Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 128–133

УДК 517.9

О.Б. Поліщук

Національний технічний ун-т України "КПІ" , Київ;
E-mail: polya417@gmail.com

Підхід до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з від'ємним індексом

Запропоновано один підхід до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з від'ємним індексом та обгрунтовано застосування проекційно-ітеративного методу до поставленої задачі.

Proposed one approach to the solution of singular integral equations with negative index and justifies the application of the projection-iterative method to the task.

Теорія сингулярних інтегральних рівнянь становить собою розвинену галузь математики, інтерес до якої безперервно зростає, як і кількість праць, присвячених подальшому розвитку цієї теорії. В першу чергу, це пов'язано з численними застосуваннями в різних галузях математики, фізики, механіки, де задачі природним або спеціальним чином зводяться до сингулярних інтегральних рівнянь.

Оскільки сингулярні інтегральні рівняння точно розв'язні лише у виняткових випадках, в наукових дослідженнях велика увага приділяється проблемі розробки методів наближеного обчислення цього класу рівнянь. Слід зауважити, що теорія наближених методів для сингулярних інтегральних рівнянь добре вивчена [1-4], але розглядався клас рівнянь з нульовим індексом. А тому неодмінно постає питання розробки ефективних методів розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з ненульовим індексом.

В статті розглядаються сингулярні інтегральні рівняння з від'ємним індексом, встановлюється зв'язок між ними і задачею з параметрами для сингулярних інтегральних рівнянь та обгрунтовується застосування до такого класу рівнянь наближених методів проекційно-ітеративного типу.

Постановка задачі. Розглянемо сингулярне інтегральне рівняння

$$(Ax)(t) = f(t), \tag{1}$$

де

$$(Ax)(t) = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)ctg\frac{\tau - t}{2}dt + \int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Будемо вважати, що: 2π — періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера, причому $a^2(t) + b^2(t) = 1 \quad \forall \quad t \in \in [-\pi,\pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(t,\ \tau)|^2 dtd\tau < \infty$, $f \in L_2[-\pi,\pi]$.

Припустимо, що одиниця — регулярне значення ядра $k(t,\tau)$, а індекс рівняння (1) $\mathbf{k} < 0$, де

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\arg\frac{a(t) - ib(t)}{a(t) + ib(t)}. \tag{2}$$

В цьому випадку, як відомо [5], неоднорідне рівняння (1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли права частина $f(t)$ задовольняє $-\mathbf{k}$ умов

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(t)f(t)dt, \quad k = \overline{1,l}, \quad l = -k,$$

де $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^{l}$ — повна система лінійно незалежних розв'язків союзного однорідного рівняння $(A'\psi)(t) = 0$.

Зведення рівняння (1) до рівняння Фредгольма. З метою зведення рівняння (1) до рівняння Фредгольма використаємо правий еквівалентний регуляризатор оператора A вигляду

$$(Ry)(t) = a(t)y(t) - \frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\tau)\ ctg\frac{\tau - t}{2}d\tau.$$

Зробивши заміну $x(t) = (Ry)(t)$ і, беручи до уваги властивість еквівалентного регуляризатора [5]:

$$AR = I - T, \tag{3}$$

рівняння (1) зводиться до рівняння з компактним оператором T вигляду

$$y(t) = (Ty)(t) + f(t). \tag{4}$$

З теорії сингулярних інтегральних рівнянь [5] випливає, що індекс регуляризатора $R : \mathbf{k}_1 > 0$, а це означає, що існують лінійно незалежні розв'язки $y_j(t),\ j = \overline{1, k_1}$ рівняння $(Ry)(t) = 0$. На основі цього факту і (3) приходимо до висновку, що $(Ty_j)(t) = y_j(t),\ j = \overline{1, k_1}$ тобто одиниця — власне значення оператора T і рівняння (4) — це рівняння на спектрі.

В цьому випадку побудову розв'язку рівняння (4) можна замінити відшуканням розв'язку задачі з параметрами

$$y(t) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \xi_j(t) = (Ty)(t) + f(t),\ \Phi_s(y) = \alpha_s,\ s = \overline{1, k_1}. \tag{5}$$

Слід зауважити, що $\Phi_s(y) = \alpha_s,\ s = \overline{1, k_1}$ — деякі лінійні неперервні функціонали, і для кожного конкретного випадку їх вибір продиктовано умовами прикладної задачі.

При вдалому виборі системи лінійно незалежних функцій $\{\xi_j(t)\}_{j=1}^{l}$ задачу (5) можна звести до рівняння типу

$$\nu(t) = (L\nu)(t) + h(t), \quad \nu(t) = (Qy)(t),$$

для якого одиниця не буде власним значенням оператора L.

Приклад. Проілюструємо описаний підхід на прикладі. Розглянемо характеристичне сингулярне інтегральне рівняння

$$(Ax)(t) \equiv (\cos t)x(t) + \frac{\sin t}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) ctg \frac{\tau - t}{2} d\tau = f(t). \tag{6}$$

Індекс цього рівняння:

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arg \frac{\cos t - i \sin t}{\cos t + i \sin t} = -2.$$

Оператор A', союзний до оператора A, має вигляд

$$(A'x)(t) \equiv (\cos t)x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\tau x(\tau) ctg\frac{\tau - t}{2} d\tau.$$

Таким чином, умови розв'язності рівняння (6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t)dt = 0.$$

Візьмемо регуляризатор

$$(Ry)(t) = (\cos t)\ y(t) - \frac{\sin t}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) ctg\frac{\tau - t}{2} d\tau,$$

індекс якого, знайдений згідно з (2), $k_1 = 2 = -k$.

Отже, існують дві лінійно незалежні функції $y_1(t) = \sin t$, $y_2(t) = 1 - \cos 2t$, такі що $(Ry_1)(t) = 0,\ (Ry_2)(t) = 0$.

Зробимо заміну $x(t) = (Ry)(t)$ в (6), в результаті чого приходимо до рівняння вигляду (4). Безпосередньою перевіркою встановлено, що

$$T(\sin t) = \sin t - (AR)(\sin t) = \sin t,$$

$$T(1 - \cos 2t) = 1 - \cos 2t - (AR)(1 - \cos 2t) = 1 - \cos 2t.$$

Таким чином, одиниця — власне значення оператора T, а $\sin t$, $1 - \cos 2t$ — власні функції, що відповідають цьому власному значенню.

Розглянемо задачу з параметрами

$$(Ax)(t) + \lambda_1 \sin t + \lambda_2(1 - \cos 2t) = f(t),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} tx(t)dt = a, \quad \int_{-\pi}^{\pi} t^2 x(t)dt = b.$$

Після заміни $x(t) = (Ry)(t)$, приходимо до задачі

$$\begin{aligned} &y(t) + \lambda_1 \sin t + \lambda_2(1 - \cos 2t) = (Ty)(t) + f(t), \\ &\int_{-\pi}^{\pi} (t\cos t - 2\pi)y(t)dt = a, \quad \int_{-\pi}^{\pi} t^2(\cos t)y(t)dt = b. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут використана відома властивість [5]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)(R\psi)(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (R'\varphi)(t)\psi(t)dt,$$

де R' — оператор, союзний до оператора R, внаслідок чого $R'(t) = t\cos t - 2\pi, \quad R'(t^2) = t^2 \cos t$.

Використовуючи результати [6], задачу (7) можна звести до рівняння

$$u(t) = (Mu)(t) + g(t), \quad M = T - S, \tag{8}$$

$$(Su)(t) = \sin t \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{9}{2}\tau^2 \cos\tau - \frac{9}{\pi}\tau\cos\tau + 4\right) u(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{9}{16\pi}(1-\cos 2t)\int_{-\pi}^{\pi} \tau^2 \cos\tau u(\tau)d\tau,$$

$$g(t) = \left(\frac{9b}{2} - \frac{2a}{\pi}\right)\sin t - \frac{9b}{16\pi}(1-\cos 2t) + f(t).$$

Неважко переконатися, що

$$M(\sin t) = 0, \quad M(1-\cos 2t) = 0.$$

Таким чином, $\sin t$ і $1-\cos 2t$ не будуть власними функціями оператора M, отже, від рівняння (4) на спектрі прийшли до рівняння (8) не на спектрі.

Проекційно-ітеративний метод. До задачі (5) встановлено умови розв'язності [6] і обґрунтовано застосування до неї наближених методів. Так, згідно з проекційно-ітеративним методом, послідовні наближення будуються за формулою

$$x_k(t) = (Ry_k)(t),$$

в якій $y_k(t)$ знаходимо із задачі

$$y_k(t) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^k \xi_j(t) = u_k(t), \quad \int_{-\pi}^{\pi} (R'\eta_s)(t)y_k(t)dt = \alpha_s, \ s = \overline{1,l},$$

$$u_k(t) = z_k(t) + f(t) - (ARz_k)(t)$$

$$z_k(t) = y_{k-1}(t) + \omega_k(t).$$

Поправку $\omega_k(t)$ шукаємо у вигляді

$$\omega_k(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \zeta_i(t),$$

а невідомі коефіцієнти $a_i^k,\ i = \overline{1,n}$ визначаємо з умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(u_k - u_{k-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i \right)(t)\psi_j(t)dt = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Тут $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n,\ \{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ задані системи лінійно незалежних функцій. Початкове наближення $y_0(t)$ визначаємо із задачі (5), за умови, що $k = 0$, а функцію $u_0(t)$ задаємо довільним чином.

Література

[1] *Лучка А.Ю., Возняк Л.С.* Решение линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта проекционно-итеративным методом // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1987. — № 2. — С. 23–26.

[2] *Тихоненко Н.Я.* Методы решения задач теории аналитических функций. — Одесса: Изд-во Одес. ун-та, 1988. — 88 с.

[3] *Поліщук О.Б.* Методи розв'язання лінійних сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами // Доп. НАН України. — 1998. — № 1. — С. 48–52.

[4] *Поліщук О.Б.* Модифікований проекційно-ітеративний метод розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з параметрами та з малою нелінійністю // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, — № 3. — С. 418–422.

[5] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[6] *Поліщук О.Б.* Про один підхід при розв'язанні задачі з параметрами для сингулярних інтегральних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат.науки. — 2000. — Вип.2.