

## Приближенное решение краевой задачи для управляемых систем, удовлетворяющих ранговому условию

*В.В. Грушковская<sup>1</sup>, А.Л. Зуев<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> *Институт математики НАН Украины, Киев;  
v\_grushkovskaya@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com*

<sup>2</sup> *Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems,  
Magdeburg; zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de*

The paper is devoted to studying the motion planning problem that consists in steering control-linear system from a given initial to a target point for a fixed time. It is supposed that the vector fields of a system satisfy the rank condition with the first-order Lie brackets. The approach considered makes it possible to reduce the point-to-point control problem to a system of second-order algebraic equations. The solvability of such a system is proved, and the error of the method is estimated. Kinematic equations of an underwater vehicle and a rigid body with flywheels are considered as examples.

Досліджена двоточкова задача керування для заданих початкового та кінцевого станів системи за фіксований час. Припускається, що векторні поля системи задовольняють рангову умову з дужками Лі першого порядку. Розглянутий підхід дозволяє звести двоточкову задачу керування до системи алгебраїчних рівнянь другого порядку. Проведено доведення розв'язності такої системи і оцінку похибки методу. Розглянуто приклади кінематичних рівнянь руху підводного апарату і твердого тіла з маховими масами.

## 1. Введение

Рассмотрим класс управляемых систем вида

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \tag{1}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  — состояние,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  — управление,  $f_i(x)$  — гладкие отображения из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ . Проведем исследование следующей краевой задачи.

**Двухточечная задача управления:** для заданных начальной точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и конечной точки  $x^1 \in \mathbb{R}^n$  найти допустимое управление  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ , переводящее систему (1) из  $x^0$  в  $x^1$  за время  $\varepsilon$ .

Предполагается, что векторные поля системы (1) с их скобками Ли первого порядка удовлетворяют ранговому условию в точке  $x^0$ :

$$\text{span} \{f_i(x^0), [f_{j_1}, f_{j_2}](x^0)\} = \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где  $i \in \{1, \dots, m\} = S_1$ ,  $(j_1, j_2) \in S_2 \subseteq \{1, \dots, m\}^2$ ,  $|S_2| = n - m$ ,  $[f_i, f_j] = \frac{\partial f_j}{\partial x} f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j$  — скобки Ли для векторных полей  $f_i$  и  $f_j$ ,  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}$  — матрица Якоби. Полагаем, что элементы множества  $S_2$  упорядочены по принципу  $j_1 < j_2$  для всех  $(j_1, j_2) \in S_2$ .

Системы вида (1) описывают движение многих механизмов и широко используются в робототехнике и других областях инженерии. Важной задачей теории управления для таких систем является разработка эффективных алгоритмов планирования движения. Этой проблеме посвящено значительное число исследований, в частности работы R.W. Brockett, J. Canny, I. Duleba, H. Hermes, L. Gurvits, G. Lafferriere, Z. Li, R. Murray, S. Sastry, H. J. Sussmann. Основными классами управлений, используемыми для решения задачи планирования движения, являются тригонометрические [4, 7, 8, 12, 14], полиномиальные [3, 5, 15] и кусочно-постоянные функции [2, 6, 10, 11].

В данной статье для задачи планирования движения системы (1) развивается подход, описанный в работе [1]. В качестве функций управления используются тригонометрические полиномы, зависящие от времени. Принципиальным отличием полученных здесь результатов от известных является доказательство разрешимости соответствующей краевой задачи, а также оценка погрешности метода. По-

добный подход к исследованию разрешимости систем уравнений применяется также в работе [16] для задачи стабилизации.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 получено разложение решений в ряд Вольтерры и доказаны некоторые свойства такого представления. В разделе 3 доказана разрешимость краевой задачи для системы (1) в классе функций управления, заданных в виде тригонометрических полиномов. Проведена оценка точности такого метода. Полученные результаты проиллюстрированы на отдельных классах механических систем в разделе 4.

## 2. Представление решений с помощью рядов Вольтерры

Пусть  $u(t)$  является непрерывной функцией времени  $t \in [0, \varepsilon]$ . Тогда решение  $x(t)$  системы (1) с начальным условием  $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$  можно представить в виде ряда Вольтерры (см., например, [13]):

$$\begin{aligned} x(t) = & x^0 + \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^t u_i(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \int_0^t \int_0^\tau u_i(\tau) u_j(s) ds d\tau + R(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $t \in [0, \varepsilon]$ , а  $R(t)$  — остаточный член ряда Вольтерры. Следующая лемма демонстрирует связь между остаточными членами рядов Вольтерры и Тейлора.

**Лемма 2.1.** Пусть  $R_i^{(k+1)}(x)$  — остаточный член разложения функции  $f_i(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = x^0$  до  $k$ -го порядка. Тогда остаточный член в формуле (3) представим в виде

$$\begin{aligned} R(t) = & \sum_{i=1}^m \int_0^t R_i^{(2)}(x(\tau)) u_i(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^0} \int_0^t \int_0^\tau R_j^{(1)}(x(s)) u_i(\tau) u_j(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Для доказательства леммы используется интегральное представление решений системы (1) с начальным условием  $x(0) = x^0$  и разложение в ряд Тейлора функции  $f_i(x(\tau))$ .

Отметим, что для некоторых нильпотентных систем остаточный член ряда Вольтерры равен нулю. В общем случае  $R(t)$  оценивается с помощью следующей леммы.

**Лемма 2.2.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклая область,  $x(t) \in D$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon$  — решение системы (1) с управлением  $u \in C[0, \varepsilon]$  и начальным условием  $x(0) = x^0 \in D$ . Предположим, что векторные поля  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  удовлетворяют условиям

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(x) \right\| \leq M_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x^2}(x) \right\| \leq M_2, \quad i, j \in S_1, \quad (5)$$

с некоторыми положительными постоянными  $M_1$  и  $M_2$  для всех  $x \in D$ . Тогда остаточный член ряда Вольтерры в разложении (3) оценивается так:

$$\|R(t)\| \leq \frac{M_0 t^3}{6M_1^2} (e^{M_1 U \varepsilon} - 1) \left( M_1^3 \frac{U^2}{\varepsilon} + \sqrt{n} M_0 M_2 (e^{M_1 U \varepsilon} - 1) \frac{U}{\varepsilon^2} \right), \quad (6)$$

где  $M_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i(x^0)\|$ ,  $U = \sup_{t \in [0, \varepsilon]} (|u_1(t)| + \dots + |u_m(t)|)$ .

**Доказательство.** Из условий (5), формулы (4) и представления остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа следует, что

$$\|R(t)\| \leq \frac{\sqrt{n} U M_2}{2} \int_0^t \|x(\tau) - x^0\|^2 d\tau + U^2 M_1^2 \int_0^t \int_0^\tau \|x(s) - x^0\| ds d\tau. \quad (7)$$

Для оценки  $\|x(t) - x^0\|$  используем функцию  $V(t) = \|x(t) - x^0\|^2$ . Производная функции  $V$  в силу системы (1) при выполнении условий (5) удовлетворяет неравенству  $\dot{V} \leq 2U(M_1 V + M_0 V^{1/2})$ . Решая соответствующее уравнение сравнения с начальным условием  $V(0)=0$ , получаем  $V(t) \leq \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^2 (e^{M_1 U t} - 1)^2$ , следовательно,

$$\|x(t) - x^0\| \leq \frac{M_0}{M_1} (e^{M_1 U t} - 1). \quad (8)$$

Вместе с тем нетрудно заметить, что для  $y \leq 1$  и  $k > 0$

$$e^{ky} - 1 \leq (e^k - 1)y. \quad (9)$$

Действительно,  $e^{ky} - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k^j y^j}{j!} \leq y \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k^j}{j!} = (e^k - 1)y$ .

Используя (8) и (9), приходим к выводу, что для всех  $p \in [0, t]$

$$\|x(p) - x^0\| \leq \frac{M_0}{M_1}(e^{M_1 U p} - 1) \leq \frac{M_0}{M_1}(e^{M_1 U \varepsilon} - 1) \frac{p}{\varepsilon}.$$

Используя полученное неравенство (7) и вычисляя соответствующие интегралы, получаем утверждение леммы.  $\square$

### 3. Приближенное решение краевой задачи

#### 3.1. Тригонометрические функции управления

Для использования рангового условия со скобками Ли первого порядка (2) перепишем формулу (3) в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & x^0 + \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^t u_i(s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^0) \int_0^t \int_0^\tau (u_j(\tau) u_i(s) - \\ & - u_i(\tau) u_j(s)) ds d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \right|_{x=x^0} \int_0^t u_i(s) ds \int_0^t u_j(s) ds + R(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим семейство управлений

$$u_i(t) = a_i + \sum_{(q,r) \in S_2} a_{qr} \left( \delta_{iq} \cos \frac{2\pi K_{qr}}{\varepsilon} t + \delta_{ir} \sin \frac{2\pi K_{qr}}{\varepsilon} t \right), \quad (11)$$

где  $i \in S_1$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $a_i, a_{qr}$  — вещественные параметры,  $K_{qr}$  — ненулевые целые параметры, удовлетворяющие условию

$$|K_{q_1 r_1}| \neq |K_{q_2 r_2}|, \forall (q_1, r_1) \in S_2, (q_2, r_2) \in S_2, (q_1, r_1) \neq (q_2, r_2). \quad (12)$$

Подставляя управления (11) в формулу (10), получаем

$$\begin{aligned}
 x(\varepsilon) = & x^0 + \varepsilon \sum_{i=1}^m f_i(x^0) a_i + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{(i,j) \in S_2} [f_i, f_j](x^0) \frac{a_{ij}^2}{K_{ij}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \times \\
 & \times f_j(x) \Bigg|_{x=x^0} a_i a_j + \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^0) \sum_{(q,r) \in S_2} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} (\delta_{ir} a_j - \delta_{jr} a_i) + R(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Из представления (13) и леммы 2.2 следует результат, позволяющий свести краевую задачу для системы (1) к системе алгебраических уравнений второго порядка.

**Теорема 3.1.** Для заданных  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ , зададим функцию управления  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$  формулой (11) с коэффициентами, удовлетворяющими следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 x^1 - x^0 = & \varepsilon \sum_{i=1}^m f_i(x^0) a_i + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{(i,j) \in S_2} [f_i, f_j](x^0) \frac{a_{ij}^2}{K_{ij}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \times \\
 & \times f_j(x) \Bigg|_{x=x^0} a_i a_j + \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^0) \sum_{(q,r) \in S_2} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} (\delta_{ir} a_j - \delta_{jr} a_i).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда решение системы (1) с начальным условием  $x(0) = x^0$  удовлетворяет условию  $x(\varepsilon) = x^1 + R(\varepsilon)$ , где  $R(\varepsilon)$  оценивается по формуле (6).

### 3.2. Доказательство разрешимости

Докажем, что система (14) локально имеет, по крайней мере, одно вещественное решение

$$a = (a_1, \dots, a_m, a_{j_1 l_1}, \dots, a_{j_{|S_2|} l_{|S_2|}})^T \in \mathbb{R}^n.$$

Для этого введем переменные  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{a}_{j_1 l_1}, \dots, \tilde{a}_{j_{|S_2|} l_{|S_2|}})^T \in \mathbb{R}^n$  по формулам  $\tilde{a}_i = \varepsilon a_i$ ,  $i \in S_1$ ,  $\tilde{a}_{jl} = \frac{\varepsilon^2 a_{jl}^2}{4\pi K_{jl}}$ ,  $(j, l) \in S_2$ . Предполагается, что  $\text{sign}(K_{jl}) = \text{sign}(\tilde{a}_{jl})$  для ненулевых  $\tilde{a}_{jl}$  и  $\text{sign}(K_{jl}) = 1$  для  $\tilde{a}_{jl} = 0$ . Таким образом, выражение для  $\tilde{a}_{jl}$  корректно определено. В

новых переменных система (14) принимает вид

$$x^1 - x^0 = \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i f_i(x^0) + \sum_{(i,j) \in S_2} \tilde{a}_{ij} [f_i, f_j](x^0) + \Omega(\tilde{a}, x^0), \quad (15)$$

$$\text{где } \Omega(\tilde{a}, x^0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \tilde{a}_i \tilde{a}_j + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^0) \left( \sum_{(q,i) \in S_2} \tilde{a}_j \sqrt{\frac{|\tilde{a}_{qi}|}{|K_{qi}|}} - \sum_{(q,j) \in S_2} \tilde{a}_i \sqrt{\frac{|\tilde{a}_{qj}|}{|K_{qj}|}} \right).$$

Отметим, что выражение для  $\Omega(\tilde{a}, x^0)$  не зависит от знаков  $K_{qr}$  и не содержит членов степени ниже чем  $3/2$  по отношению к компонентам вектора  $\tilde{a}$ . Если  $\tilde{a}$  — решение системы (15) для заданной начальной точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то компонентами решения системы (14) являются

$$a_i = \varepsilon^{-1} \tilde{a}_i, \quad i \in S_1, \quad a_{jl} = 2\varepsilon^{-1} \text{sign}(\tilde{a}_{jl}) \sqrt{\pi |K_{jl}| |\tilde{a}_{jl}|}, \quad (j, l) \in S_2, \quad (16)$$

с положительным  $K_{jl}$  при  $a_{jl} \geq 0$  и отрицательным при  $a_{jl} < 0$ .

Таким образом, вопрос о разрешимости системы (14) сводится к изучению системы (15). Заметим, что в силу свойств  $\Omega(\tilde{a}, x^0)$  существует такая положительная постоянная  $C(x^0)$ , определяемая начальным условием  $x^0$ , что

$$\|\Omega(\tilde{a}, x^0)\| \leq C(x^0) \|\tilde{a}\|^{3/2} \text{ для всех } \tilde{a} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{a}\| \leq 1. \quad (17)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), [f_{j_1}, f_{l_1}](x), \dots, [f_{j_{|S_2|}}, f_{l_{|S_2|}}](x)). \quad (18)$$

**Теорема 3.2.** Пусть  $0 < \alpha < \min\{(\|F\|C^{-1})^2, 1\}$ . Тогда для для всех  $x^1 \in B_r(x^0)$  существует решение  $\tilde{a} \in B_\alpha(0)$  системы (15), где  $r < \alpha\|F\| - \alpha^{3/2}C$ .

**Доказательство.** В силу рангового условия (2) матрица  $F$  в (18) невырождена в точке  $x^0$ . Умножим систему (15) на матрицу  $F^{-1}(x^0)$  и запишем ее как  $\Phi(\tilde{a}) = 0$ , где

$$\Phi(\tilde{a}) = \tilde{a} + F^{-1}(x^0)(\Omega(\tilde{a}, x^0) + x^0 - x^1).$$

Оценим норму  $\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}$ :  $\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| = \|F^{-1}(x^0)(\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0) + x^0 - x^1)\| \leq \|F^{-1}(x^0)\|(\|\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0)\| + \|x^0 - x^1\|)$ . Согласно (17)

$$\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| \leq \|F^{-1}(x^0)\| \left( C(x^0)\|\tilde{a}\|^{3/2} + \|x^0 - x^1\| \right).$$

Пусть  $\alpha$  и  $r$  удовлетворяют условиям доказываемой теоремы. Тогда

$$\|F^{-1}(x^0)\| \left( C(x^0)\alpha^{3/2} + \|x^0 - x^1\| \right) < \alpha, \text{ при } x^1 \in B_r(x^0).$$

Отсюда  $\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| < \|\tilde{a}\|$  для всех  $\tilde{a} \in \mathcal{S}_\alpha = \{\tilde{a} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{a}\| = \alpha\}$ , следовательно, отображения  $\Phi(\tilde{a})$  и  $\Psi(\tilde{a}) = \tilde{a}$  гомотопны на сфере  $\mathcal{S}_\alpha$ , а степень отображения  $\Phi(\tilde{a})$  равна 1. Из принципа ненулевого вращения следует [9] существование такого  $\tilde{a} \in B_\alpha(0)$ , что  $\Phi(\tilde{a}) = 0$ .  $\square$

Эта теорема показывает, что для достаточно малых  $\|x^0 - x^1\|$  система (14) имеет, по крайней мере, одно решение  $a \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.3. Оценка погрешности

Для нильпотентных систем с  $R(\varepsilon) = 0$  управляющие функции вида (11) могут быть использованы для точного перемещения системы (1) в заданное конечное положение. Однако в общем случае остаточный член ряда Вольтерры отличен от нуля и система может быть переведена лишь в некоторую окрестность заданной точки при использовании данного подхода. Ниже проведена оценка погрешности предлагаемого метода.

Пусть  $a \in \mathbb{R}^n$  является решением системы (14). Подставляя (11) в (13), из леммы 2.2 получаем

$$\|x(\varepsilon) - x^1\| = R(\varepsilon). \tag{19}$$

**Теорема 3.3.** Пусть  $\tilde{a} \in B_\alpha(0)$ , где  $\alpha$  определяется из условий теоремы 3.2. Тогда существует такая константа  $L_0 > 0$ , что

$$\|x(\varepsilon) - x^1\| \leq L_0\alpha^{3/2}. \tag{20}$$

**Доказательство.** Норма  $U$  управлений (11) может быть оценена как  $U \leq \sum_{i=1}^m |a_i| + \sqrt{2} \sum_{(q,r) \in S_2} |a_{qr}|$ . Тогда из формулы (16) следует, что

$$U \leq \varepsilon^{-1} \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{a}_i|^{1/2} + 2\sqrt{2\pi} \sum_{(q,r) \in S_2} |K_{qr}|^{1/2} |\tilde{a}_{qr}|^{1/2} \right),$$



поскольку  $|\tilde{a}| < 1$ . Применяя неравенство Гельдера с показателями 4 и  $4/3$ , получаем

$$U \leq \varepsilon^{-1} C_1 \|\tilde{a}\|^{1/2} \leq \varepsilon^{-1} C_1 \alpha^{1/2}, \quad (21)$$

где  $C_1 = \left( m + 4\pi^{2/3} \sum_{(q,r) \in S_2} |K_{qr}|^{2/3} \right)^{3/4}$ . Тогда неравенство (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \|R(\varepsilon)\| &\leq \frac{M_0(e^{M_1 C_1 \alpha^{1/2}} - 1)}{6M_1^2} \left( M_1^3 C_1^2 \alpha + \sqrt{n} M_0 M_2 (e^{M_1 C_1 \alpha^{1/2}} - 1) C_1 \alpha^{1/2} \right) \\ &\leq \frac{M_0 C_1 \alpha^{3/2}}{6M_1^2} (e^{M_1 C_1} - 1) \left( M_1^3 C_1 + \sqrt{n} M_0 M_2 (e^{M_1 C_1} - 1) \right). \end{aligned}$$

Учитывая это неравенство и соотношение (19), получаем оценку (20)

$$L_0 = \frac{M_0 C_1}{6M_1^2} (e^{M_1 C_1} - 1) \left( M_1^3 C_1 + \sqrt{n} M_0 M_2 (e^{M_1 C_1} - 1) \right).$$

□

## 4. Примеры

### 4.1. Подводный аппарат

Рассмотрим движение автономного подводного робота, описанного, например, в работе [2]. Такой аппарат выполняет четыре независимых действия: движение вперед за счет тяги винта и вращение с тремя степенями свободы за счет изменения углов установки управляющих плоскостей (см. рис. 1). В [2] доказана управляемость такой модели и предложен управляющий алгоритм, использующий функцию типа Ляпунова.

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  координаты, определяющие положение центра масс аппарата, а через  $x_4, x_5, x_6$  — обобщенные координаты, описывающие его ориентацию (углы Эйлера). Предполагается, что управлениями являются линейная скорость  $u_1 = v$  вдоль направления  $x_1$  и три угловых скорости  $u_2 = \omega_1, u_3 = \omega_2, u_4 = \omega_3$  вдоль соответствующих осей  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда кинематические уравнения движения аппарата имеют вид

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + f_3(x)u_3 + f_4(x)u_4, \quad (22)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_6)^T$ ,  $f_1(x) = (\cos x_5 \cos x_6, \cos x_5 \sin x_6, -\sin x_5, 0, 0, 0)^T$ ,  
 $f_2(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$ ,  $f_3(x) = (0, 0, 0, \sin x_4 \tan x_5, \cos x_4, \sin x_4 \sec x_5)^T$ ,  
 $f_4(x) = (0, 0, 0, \cos x_4 \tan x_5, -\sin x_4, \cos x_4 \sec x_5)^T$ .

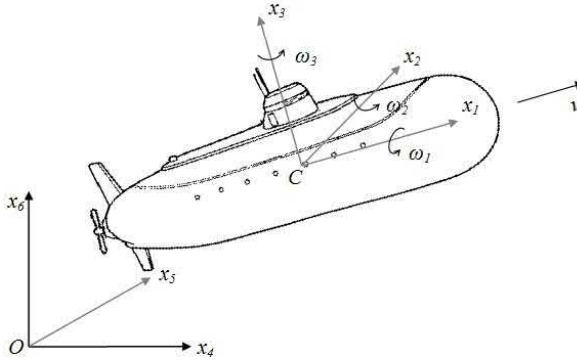


Рис 1. Управляемый подводный аппарат.

Предполагается, что  $x_5 \neq \pm\pi/2$ . При этом ранговое условие (2) выполняется в каждой точке  $\mathbb{R}^6 \setminus \{x : x_5 = \pm\pi/2\}$ , поскольку

$$\text{span}\{f_1(x), \dots, f_4(x), [f_1, f_3](x), [f_1, f_4](x)\} = \mathbb{R}^6, \forall x \in \mathbb{R}^6 : x_5 \neq \pm\pi/2,$$

где  $[f_1, f_3](x) = (\cos x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \sin x_4 \sin x_6, \cos x_4 \sin x_5 \sin x_6 - \sin x_4 \cos x_6, \cos x_4 \cos x_5, 0, 0, 0)^T$ ,  $[f_1, f_4](x) = (-\sin x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \cos x_4 \sin x_6, -\sin x_4 \sin x_5 \sin x_6 - \cos x_4 \cos x_6, -\sin x_4 \cos x_5, 0, 0, 0)^T$ . Тогда  $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $S_2 = \{(1, 3), (1, 4)\}$ . В соответствии с теоремой 3.1 функции управления

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1 + a_{13} \cos \frac{2\pi K_{13}}{\varepsilon} t + a_{14} \cos \frac{2\pi K_{14}}{\varepsilon} t, \quad u_2(t) = a_2, \\ u_3(t) &= a_3 + a_{13} \sin \frac{2\pi K_{13}}{\varepsilon} t, \quad u_4(t) = a_4 + a_{14} \sin \frac{2\pi K_{14}}{\varepsilon} t \end{aligned} \tag{23}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими системе уравнений (14), переводят систему (22) из точки  $x^0$  в окрестность точки  $x^1$  за время  $\varepsilon$ . По теореме 3.2 полученная система локально разрешима. Зададим, например,  $x_j^0 = 0$ ,  $x_j^1 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Тогда управления (23) имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(t) &\approx 0.1 + 1.254 \cos 2\pi t + 1.65 \cos 4\pi t, \quad u_2(t) \approx 0.062, \\ u_3(t) &\approx 0.103 + 1.254 \sin 2\pi t, \quad u_4(t) \approx 0.097 - 1.65 \sin 4\pi t. \end{aligned}$$

На рис. 2 показаны графики соответствующих траекторий системы (22).

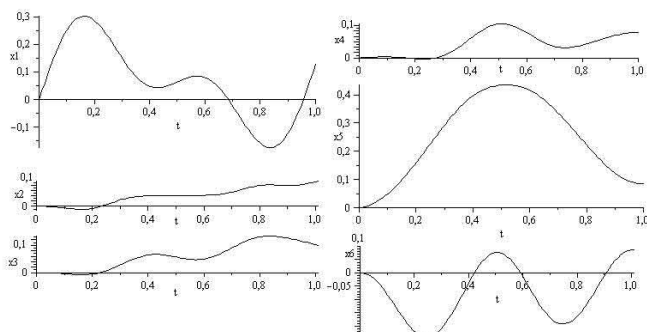


Рис 2. Графики координатных функций решения системы (22).

#### 4.2. Твердое тело с маятниковыми массами

В качестве другого примера рассмотрим механическую систему, состоящую из тела-носителя  $C_0$  массой  $m_0$  и двух маятниковых тел  $C_1$  и  $C_2$  массами  $m$ , соединенных с  $C_0$  стержнями постоянной длины  $d$  и обеспечивающих движение системы в вертикальной плоскости (рис. 3). Обозначим через  $\varphi$  угол поворота тела  $C_0$  относительно горизонтальной оси,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворотов тел соответственно  $C_1$  и  $C_2$  относительно центральной оси тела-носителя. Предполагается, что управление системой осуществляется за счет изменения углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и расстояния  $l$  от точек крепления стержней к телу  $C_0$  до его центра масс. Воспользуемся законами сохранения количества движения и момента количества движения для записи дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + f_3(x)u_3, \quad (24)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (l, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_0)^T \in \mathbb{R}^4$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  — управление,  $f_1 = (1, 0, 0, dm(\sin x_2 - \sin x_3)h(x))^T$ ,

$$f_2 = (0, 1, 0, -\left(d^2 m^2 (2m_0(1 + \sin x_2 \sin x_3) + (m_0 + 2m)(1 + \cos(x_2 - x_3))) + (m_0 + 2m)(J_1 + dm x_1 \cos x_2) + d^2 m m_0^2\right)h(x))^T,$$

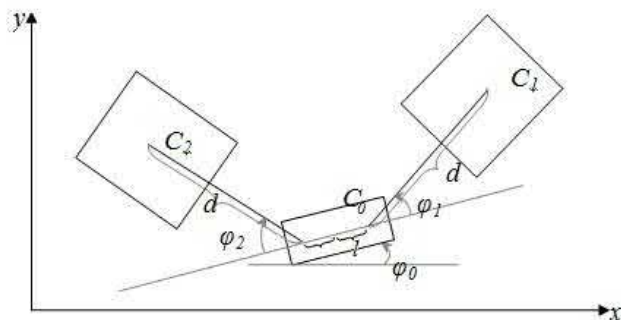


Рис 3. Тело с маяховыми массами.

$$f_3 = (0, 0, 1, -\left(d^2 m^2 (2m_0(1 + \sin x_2 \sin x_3) + (m_0 + 2m)(1 + \cos(x_2 - x_3))) + (m_0 + 2m)(J_2 + dm x_1 \cos x_3) + d^2 m m_0^2\right) h(x))^T,$$

$J_0, J_1, J_2$  — моменты инерции тел соответственно  $C_0, C_1, C_2$ ,  $h = \left(2d^2 m^2 (2m_0(1 + \sin x_2 \sin x_3) + (m_0 + 2m)(1 + \cos(x_2 - x_3))) + 2m(m_0 + 2m)(d^2 + x_1^2 + dx_1(\cos x_2 + \cos x_3)) + (m_0 + 2m)J_0 + 2d^2 m(m_0^2 - m_0 - 2m)\right)^{-1}$ . Массой стержней пренебрегаем.

Будем считать, что  $x \in D = \mathbb{R}^4 \setminus \{x : h(x) = 0\}$ . В частности, нетрудно видеть, что при  $(m_0 + 2m)J_0 + 2d^2 m(m_0^2 - m_0 - 2m) > 0$ ,  $h(x) \neq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^4$ . Ранговое условие (2) выполнено со скобками Ли векторных полей  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\text{span}\{f_1(x^0), f_2(x^0), f_3(x^0), [f_1, f_2](x^0)\} = \mathbb{R}^4 \text{ для всех } x^0 \in D,$$

т. е.  $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{(1, 2)\}$ . Тогда управления (11) имеют вид

$$u_1(t) = a_1 + a_{12} \cos \frac{2\pi K_{12}}{\varepsilon} t, \quad u_2(t) = a_2 + a_{12} \sin \frac{2\pi K_{12}}{\varepsilon} t, \quad u_3(t) = a_3$$

с коэффициентами, удовлетворяющими системе уравнений (14), а

именно:

$$a_{12} = \varepsilon^{-1} \left( x_1^1 - x_1^0 \pm \left( 2(x_1^1 - x_1^0)^2 + \frac{2\pi K_{12}}{G_{12} - G_{21}} (G_{11}(x_1^1 - x_1^0)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{22}(x_2^1 - x_2^0)^2 + G_{33}(x_3^1 - x_3^0)^2 + (x_1^1 - x_1^0)(x_2^1 - x_2^0)(G_{12} + G_{21}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (x_1^1 - x_1^0)(x_3^1 - x_3^0)(G_{13} + G_{31}) + (x_2^1 - x_2^0)(x_3^1 - x_3^0)(G_{23} + G_{32}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(x_1^1 - x_1^0)f_{14}(x^0) + 2(x_2^1 - x_2^0)f_{24}(x^0) + 2(x_3^1 - x_3^0)f_{34}(x^0) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(x_4^1 - x_4^0)f_{44}(x^0) \right)^{1/2} \right), \quad a_i = \varepsilon^{-1}(x_i^1 - x_i^0), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$K_{12} = \text{sign} \left( (G_{12} - G_{21})(G_{11}(x_1^1 - x_1^0)^2 + G_{22}(x_2^1 - x_2^0)^2 + \right. \\ \left. + G_{33}(x_3^1 - x_3^0)^2 + (x_1^1 - x_1^0)(x_2^1 - x_2^0)(G_{12} + G_{21}) + (x_1^1 - x_1^0) \times \right. \\ \left. \times (x_3^1 - x_3^0)(G_{13} + G_{31}) + (x_2^1 - x_2^0)(x_3^1 - x_3^0)(G_{23} + G_{32}) + \right. \\ \left. + 2(x_1^1 - x_1^0)f_{14}(x^0) + 2(x_2^1 - x_2^0)f_{24}(x^0) + 2(x_3^1 - x_3^0)f_{34}(x^0) + \right. \\ \left. + 2(x_4^1 - x_4^0)f_{44}(x^0) \right), \quad G_{ij} = \frac{\partial f_{i4}}{\partial x_j}.$$

Например, зададим следующие значения механических параметров системы:

$$m_0 = 0.5 \text{ кг}, \quad m = 1 \text{ кг}, \quad d = 0.6 \text{ м}, \quad J_0 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_1 = J_2 = 3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Тогда для перевода системы (24) из положения  $(0.1, \pi/6, \pi/4, 0)^T$  в окрестность положения  $(0.05, 0, 0, \pi/6)^T$  достаточно использовать управления  $u_1(t) \approx -0.05 - 3.936 \cos \frac{2\pi}{\varepsilon}t$ ,  $u_2(t) = -\frac{\pi}{6} - 3.936 \sin \frac{2\pi}{\varepsilon}t$ ,  $u_3(t) = -\frac{\pi}{4}$  (рис. 4).

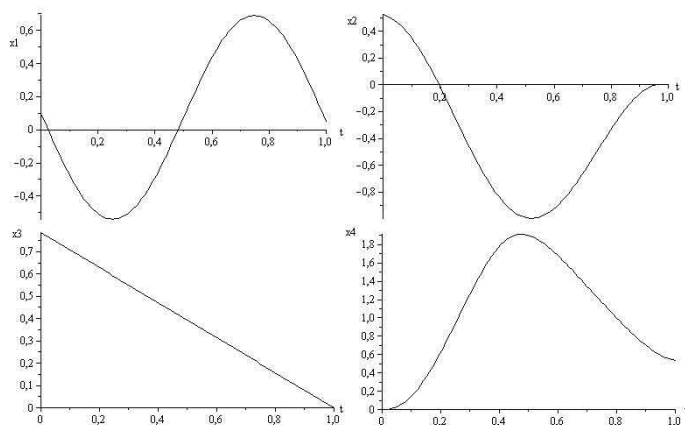


Рис 4. Графики координатных функций решения системы (24).

## 5. Выводы

В данной работе рассмотрена задача перевода системы с неуправляемым линейным приближением из заданного положения в цель с использованием тригонометрических управлений. В отличие от известных результатов предложены явные формулы для вычисления параметров управляющих функций, а также доказана локальная разрешимость соответствующей краевой задачи, которая сведена к системе алгебраических уравнений второго порядка. Кроме того, важным преимуществом предложенного локального метода по сравнению с подходом, предложенным в [14], является отсутствие условия стремления частот тригонометрических управлений к бесконечности. Это свойство делает полученные результаты более удобными для возможного практического использования. Применение описанного подхода показано на примерах планирования движения подводного аппарата и тела с маховыми массами. Представляет интерес распространение полученных результатов на системы, удовлетворяющие ранговому условию со скобками Ли высоких порядков, а также на аффинные по управлению системы. Важной представляется и разработка методов синтеза управлений для отслеживания заданных программных траекторий (в том числе с обходом препятствий). Эти вопросы явля-

ются перспективными для последующих исследований.

- [1] *Астахова Т.Н., Зуев А.Л.* Задача планирования движения для класса нелинейных систем с тригонометрическими функциями управления // Динамические системы. — 2013. — **3** (31), № 1-2. — С. 159–167.
- [2] *Barraquand J., Latombe J.-C.* On non-holonomic mobile robots and optimal maneuvering // Revue d'Intelligence Artificielle. — 1989. — **13**, N 2. — P. 77–103.
- [3] *Boissonnat J.D., Lazard S.* A polynomial-time algorithm for computing a shortest path of bounded curvature amidst moderate obstacles // Internat. J. Comput. Geom. Appl. — 2003. — **13**. — P. 189–229.
- [4] *Brockett R.W.* Control theory and singular Riemannian geometry // New Directions in Applied Mathematics. — New York: Springer-Verlag, 1981. — P. 11–27.
- [5] *Bushnell L.G., Tilbury D.M., Sastry S.S.* Steering three-input chained form nonholonomic systems using sinusoids: the fire truck example // Int. J. Robotics Research. — 1995. — **14**. — P. 366–381.
- [6] *Chumachenko T., Zuyev A.* Application of the return method to the steering of nonlinear systems // Robot Motion and Control 2009. — Berlin: Springer, 2009. — P. 83–91.
- [7] *Duleba I., Khefifi W., Karcz-Duleba I.* Layer, Lie algebraic method of motion planning for nonholonomic systems // J. of the Franklin Institute. — 2012. — **349**. — P. 201–215.
- [8] *Gurvits L., Li Z.X.* Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning // Nonholonomic Motion Planning. — New York: Springer, 1993. — P. 53–108.
- [9] *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.
- [10] *Lafferriere G., H. J. Sussmann* Motion planning for controllable systems without drift // Proc. 1991 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.— 1991. — P. 1148–1153.
- [11] *Monaco S., Normand-Cyrot D.* An introduction to motion planning under multirate digital control // Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control.— 1992. — P. 1780–1785.
- [12] *Murray R.M., Sastry S.S.* Steering nonholonomic systems using sinusoids // Proc. 29th IEEE CDC. — 1990. — P. 2097–2101.
- [13] *Nijmeijer H. van der Schaft A.J.* Nonlinear Dynamical Control Systems.— New York: Springer-Verlag, 1990. — 478 p.

- [14] *Sussmann H.J., Liu W.* Limits of highly oscillatory controls and approximation of general paths by admissible trajectories // Proc. 30th IEEE CDC. — 1991. — P. 437–442.
- [15] *Tilbury D., Murray R., Sastry S.* Trajectory generation for the  $n$ -trailer problem using Goursat normal form // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1995. — **40**, N 5. — P. 802–819.
- [16] *Zuyev A.* Stabilization of a class of non-holonomic systems by using fast oscillating controls // Submitted to SIAM J. Control Optim.