Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 106–114

УДК 517.929

Г.П. Пелюх, А.А. Акбергенов

Ін-т математики НАН України, Київ

Про лінеаризацію одного класу систем нелінійних різницевих рівнянь в околі особливої точки

Получены достаточные условия линеаризации широкого класса систем нелинейных разностных уравнений в окрестности особой точки.

Sufficient conditions for linearization for a wide class of systems of nonlinear difference equations in the neighborhood of a singular point have been obtained.

Системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ - дійсна неперервна, N-періодична $(n \times n)$ - матриця, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, розглядалися багатьма математиками (див. [1-9] і цитовану в них літературу) і в даний час ряд важливих питань їх теорії досить добре вивчені при деяких припущеннях відносно матриці $A(t)$ і вектор-функції $f(t, x)$. Продовжуючи ці дослідження, в даній статті досліджується структура множини неперервних розв'язків системи рівнянь (1) у випадку, коли $f(t, x) \in \mathbb{C}^k_x, k > 1$, при $t \in \mathbb{R}, |x| \le b$.

Оскільки в силу [6] існує неперервна заміна змінних

$$x(t) = C(t)y(t),$$

де $C(t)$ - неособлива, неперервна, N - періодична $(n \times n)$ - матриця, що приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + \bar{f}(t, y(t)), \tag{2}$$

де $\Lambda(t) = C^{-1}(t+1)A(t)C(t)$ - неперервна, 1-періодична матриця, для якої виконується умова $det\Lambda(t) \neq 0$, та вектор-функція $\bar{f}$ визначається співвідношенням $\bar{f}(t, y(t)) = C^{-1}(t+1)f(t, C(t)y(t))$, то далі розглядатимемо систему рівнянь (2). При цьому будемо припускати виконаними наступні умови:

1. корені $\lambda_i(t), i = 1, 2, ..., n$, рівняння $det(\Lambda(t) - \lambda(t)E) = 0$ є дійсні, неперервні 1-періодичні функції, які задовольняють наступним співвідношенням
$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j,$$
$$0 < |\lambda_i(t)| < 1, i, j = 1, 2, ..., n, t \in [0, 1);$$

2. для довільного набору $(i_1, ..., i_n)$ цілих невід'ємних чисел $(\sum\limits_{j=1}^{n} i_j \geq 2)$ при $t \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності
$$\lambda_i(t) \neq \lambda_1^{i_1}(t) \cdot \lambda_2^{i_2}(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{i_n}(t), i = 1, 2, ..., n, \sum_{j=1}^{n} i_j \leq k$$
де $k > \frac{ln\lambda_*}{ln\lambda^*}$, $\lambda_* = \min\left\{\min\limits_t\{|\lambda_i(t)|, i = 1, \ldots, n\}\right\}$,
$\lambda^* = \max\left\{\max\limits_t\{|\lambda_i(t)|, i = 1, \ldots, n\}\right\}$;

3. функції $\bar{f}_i, i = 1, 2, ..., n$, є неперервними N-періодичними по t та належать класу $\mathbb{C}^k$ по $y_1, \ldots, y_n$ при $|y_i| \leq b$, $i = 1, \ldots, n$;

4. функції $\bar{f}_i, i = 1, 2, ..., n$, та всі їх частинні похідні першого порядку по $y_1, \ldots, y_n$ обертаються в нуль при $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

В подальшому будемо вважати, що матриця $\Lambda(t)$ має вигляд $\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ (в противному випадку систему рівнянь (2) можна привести до вказаного вигляду за допомогою лінійної неособливої заміни змінних).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1-4. Тоді існує заміна змінних*

$$z(t) = \gamma(t, y(t)), \tag{3}$$

де $\gamma(t, y(t))$ *- неперервна,* N*-періодична по* t *вектор-функція, що належить класу* $\mathbb{C}^k$ *по* y *при* $t \in \mathbb{R}$, $|y| = \max\limits_{1 \le i \le n} |y_i| \le b_* < b$, *причому* $\gamma(t, 0) \equiv 0$, $\left.\frac{\partial \gamma(t,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = E$, E *- одинична* $(n \times n)$ *матриця, що приводить систему рівнянь (2) до лінійного вигляду*

$$z(t+1) = \Lambda(t) z(t). \tag{4}$$

Для доведення теореми достатньо показати, що для системи рівнянь

$$\gamma(t+1, \Lambda(t)y(t) + \bar{f}(t, y(t))) = \Lambda(t)\gamma(t, y(t)), \tag{5}$$

існує розв'язок $\gamma(t, y(t))$, що задовольняє вказаним в теоремі 1 умовам.

Лемма 1. *Нехай виконуються умови 1-4. Тоді існує вектор-функція*

$$k(t, y) = y + \sum_{|i|=2}^{k} k_i(t) y^i, \tag{6}$$

де $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $y^i = y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}$, $k_i(t)$*-деякі неперервні,* N*-періодичні по* t *функції, така, що*

$$k(t+1, \Lambda(t)y(t) + \bar{f}(t, y(t))) - \Lambda(t) k(t, y(t)) = F(t, y(t)), \tag{7}$$

де $F = (F^1, \ldots, F^n)$, *функції* $F^j(t, y)$, $j = 1, \ldots, n$, *- неперервні,* N *- періодичні по* t, *належать класу* $\mathbb{C}^k$ *по* y *при* $t \in \mathbb{R}$, $|y| \le b_*$, *та обертаються в нуль при* $y = 0$ *разом з усіма своїми частинними похідними по* y *порядку* $\le k$

Доведення. Оскільки згідно умов 3,4 в деякій області $D : |t| < \infty, |y| \le b_* < b$ вектор-функцію $f(t, y)$ можна представити у вигляді:

$$\bar{f}_i(t, y) = \sum_{|i|=2}^{k} \bar{f}_i(t) y^i + \varphi(t, y), \tag{8}$$

де $\bar{f}_i(t)$ — неперервні, N-періодичні по t вектор-функції, компоненти $\varphi^j(t,y), j = 1,\ldots,n$, вектор-функції $\varphi(t,y)$ є неперервними та N-періодич-ними при $t \in \mathbb{R}$ функціями, що належать класу $\mathbb{C}^k$ по y при $|y| \leq b_*$, та обертаються в нуль при $y = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по y порядку $\leq k$, то приймаючи до уваги (6), (8), отримуємо

$$\begin{gathered}\Lambda(t)y + \sum_{|i|=2}^{k} \bar{f}_i(t)y^i + \varphi(t,y) + \\ + \sum_{|i|=2}^{k} k_i(t+1)\Big(\Lambda(t)y + \sum_{|i|=2}^{k} \bar{f}_i(t)y^i + \varphi(t,y)\Big)^i - \\ - \Lambda(t)y - \Lambda(t)\sum_{|i|=2}^{k} k_i(t)y^i = \\ = \sum_{|i|=2}^{k} \lambda^i(t)k_i(t+1)y^i - \sum_{|i|=2}^{k} \Lambda(t)k_i(t)y^i + \sum_{|i|=2}^{k} P_i(t)y^i + R(t,y), \quad (9)\end{gathered}$$

де $\lambda(t) = (\lambda_1(t),...,\lambda_n(t))$, $\lambda^i(t) = \lambda_1^{i_1}(t) \cdot \lambda_2^{i_2}(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{i_n}(t)$, $P_i(t) = (P_i^1(t),\ldots,P_i^n(t))$, $R(t,y) = (R^1(t,y),\ldots,R^n(t,y))$, $P_i^j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, $|i| = 2,\ldots,k$ —деякі многочлени відносно $k_l(t+1)$ із неперервними та N-періодичними по t коефіцієнтами, причому $|l| < |i|$ та $P_i(t) = \bar{f}_i$ при $|i| = 2$, функції $R^j(t,y), j = 1,\ldots,n$ є неперервними N-періодичними по t, що належать класу $\mathbb{C}^k$ по y при $|y| \leq b_*$, та обертаються в нуль при $y = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по $y_1,\ldots,y_n$ порядку $\leq k$.

Прирівнюючи в (9) коефіцієнти при $y^i, i = 2,3,\ldots,k$, нулю, отримаємо послідовність систем лінійних різницевих рівнянь відносно вектор-функцій $k_i(t)$:

$$\lambda^i(t)k_i(t+1) = \Lambda(t)k_i(t) - P_i(t), \quad |i| = 2,3,\ldots,k. \quad (10)$$

Оскільки $P_i^j(t), j = 1,\ldots,n, |i| = 2,\ldots,k$ — многочлени відносно $k_l(t+1)$ з неперервними, N-періодичними по t коефіцієнтами, причому $|l| < |i|$, то приймаючи до уваги умови 1,2 можна послідовно показати, що система рівнянь (10) має неперервні N-періодичні по t розв'язки $k_i(t) = (k_i^1(t),\ldots,k_i^n(t))$, $|i| = 2,\ldots,k$, які мають вигляд

$$k_i^j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{[\alpha_{ij}(t)]^k}{1 - [\alpha_{ij}(t)]^N} \lambda_j^{-1}(t) P_i^j(t+k), \tag{11}$$

де $\alpha_{ij}(t) = \lambda_j^{-1}(t) \cdot \lambda_1^{i_1}(t) \cdot \lambda_2^{i_2}(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{i_n}(t), |i| = 2, 3, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$.

Таким чином, безпосередньо з (9) випливає, що якщо в якості $k_i(t), |i| = 2, \ldots, k$, розглядати неперервні, N-періодичні по t розв'язки системи рівнянь (10), які представляються у вигляді (11) та покласти $F(t, y) = R(t, y)$, то буде виконуватися рівність (7). Таким чином, Лема 1 доведена.

Розв'язок $\gamma(t, y)$ системи рівнянь (5) будемо шукати методом послі-довних наближень, причому послідовні наближення $\gamma_m(t, x), m = 0, 1, ...$ визначимо наступним чином:

$$\begin{aligned} &\gamma_0(t, y) = k(t, y), \\ &\gamma_m(t, y) = \Lambda^{-1}(t)\gamma_{m-1}(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t, y)), m = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{12}$$

Покажемо, що в деякій області $D_* : |t| < \infty, |y| \le b_* < b$, послідовність $\gamma_m(t, y), m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої вектор-функції $\gamma(t, y) = (\gamma_1(t, y), \ldots, \gamma_n(t, y))$, що є розв'язком системи рівнянь (5). Для цього доведемо рівномірну збіжність ряду

$$\gamma_0(t, y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_m(t, y) - \gamma_{m-1}(t, y)].$$

Поклавши $\gamma_m(t, y) - \gamma_{m-1}(t, y) = \Gamma_m(t, y), m = 1, 2...$, запишемо цей ряд у вигляді

$$k(t, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m(t, y). \tag{13}$$

При цьому маємо

$$\begin{aligned} &\Gamma_1(t, y) = \Lambda^{-1}(t)k(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t, y)) - k(t, y)), \\ &\Gamma_m(t, y) = \Lambda^{-1}(t)\Gamma_{m-1}(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t, y)), \quad m = 2, 3, ... \end{aligned} \tag{14}$$

Позначимо через $\mathbb{C}_D^k$ множину вектор-функцій $F(t, y) = (F^1(t, y), \ldots, F^n(t, y))$, всі компоненти яких неперервні N-періодичні по t, k раз неперервно диференційовні по y в області D функції та обертаються в нуль при $y = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по $y_1, \ldots, y_n$ порядку $\leq k$. Для кожної вектор-функції $F(t, y) \in \mathbb{C}^k_D$ визначимо

$$|F(t,y)|^0 = \max_{1\leq j\leq n} |F^j(t,y)|,$$

$$|F(t,y)|^p = \left|\frac{\partial^p F(t,y)}{\partial y^p}\right| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{1\leq i_l\leq p} |F^j_{y_{i_1}\ldots y_{i_n}}(t,y)|, p = 1,\ldots,k \tag{15}$$

Оскільки в силу умов 1,3,4 при достатньо малих $|y|$ та всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\Lambda(t)y + \bar{f}(t,y)| \leq |y|$, то використовуючи Лему 1, послідовно можна показати, що $\Gamma_m(t,y) \in \mathbb{C}^k_D, m = 1, 2, ...$ Далі покажемо, що при достатньо малих $|y| \leq b_*$, всіх $t \in \mathbb{R}$ та $m = 1, 2, ...$ виконуються оцінки

$$|\Gamma_m(t,y)|^p \leq M_p \theta^{m-1} |y|^{k-p}, p = 0, 1, ..., k, \tag{16}$$

де $M_p = const > 0, \lambda_*^{-1}\lambda^{*k} < \theta < 1$.

Дійсно, оскільки в силу (14) та (7) при $m = 1$ маємо

$$\Gamma_1(t,y) = \Lambda^{-1}(t)k(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t,y)) - k(t,y) = \Lambda^{-1}(t)F(t,y),$$

то

$$\frac{\partial^p \Gamma_1(t,y)}{\partial y^p} = \Lambda^{-1}(t)\frac{\partial^p F(t,y)}{\partial y^p}, \quad p = 1,\ldots,k,$$

і тому при всіх $(t,y) \in D_*$ отримуємо

$$|\Gamma_1(t,y)|^p \leq M_p |y|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k,$$

тобто оцінки (16) виконуються при $m = 1$. Використовуючи метод індукції, припустимо, що дані оцінки доведені для деякого $m \geq 1$. Тоді в силу (14) маємо

$$\Gamma_{m+1}(t,y) = \Lambda^{-1}(t)\Gamma_m(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t,y)),$$

$$\frac{\partial^p \Gamma_{m+1}(t,y)}{\partial y^p} = \Lambda^{-1}(t)\frac{\partial^p \Gamma_m}{\partial y^p}(t+1, \Lambda(t)y +$$

$$+\bar{f}(t,y))\Big(\Lambda(t) + \frac{\partial \bar{f}(t,y)}{\partial y}\Big)^p + R_p,$$

$$p = 1, \ldots, k,$$

де $R_1 = 0, R_p = \sum_{i=1}^{p-1} P_i \frac{\partial^i \Gamma_m(t,y)}{\partial y^i}(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t,y))$, $p = 2, \ldots, k$ та P_i - деякі многочлени відносно похідних вектор-функції $\bar{f}(t,y)$ по y порядку $\leq k$. Оскільки при достатньо малих $|y| \leq b_* < b$, (далі будемо вважати $b_* < 1$) та всіх $t \in \mathbb{R}$ маємо $|\Lambda(t)y + \bar{f}(t,y)| \leq (\lambda^* + \delta)|y|$, $\left|\Lambda(t) + \frac{\partial \bar{f}(t,y)}{\partial y}\right| \leq \lambda^* + \delta < 1$, де $\delta = \delta(b_*) \to 0$ при $b_* \to 0$, то

$$|\Gamma_m(t+1, \Lambda(t)y + \bar{f}(t,y))| \leq M_p \theta^{m-1} (\lambda^* + \delta)^{k-p} |y|^{k-p},$$

$$p = 0, 1, \ldots, k,$$

і, відповідно,

$$|\Gamma_{m+1}(t,y)|^0 \leq \lambda_*^{-1} M_0 \theta^{m-1} (\lambda^* + \delta)^k |y|^k,$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,y)|^1 \leq \lambda_*^{-1} M_1 \theta^{m-1} (\lambda^* + \delta)^{k-1} |y|^{k-1} (\lambda^* + \delta),$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,y)|^p \leq \lambda_*^{-1} M_p \theta^{m-1} (\lambda^* + \delta)^{k-p} |y|^{k-p} (\lambda^* + \delta)^p +$$

$$+ M_p^1 M_1 \theta^{m-1} |y|^{k-1} + \ldots + M_{p-1}^p M_{p-1} \theta^{m-1} |y|^{k-p+1},$$

$$p = 2, 3, \ldots, k,$$

де M_i^j - деякі додатні сталі. Виберемо b_* настільки малим, щоб при всіх $(t,y) \in D_*$ виконувалися співвідношення

$$\lambda_*^{-1} (\lambda^* + \delta)^k < \theta < 1$$

$$\lambda_*^{-1} (\lambda^* + \delta)^k + M_p^{-1} M_p^1 M_1 |y|^{p-1} + \ldots + M_p^{-1} M_{p-1}^p M_{p-1} |y| \leq \theta$$

$$p = 2, 3, \ldots, k$$

Тоді

$$|\Gamma_{m+1}(t,y)|^p \leq M_p \theta^m |y|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k,$$

і таким чином, оцінки (16) мають місце при $(t,y) \in D_*$ та всіх $m = 0, 1, \ldots$.

Оскільки безпосередньо з (16) випливає

$$||\Gamma_{m+1}(t,y)||^p = \sup_{(t,y) \in D_*} |\Gamma_m(t,y)|^p \leq M_p \theta^m, \quad p = 0, 1, \ldots, k,$$

$$m = 0, 1, \ldots,$$

то послідовність $\frac{\partial^p \gamma_m(t,y)}{\partial y^p}, p = 0, 1, \ldots, k, m = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігається в області D_* до $\frac{\partial^p \gamma(t,y)}{\partial y^p}, p = 0, 1, \ldots, k$ причому $\gamma(t, 0) \equiv 0$ та $\frac{\partial \gamma(t,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = E$, (випливає безпосередньо з того, що

$$\gamma(t, y) = k(t, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m(t, y),$$

$$k(t, y) = y + \sum_{|i|=2}^{k} k_i(t) y^i,$$

$$\Gamma_m(t, y) \in \mathbb{C}^k_{D_*}, \quad m = 1, 2, \ldots).$$

Переходячи в (12)до границі при $m \to \infty$, можна переконатися, що вектор-функція $\gamma(t, y) = \lim\limits_{m \to \infty} \gamma_m(t, y)$ є розв'язком системи рівнянь (5). Теорема доведена.

Використовуючи заміну змінних $x(t) = C(t)y(t)$, вищедоведену теорему та представлення загального розв'язку системи рівнянь (4)

$$z_i(t) = |\lambda_i|^t \omega_i(t), i = 1, \ldots, n,$$

де $\omega_i(t)$ - довільні неперервні при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, що задовольняють умові.

$$\omega_i(t + 1) = \omega_i(t) sign \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

можна отримати представлення будь-якого неперервного при $t \geq 0, |y| \leq b_*$ розв'язку системи рівнянь (1) в околі тривіального розв'язку.

Література

[1] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.

[2] *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space // Amer. J. Math. – 1958. – 80. – p. 623-631

[3] *Harris Jr. W.A., Sibuya Y.* General solution of nonlinear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – 115. – P. 62-75.

[4] *Takano By. K.* General solution of a nonlinear difference equations of Briot-Bouquet type //Funkc. ekvacioj. – 1971. – 13, № 3. – P. 179-198.

[5] *Пелюх Г.П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30, №6. – С. 1083-1085.

[6] *Пелюх Г.П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Доклады Академии Наук. – 1994. – Т.336, №4. – С. 451-452.

[7] *Пелюх Г.П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, №2. – С. 304-312.

[8] *Пелюх Г.П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, №7. – С. 936-953.

[9] *Акбергенов А. А., Пелюх Г. П.* Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницевих рівнянь // Доповіді Національної академії наук України. - 2012. - № 10. - с. 7-12.