)} \left\{ \frac{w_{2k+1}(r_0,0)}{w_1(r_0,0)} w_1(r,z) - w_{2k+1}(r,z) \right\}.$$

Помножимо цю умову на $\dfrac{\partial w_{2j}}{\partial n}$ і проінтегруємо по l. Унаслідок ортогональності функцій $w_{2j}(r,z)$ $\int\limits_L r w_{2j} \frac{\partial w_{2i}}{\partial n} dl = 0$, якщо $i \neq j$, одержимо

$$q_{jk} = \frac{1}{2k(2k-1)} \int\limits_0^{\pi/2} \left\{ \frac{w_{2k+1}(r_0,0)}{r_0} - \right.$$

$$\left. - w_{2k+1}(r,z) \right\} r \frac{\partial w_{2j}(r,z)}{\partial n} \bigg|_{r=\sin\theta, z=-\cos\theta} d\theta.$$

У таблиці наведено значення $Re\lambda_k$ і $Im\lambda_k$, $k=\overline{1,3}$, для різних зна-

H	$Re\lambda_1$	$Im\lambda_1$	$Re\lambda_2$	$Im\lambda_2$	$Re\lambda_3$	$Im\lambda_3$
20	0.98827	1.45309	1.92834	0.56338	—	—
50	0.53443	1.80621	1.14619	1.98469	1.73635	1.80106
100	0.32280	1.88312	0.75497	2.37934	1.22442	2.51750
400	0.10158	1.91383	0.24888	2.59854	0.45278	3.07907
1600	0.03077	1.92485	0.06673	2.63199	0.13104	3.16580
6400	0.01064	1.93006	0.01934	2.63655	0.04478	3.18907
25600	0.00418	1.93351	0.00699	2.63996	0.01212	3.18942
102400	0.00125	1.93434	0.00238	2.64160	0.00303	3.18969
409600	0.00094	1.93468	0.00112	2.64124	0.00131	3.19115
1638400	0.00045	1.93492	0.00052	2.64135	0.00060	3.19319

чень параметра H для висоти $h=1$ заповнення порожнини рідиною.

Власні симетричні коливання ідеальної рідини описуються наступною спектральною задачею:

$$\triangle_0 \Phi = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } L, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \omega^2 \Phi \text{ на } \Gamma.$$

Наближені розв'язки задачі знаходимо варіаційним методом, визначаючи мінімальні значення функціонала

$$F(\Phi) = \frac{\int\limits_{L+\Gamma} r\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dl}{\int\limits_{\Gamma} r\Phi^2 dr}$$

на класі функції Φ, що є розв'язками рівняння $\triangle_0 \Phi = 0$ і задовольняють умову $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} r\Phi dr = 0$.

З урахуванням 24 - координатних функцій при реалізації методу Рітца було одержано такі перші три власні значення:

$$\omega_1 = 1.93524, \ \ \omega_2 = 2.64128, \ \ \omega_3 = 3.18551.$$

Вони практично збігаються із $Im(\lambda_k)$, наведеними в таблиці, хоча більшої уваги варті значення $Re(\lambda_k)$, які визначають швидкість затухання власних коливань рідини.

Висновки

Тут на підставі використання фундаментального розв'язку для рівняння Гельмгольца спектральну задачу з параметром у рівнянні і крайових умовах зведено до спектральної крайової задачі для рівняння Лапласа з параметром, який міститься тільки в крайових умовах. Такий підхід дав змогу розробити і ефективно реалізувати наближений метод побудови розв'язків сингулярно збуреної задачі для довільних значень числа Галілея.

[1] *Крейн С.Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Докл. АН СССР. — 1964. — 159, № 2. — С. 262–265.

[2] *Барняк О.М.* Проекційний метод побудови розв'язків задачі про нормальні симетричні коливання в'язкої рідини // Укр. мат. журн. — 1997. —**49**, № 2. — С. 315–320.