Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 147–174

УДК 517.9

***В.Г. Самойленко*[1], *Т.В. Тищук*[2], *В.В. Федоренко*[3]**

[1,2]*Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, Київ*
[1]*E-mail: valsamyul@gmail.com*
[2]*E-mail: tetyana.tyshchuk@gmail.com*
[3]*Ін-т математики НАН України, Київ*
[3]*E-mail: vfedor@imath.kiev.ua*

Унімодальні цикли неперервних відображень інтервалу

Исследуются циклы динамических систем, порожденных непрерывными отображениями отрезка $I = [0; 1]$ в себя. Доказано, что отображение $f \in C^0(I, I)$, которое имеет L-схему, т.е. три точки $a, b, c \in I$ такие, что $a < b < c$ и при этом $a = f(a), f(b) = c$, а $f(c) = a$, имеет и цикл каждого типа отображения

$$x \quad \longmapsto \quad \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Типом цикла называется циклическая перестановка, порожденная ограничением отображения на множество состоящее из точек этого цикла.

1. Вступ. Стаття присвячена динамічним системам, які породжені неперервними відображеннями замкненого інтервалу в себе.

Питання про співіснування циклів таких динамічних систем було сформульовано О.М. Шарковським у статті [1].

Інтенсивні дослідження цього питання протягом останніх 50-ти років (див., наприклад, монографії та підручники [2-6]) привели до створення нового напряму в теорії динамічних систем — комбінаторної динаміки.

2. Означення і формулювання основних результатів статті. Нагадаємо основний результат статті [1]. З цією метою сформулюємо необхідні означення.

Нехай $f \in C^0(I, I)$ – неперервне відображення замкненого інтервалу $I = [0; 1]$ в себе. Позначимо через f^i, $i \in \mathbb{N}$, i-ту ітерацію відображення f, а f^0 – тотожне відображення. Точка $x \in I$ називається періодичною відображення f, якщо існує число i таке, що $f^i(x) = x$.

Число $n = \min\{i \in \mathbb{N} | f^i(x) = x\}$ називається періодом точки x.

Множина всіх періодичних точок відображення f позначається $Per(f)$.

Послідовність $(f^i(x), \ \ i \geq 0)$, де $x \in Per(f)$ – періодична точка періоду n, називається періодичною траєкторією відображення f, а множина точок $\{f^i(x), \ \ i \geq 0\}$ – циклом періоду n відображення f.

Теорема Шарковського [1]. *Якщо $f \in C^0(I, I)$ має цикл періоду n, то воно має також і цикл періоду $n^{'}$ такого, що $n^{'} \triangleleft n$, де*

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \ \dots \ \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \ \dots \ \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \ \dots \ \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3.$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення, що має цикл періоду n і не має циклу періоду $n^{''}$, якщо $n \triangleleft n^{''}$.

Однією з основних частин оригінального доведення теореми Шарковського була наступна лема А, для формулювання якої використовується поняття L-схеми.

Означення 1. *Відображення $f \in C^0(I, I)$ має L-схему, якщо існують такі три точки $a, b, c \in I$, що $a < b < c$ і при цьому $a = f(a)$, $f(b) = c$, а $f(c) = a$.*

Лема А [1]. *Якщо відображення $f \in C^0(I, I)$ має L-схему, то воно має і цикл будь-якого періоду.*

У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами, але відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду. Тому, крім класифікації циклів за періодами, природно розглянути їх більш детальну класифікацію, а саме, за типами – циклічними перестановками. Дійсно, обмеження відображення на цикл є циклічною перестановкою, тобто f взаємно однозначно відображає на себе скінченну множину точок циклу, яка не містить власних інваріантних підмножин.

У даній статі розглядається питання про опис типів циклів, які має відображення з L-схемою.

Очевидно, що відображення $f \in C^0(I, I)$ з L-схемою може мати цикл будь-якого типу. Тому питання можна поставити ще так: яку множину типів має кожне відображення з L-схемою?

Твердження 1. *Якщо відображення $f \in C^0(I, I)$ має L-схему, то воно має і цикл кожного типу, який має так зване тент-відображення*

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Визначимо тепер клас відображень, до якого належить тент-відображення і представники якого мають ті ж самі типи циклів, що і тент-відображення.

Означення 2. *Відображення $g \in C^0(I; I)$ називаеться Λ-відображенням, якщо виконуються наступні умови:*

1) $g(0) = g(1) = 0$;

2) *існує точка a, де $0 < a < 1$, така, що $g(a) = 1$;*

3) *функція $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0; a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a; 1]$.* Зауважимо, що для Λ-відображення точки 0, a и 1 утворюють L-схему.

Твердження 2. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *π є типом деякого циклу Λ-відображення;*

2) *π є типом деякого циклу тент-відображення.*

Опишемо тепер множину всіх циклічних перестановок, які можуть бути типами циклів тент-відображення.

Означення 3. *Циклічна перестановка*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_i & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

називається опуклою вгору [7], якщо виконуються нерівності $j_i < j_{i+1}$ при $1 \leq i < \hat{i}$ та $j_i > j_{i+1}$ при $\hat{i} \leq i < n$.

Очевидно, що в цьому означенні $n > 2$, $2 \leq \hat{i} \leq n-1$ і $\pi(\hat{i}) = n$.

Множину, що складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 (які не є опуклими вгору) та всіх опуклих вгору циклічних перестановок позначимо Σ.

Легко бачити, що множина Σ містить перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & i & ... & n-1 & n \\ 2 & ... & i+1 & ... & n & 1 \end{pmatrix}$$

для будь-якого $n > 2$ і цикли саме таких типів будувались в [1], що було достатнім для доведення леми А.

Крім циклів такого типу, тент-відображення має також багато циклів періоду n інших типів. Наприклад, якщо $n > 3$ і є простим числом, то тент-відображення, що має L-схему, має також $\frac{2^n-2}{n}$ різних циклів періоду n, а не один, як це гарантовано лемою А.

Основним питанням, що досліджується у цій роботі, є доведення того, що будь-яка перестановка з множини Σ є типом деякого циклу тент-відображення.

Має місце наступне твердження.

Твердження 3. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\pi \in \Sigma$*;*

2) π *є типом деякого циклу тент-відображення.*

Об'єднаємо тепер твердження 2–3 в формі зручній для їх доведення. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\pi \in \Sigma$*;*

2) π *є типом деякого циклу тент-відображення;*

3) π *є типом деякого циклу* Λ*-відображення.*

Зауваження 1. *Відображення* $f(x)$ *та* $g(x) = 1 - f(1-x)$ *є топологічно спряженими. Це дає можливість ввести поняття "опуклої вниз" циклічної перестановки і отримати аналогічну теорему для відображень, що топологічно спряжені з тент-відображенням та топологічно спряжені з* Λ*-відображенням відносно спрягаючого гомеоморфізму* $h(x) = 1 - x$.

Дійсно, якщо відображення f має цикл, якому відповідає опукла вгору циклічна перестановка $\hat{\pi}$, то відображення g має цикл, якому відповідає опукла вниз циклічна перестановка $\check{\pi}$, тобто така, що $\check{\pi}(i) = n + 1 - \hat{\pi}(n + 1 - i)$ для довільного $1 \le i \le n$.

Зауваження 2. *У цій статті досліджуються цикли спеціального класу неперервних відображень інтервалу в себе, так званих унімодальних відображень. Графіки таких відображень мають лише 2 гілки монотонності, тому їх цикли теж можна називати унімодальними.*

Перейдемо до доведення твердження 1 і теореми 1. Оскільки доведення твердження 1 використовує частини доведення теореми 1, то воно винесено в кінець статті. Розпочнемо міркування, необхідні для доведення теореми 1. Для цього будемо використовувати більш детальну класифікацію циклів, ніж за типами.

Розглянемо спочатку приклад, який пояснює необхідність такої класифікації. Тент-відображення має два цикли періоду 3, а саме: цикл $B_1 = \{\frac{2}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{9}\}$ і цикл $B_2 = \{\frac{2}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{6}{7}\}$. Хоча вони мають однаковий тип, але точки циклів B_1 і B_2 по-різному розташовані на гілках монотонності відображення f. Цю відмінність між циклами B_1 і B_2 буде враховувати поняття моделі типу циклу.

Запропонована модель типу циклу будується лише за властивостями циклічної перестановки, а не властивостями відображення, тобто за суто комбінаторним алгоритмом. Проте, якщо відомо, що відображення є унімодальним, то модель типу циклу майже відображає періодично повторювану частину символьного коду мінімальної точки циклу, який побудовано за стандартним алгоритмом кодування траєкторій в символьній динаміці. У цьому сенсі модель типу циклу є узагальненням символьного представлення періодичної точки для унімодального відображення.

3. Моделі опуклої циклічної перестановки. Множину всіх опуклих вгору циклічних перестановок довжини n позначимо Π_n, а множину всіх опуклих вгору циклічних перестановок — за допомогою Π.

Нехай $(1,\ \pi(1),\ \ldots,\ \pi^{i-1}(1),\ \ldots,\ \pi^{n-1}(1))$ — циклічне зображення перестановки $\pi \in \Pi_n$, елементи якого перепозначимо через $r_i = \pi^{i-1}(1)$, $1 \le i \le n$. Оскільки $\pi \in \Pi_n$, то $r_{n-1} = \hat{i}$ і $r_n = n$, де $\pi(\hat{i}) = n$.

Розіб'ємо послідовність $(1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ на блоки (упорядковані послідовності чисел з дотриманням встановленого порядку) за наступним правилом: кожний блок містить елементи, які або всі менші за число r_{n-1}, або ж всі не менші за r_{n-1}. Очевидно, що блоки з непарними номерами містять лише числа, що менші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами — лише ті числа, що не менші за r_{n-1}.

У результаті циклічне представлення $(1,\ r_2,\ ...,\ r_n)$ перестановки π розбивається на блоки

$$(|\,1,\ ...,\ r_{m_1}\,|\,r_{m_1+1},\ ...,\ r_{m_1+l_1}\,|\,...\,|\,r_{m_1+l_1+...+l_{s-1}+1},\ ...$$

$$...,\ r_{m_1+l_1+...+m_s}\,|\,r_{m_1+l_1+...+m_s+1},\ ...,\ r_{m_1+l_1+...+m_s+l_s}\,|), \qquad (2)$$

де символ $|$ розділяє сусідні блоки.

Розіб'ємо тепер циклічне представлення $(1,\ r_2,\ ...,\ r_n)$ на блоки за іншим правилом

$$(|\,1,\ ...,\ r_{m'_1}\,|\,r_{m'_1+1},\ ...,\ r_{m'_1+l'_1}\,|\,...\,|\,r_{m'_1+l'_1+...+l'_{s'-1}+1},\ ...$$

$$...,\ r_{m'_1+l'_1+...+m'_{s'}}\,|\,r_{m'_1+l'_1+...+m'_{s'}+1},\ ...,\ r_{m'_1+l'_1+...+m'_{s'}+l'_{s'}}\,|), \qquad (3)$$

де блоки з непарними номерами містять лише числа, що не більші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами — лише ті числа, що більші за r_{n-1}.

Кількість блоків у рядках (2) та (3) є парною, адже $r_n = n > r_{n-1}$, тобто кожен з рядків в (2), (3) закінчується блоком з парним номером $2s$ та $2s^{'}$ відповідно.

При цьому виконуються наступні рівності:

$$\sum_{i=1}^{s}(m_i + l_i) = \sum_{i=1}^{s^{'}}(m_i^{'} + l_i^{'}) = n.$$

З чисел $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s,\ l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_s,\ m_1^{'},\ m_2^{'},\ \ldots,\ m_{s'}^{'},\ l_1^{'},\ l_2^{'},\ \ldots,\ l_{s'}^{'}$, які використовуються в (2) і (3), утворимо числові набори, тобто скінченні послідовності натуральних чисел вигляду:

$$(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s,\ l_s), \qquad (4)$$

$$(m_1^{'},\ l_1^{'},\ m_2^{'},\ l_2^{'},\ ...,\ m_{s'-1}^{'},\ l_{s'-1}^{'},\ m_{s'}^{'},\ l_{s'}^{'}), \qquad (5)$$

де числовий набір (4) відповідає рядку (2), а числовий набір (5) – рядку (3).

З побудови числового набору (4) випливає, що $l_s > 1$, а з побудови числового набору (5) слідує рівність $l_{s'}^{'} = 1$.

Наступні дві леми встановлюють зв'язок між елементами числових наборів (4) і (5).

Лема 1. *Нехай* $(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s,\ l_s)$ *– числовий набір вигляду (4) для перестановки* $\pi \in \Pi_n$. *Тоді числовий набір вигляду (5) для цієї ж перестановки наступний:*

1) $(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s+1,\ 1)$, *якщо* $l_s = 2$*;*

2) $(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s,\ l_s-2,\ 1,\ 1)$, *якщо* $l_s > 2$.

Доведення леми 1. Побудуємо числовий набір (5) за відомим числовим набором (4).

Розглянемо випадок, коли $s > 1$. Оскільки числові набори (4) і (5) побудовані для однієї й тієї ж перестановки, то довжини блоків у відповідних їм рядках (2) і (3) з номерами від 1 до $s-1$ однакові. Звідси випливає, що $m_i^{'} = m_i$, $l_i^{'} = l_i$, де $1 \leq i \leq s-1$.

Тоді якщо $l_s = 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Тоді, враховуючи рівність $r_n = n$, при побудові числового набору (5) мають місце нерівності $r_{n-2} < r_{n-1}$, $r_{n-1} \leq r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (4), числовий набір (5) можна записати у вигляді $(m_1, l_1, m_2, l_2, ..., m_{s-1}, l_{s-1}, m_s+1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = s$.

Якщо ж $l_s > 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} > r_{n-1}$. Враховуючи рівність $r_n = n$, знаходимо, що при побудові числового набору (5) мають місце нерівності $r_{n-2} > r_{n-1}$, $r_{n-1} \leq r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (4), числовий набір (5) можна записати у вигляді $(m_1, l_1, m_2, l_2, ..., m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s-2, 1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = s+1$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s = 1$. Якщо $l_1 = 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Тоді виконуються ті самі співвідношення між r_{n-2}, r_{n-1} та r_n, що й для випадку $s > 1$, отже, побудований за відомим числовим набором (4), числовий набір (5) можна представити у вигляді $(m_1+1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає, що виконується рівність $s^{'} = 1$.

Якщо ж $l_1 > 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} \geq r_{n-1}$. Тоді виконуються ті самі співвідношення між r_{n-2}, r_{n-1} та r_n, що й для випадку $s > 1$, отже, побудований за відомим числовим набором (4), числовий набір (5) можна записати у вигляді $(m_1, l_1-2, 1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = 2$.

Лему 1 доведено.

Має місце аналогічне лемі 1 твердження стосовно числового набору (5).

Лема 2. *Нехай* $(m_1^{'},\ l_1^{'},\ m_2^{'},\ l_2^{'},\ ...,\ m_{s'-1}^{'},\ l_{s'-1}^{'},\ m_{s'}^{'},\ 1)$ *– число-*

вий набір вигляду (5) для перестановки $\pi \in \Pi_n$. *Тоді числовий набір вигляду (4) для цієї ж перестановки наступний:*

1) $(m_1^{'},\ l_1^{'},\ m_2^{'},\ l_2^{'},\ ...,\ m_{s'-1}^{'},\ l_{s'-1}^{'}+2)$, *якщо* $m_{s'}^{'}=1$;

2) $(m_1^{'},\ l_1^{'},\ m_2^{'},\ l_2^{'},\ ...,\ m_{s'-1}^{'},\ l_{s'-1}^{'},\ m_{s'}^{'}-1,\ 2)$, *якщо* $m_{s'}^{'}>1$.

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1.

Означення 4. *Скінченну послідовність символів* $B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-1},\ \beta_n)$ *назвемо періодичною, якщо існує таке натуральне число* s, *що її можна представити у вигляді*

$$B_n = (\underbrace{B_s,\ B_s,\ ...\ B_s,\ B_s}_{p}), \tag{6}$$

де $B_s = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{s-1},\ \beta_s)$, $\quad n = ps$.

Означення 5. *Якщо числовий набір (4), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π, *не є періодичним, то (4) називається м-моделлю перестановки* π. *Аналогічно, якщо числовий набір (5), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π, *не є періодичним, то (5) називається р-моделлю перестановки* π.

Умова неперіодичності в означенні 5 є суттєвою. Для того, щоб це пояснити, розглянемо декілька прикладів. Почнемо з найпростішого.

Приклад 1. Нехай $c,\ \alpha_i \in I$, де $1 \le i \le 4$, $i \in \mathbb{N}$, – довільні фіксовані числа для яких виконуються нерівності $0 < \alpha_1 < c < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1$. Побудуємо кусково-лінійне Λ-відображення $g_1 \in C^0(I,I)$, що є лінійним на кожному з інтервалів, кінцями яких є сусідні точки, і дія якого на фіксованих точках інтервалу I здійснювалася за правилом: $g_1|_{\{c,\ \alpha_i,\ 1\le i\le 4\}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$.

Так побудоване відображення g_1 має два цикли періоду 2 однакового типу: $A_1 = \{\alpha_1,\ \alpha_4\}$ і $A_2 = \{\alpha_2,\ \alpha_3\}$. Цикли вигляду A_2 властиві монотонним відображенням і не обов'язково реалізуються для унімодального відображення, зокрема, для тент-відображення, бо точки циклу розташовані на інтервалі монотонності відображення g_1. Крім того, друга ітерація цього відображення g_1^2 має інтервал нерухомих точок $[\alpha_2;\ \alpha_3]$, тоді як у тент-відображення немає інтервалів нерухомих чи періодичних точок.

Приклад 2. Нехай $c,\ \beta_i \in I$, де $1 \le i \le 8$, $i \in \mathbb{N}$, – довільні числа для яких виконуються нерівності $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < c < \beta_4 < \beta_5 < \beta_6 < \beta_7 < \beta_8 < 1$. Побудуємо кусково-лінійне Λ-відображення $g_2 \in C^0(I, I)$, що є лінійним на кожному з інтервалів, кінцями яких є сусідні точки, дія якого на фіксованих точках інтервалу I здійснювалася за правилом: $g_2|_{\{c,\ \beta_i,\ 1\le i\le 8\}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & c & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & 1 & \beta_8 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$.

Так побудоване відображення g_2 має два цикли періоду 4 однакового типу з циклічним представленням (1, 3, 2, 4): $B_1 = \{\beta_1, \beta_5, \beta_4, \beta_8\}$ і $B_2 = \{\beta_2, \beta_6, \beta_3, \beta_7\}$.

М-модель типу циклу для циклу B_1 має вигляд (1, 3).

Числовий набір (1, 1, 1, 1), який побудовано з використанням правила "менше або дорівнює", не є р-моделлю жодного з цих циклів, відповідно до властивості його періодичності.

Числовий набір (1, 1, 1, 1) відповідає за розташування точок циклу B_2 відносно точки c. Циклу такого вигляду немає у тент-відображення, бо четверта ітерація цього відображення g_2^4 має інтервали нерухомих точок $[\beta_2;\ \beta_3]$ і $[\beta_6;\ \beta_7]$.

Числовий набір (1, 1, 1, 1) не є р-моделлю типу циклу з міркувань символьної динаміки. Дійсно, що в символьній динаміці елементи траєкторії точки x кодуються наступним чином: точці $g_2^i(x)$ ставиться у відповідність 0, якщо $g_2^i(x) \in [0;\ c]$, і 1, якщо $g_2^i(x) \in [c;\ 1]$. Тому точці β_2 циклу B_2 відповідає символьна послідовність $(0101\ldots01\ldots)$, в той же час як ця символьна послідовність відповідає періодичній точці періоду 2, що знаходиться на інтервалі $(\beta_2;\ \beta_3)$.

Приклад 3. У попередньому прикладі опукла вгору циклічна перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ мала м-модель, але не мала р-модель. Навпаки, опукла вгору циклічна перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ з циклічним представленням (1, 5, 4, 7, 2, 6, 3, 8) не має м-моделі і має р-модель: (1, 3, 1, 1, 1, 1).

Приклад 4. Опукла вгору циклічна перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ одночасно має як м-модель — (1, 2), так і р-модель — (2, 1).

Приклади 2–4, зокрема, демонструють, що опукла вгору циклічна перестановка може мати або тільки м-модель, або тільки р-модель, або одночасно м-модель та р-модель.

У наступному розділі доводиться, що опукла перестановка має хоча б одну модель.

4. Існування моделі опуклої вгору перестановки. Щоб довести, що перестановка $\pi \in \Pi_n$ має хоча б одну модель, достатньо, використовуючи леми 1 і 2 про зв'язок між числовими наборами (4) і (5) для перестановки π, показати наступне:

1) якщо числовий набір (4) є періодичною послідовністю в розумінні означення 4, то числовий набір (5) не є періодичною послідовністю;

2) якщо числовий набір (5) є періодичною послідовністю, то числовий набір (4) не є періодичною послідовністю.

Ці два твердження описують властивості специфічних періодичних послідовностей і тому їх можна розглядати окремо від властивостей опуклих перестановок, а саме: як комбінаторні властивості періодичних послідовностей.

Доповнимо поняття періодичної послідовності (означення 4) поняттям періоду цієї послідовності.

Означення 6. *Послідовність чисел*

$$B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_{n-1},\ \beta_n)$$

називається періодичною, якщо виконуються наступні умови:

1) існує таке число $s > 1$, де $s \in \mathbb{N}$ – дільник числа n і $n = ps$, що для довільних чисел $1 \le i \le s$, $1 \le k \le p-1$ має місце рівність $\beta_{sk+i} = \beta_i$;

2) для довільного числа $s_1 < s$, де $s_1 \in \mathbb{N}$, існують такі числа i_0, k_0, де $1 \le i_0 \le s_1$, $1 \le k_0 \le p_1 - 1$, що виконується нерівність $\beta_{s_1 k_0 + i_0} \ne \beta_{i_0}$.

Число s називається періодом послідовності B_n.

З означення 6, зокрема, випливає, що послідовність B_n є неперіодичною, якщо для довільного числа $s^{'}$ – дільника числа n існують такі числа $1 \le i_0 \le s^{'}$ і $1 \le j_0 \le p^{'} - 1$, де $n = s^{'}p^{'}$, що виконується нерівність $\beta_{s' j_0 + i_0} \ne \beta_{i_0}$.

Мають місце наступні леми.

Лема 3. *Якщо послідовність $B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},\ 2)$ є періодичною, то послідовність $B_n^{'} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1}+1,\ 1)$ не є періодичною.*

Доведення леми 3. Для довільного дільника $s^{'}$ числа n доведемо, що числова послідовність $B_n^{'}$ не є періодичною з періодом $s^{'}$.

Оскільки послідовність B_n є періодичною, то існує такий період цієї послідовності $s \in \mathbb{N}$, де $n = sp$, що її можна представити у вигляді (6), де $B_s = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{s-1},\ 2)$.

Використовуючи зображення (6) послідовності B_n, її можна представити у вигляді таблиці

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & ..., & \beta_{s-1}, & 2, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & ..., & \beta_{s+s-1}, & 2, \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & ..., & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 2, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & ..., & \beta_{s(p-1)+s-1}, & 2 \end{pmatrix},$$

де s — кількість стовпців таблиці, а p — кількість рядків таблиці, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Доведемо, що послідовність $B_n^{'} = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1}+1,\ 1)$ не є періодичною. Від супротивного, припустимо, що $B_n^{'}$ — періодична послідовність.

Розглянемо два випадки залежно від того число n просте чи складене.

Якщо число n просте, то для елементів періодичної послідовності B_n мають місце рівності $\beta_i = 2$, де $1 \le i \le n-1$, оскільки $\beta_n = 2$.

З іншого боку, для періодичної послідовності $B_n^{'}$, використовуючи рівність $\beta_n = 1$, отримуємо рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-2$, і $\beta_{n-1} = 0$.

Отже, одержали суперечність, тобто якщо n просте число, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число n складене. Нехай $s^{'}$ – довільний дільник числа n такий, що $s^{'}p^{'} = n$, є періодом періодичної числової послідовності $B_n^{'}$.

Розіб'ємо доведення на три частини залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s^{'} < s$;

2) $s^{'} = s$;

3) $s^{'} > s$.

Розглянемо випадок, коли $s^{'} < s$. Нехай спочатку $s^{'} = 2$. Тоді число s можна записати у вигляді $s = 2m + l$, де $1 \le l \le 2$, $0 \le m \le p^{'} - 1$. Розглянемо всі можливі значення числа l. Нехай $l = 1$. Тоді послідовність $B_n^{'}$ можна представити у вигляді таблиці:

$$B_n^{'} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, \\ ... & ... \\ \beta_{s-2}, & \beta_{s-1}, \\ 2, & \beta_{s+1}, \\ ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+s-2}, & \beta_{s(p-2)+s-1}, \\ 2, & \beta_{s(p-1)+1}, \\ ... & ... \\ \beta_{s(p-1)+s-3}, & \beta_{s(p-1)+s-2}, \\ \beta_{s(p-1)+s-1}+1, & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-2} = \beta_{s(p-2)+s-2}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = 2$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{2k+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le 2$, $0 \le k \le p^{'} - 2$ і $\beta_{2(p^{'}-1)+1} + 1 = \beta_1$, $\beta_{2p^{'}} = \beta_2$.

Використовуючи зображення (7) періодичної послідовності $B_n^{'}$, отримаємо наступні співвідношення $\beta_{2k+1} = 2$, $\beta_{2k+2} = 1$, де $0 \le k \le p^{'} - 2$ і $\beta_{2(p^{'}-1)+1} = 1$. Оскільки виконуються рівності $s = 2m+1$, $p = \frac{n}{2m+1}$, $2p^{'} = n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-2} = \beta_{s(p-2)+s-2}$ еквівалентна такій $\beta_{2(p^{'}-1)} = \beta_{2(p^{'}-m-2)+1}$. Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{2(p^{'}-1)} = 1$, $\beta_{2(p^{'}-m-2)+1} = 2$.

Отже, маємо суперечність, тобто, якщо період послідовності B_n можна подати у вигляді $s = 2m+1$, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом 2.

Нехай $l = 2$. Тоді послідовність $B_n^{'}$ можна представити у вигляді таблиці:

$$B_n^{'} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, \\ ... & ... \\ \beta_{s-3}, & \beta_{s-2}, \\ \beta_{s-1}, & 2, \\ ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+s-3}, & \beta_{s(p-2)+s-2}, \\ \beta_{s(p-2)+s-1}, & 2, \\ ... & ... \\ \beta_{s(p-1)+s-3}, & \beta_{s(p-1)+s-2}, \\ \beta_{s(p-1)+s-1}+1, & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Якщо $s^{'} = 2$ – період послідовності $B^{'}_n$, то виконуються рівності $\beta_{2k+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le 2$, $0 \le k \le p^{'} - 2$ і $\beta_{2(p'-1)+1} + 1 = \beta_1$, $\beta_{2p'} = \beta_2$.

Використовуючи зображення (8) послідовності $B^{'}_n$, отримуємо, зокрема, наступні співвідношення $\beta_{2p'} = 1$, $\beta_{2(p'-m)} = 2$. Але згідно з властивістю періодичності $B^{'}_n$ виконується рівність $\beta_{2p'} = \beta_{2(p'-m)}$.

Таким чином, маємо суперечність, тобто, якщо період послідовності B_n можна подати у вигляді $s = 2(m+1)$, то послідовність $B^{'}_n$ неперіодична з періодом 2.

Аналогічно попереднім міркуванням доводиться, що довільний дільник $s^{'}$ числа n, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, не є періодом числової послідовності $B^{'}_n$.

Нехай $s^{'} = q$ – довільний дільник числа n, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, і q є періодом періодичної послідовності $B^{'}_n$. Тоді число s можна представити у вигляді $s = qm + l$, де $1 \le l \le q$, $0 \le m \le p^{'} - 1$. Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме випадок $1 \le l < q$ та $l = q$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1 \le l < q$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B^{'}_n$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p'-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$.

Оскільки виконуються рівності $s = qm + l$, $qp^{'} = n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p'-1)} = \beta_{q(p'-m-1)-l}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B^{'}_n$ виконуються рівності $\beta_{q(p'-1)} = 1$, $\beta_{q(p'-m-1)-l} = 2$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо період послідовності B_n можна записати у вигляді $s = qm + l$, де $1 \le l < q$, то послідовність $B^{'}_n$ неперіодична з періодом q.

Нехай $l = q$. Якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B^{'}_n$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p'-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp'} = 1$, $\beta_{q(p'-m)} = 2$.

Але згідно з властивістю періодичності $B^{'}_n$ виконується рівність $\beta_{qp'} = \beta_{q(p'-m)}$. Отже, одержали суперечність, тобто якщо період послідовності B_n можна представити у вигляді $s = q(m+1)$, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом q.

Використовуючи попередні викладки, маємо, що послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність що $s^{'} < s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s^{'} = s$. Послідовність $B_n^{'}$ можна представити у вигляді таблиці:

$$B_n^{'} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & ..., & \beta_{s-1}, & 2, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & ..., & \beta_{s+s-1}, & 2, \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & ..., & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 2, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & ..., & \beta_{s(p-1)+s-1}+1, & 1 \end{pmatrix},$$

де $s = s^{'}$ – кількість стовпців таблиці, а $p = p^{'}$ – кількість рядків таблиці.

Оскільки послідовність $B_n^{'}$ періодична з періодом $s^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{s^{'}k+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s^{'}$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = s^{'}k - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{s^{'}k(p^{'}-1)+s^{'}k-1} + 1 = \beta_{s^{'}k-1}$. Зокрема, виконуються співвідношення $\beta_{s^{'}p^{'}} = 1$, $\beta_{s^{'}(p^{'}-1)} = 2$.

Таким чином, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'} = s$.

Розглянемо останній випадок, коли $s^{'} > s$. Аналогічно попереднім міркуванням доведемо, що довільний дільник $s^{'}$ числа n, для якого виконується нерівність $s^{'} > s$, не є періодом числової послідовності $B_n^{'}$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто нехай $s^{'} = q$ – довільний дільник числа n, для якого $q > s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_n^{'}$. Тоді число q можна записати у вигляді $q = sm + l$, де $1 \le l \le s$, $0 \le m \le p - 1$. Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме: випадок $1 \le l < s$ та $l = s$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1 \le l < s$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$. Оскільки виконуються рівності $q = sm + l$, $qp^{'} = n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{q(p^{'}-1)-s}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-1)-s} = 2$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо період послідовності $B_n^{'}$ можна подати у вигляді $q = sm + l$, де $1 \leq l < s$, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом q.

Нехай тепер $l = s$. Якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \leq i \leq q$, $0 \leq k \leq p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp^{'}} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-1)} = 2$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконується рівність $\beta_{qp^{'}} = \beta_{q(p^{'}-1)}$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо період послідовності $B_n^{'}$ можна представити у вигляді $q = s(m + 1)$, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом q.

Таким чином, послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з довільним періодом $s^{'}$, для якого $s^{'} > s$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Якщо послідовність*

$$B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},\ \beta_n),$$

де $\beta_n > 2$, *є періодичною, то послідовність*

$$B_{n+2}^{'} = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},\ \beta_n - 2,\ 1,\ 1)$$

не є періодичною.

Доведення леми 4. Для довільного дільника $s^{'}$ числа $n + 2$ доведемо, що числова послідовність $B_{n+2}^{'}$ не є періодичною з періодом $s^{'}$.

Оскільки послідовність B_n періодична, то існує такий період цієї послідовності $s \in \mathbb{N}$, де $n = ps$, що її можна записати у вигляді (6), де $B_s = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{s-1},\ \beta_s)$, $\beta_s > 2$.

Використовуючи зображення (6) послідовності B_n, її можна представити у вигляді таблиці

$$B_n = \left(\begin{array}{lllll} \beta_1, & \beta_2, & ..., & \beta_{s-1}, & \beta_s, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & ..., & \beta_{s+s-1}, & \beta_s, \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & ..., & \beta_{s(p-2)+s-1}, & \beta_s, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & ..., & \beta_{s(p-1)+s-1}, & \beta_s \end{array} \right),$$

де s – кількість стовпців таблиці, p – кількість рядків таблиці, а $\beta_s > 2$, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Покажемо, що послідовність

$$B'_{n+2} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \dots \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},\ \beta_n - 2,\ 1,\ 1)$$

не є періодичною. Для цього скористаємося методом доведення від супротивного, припустивши, що B'_{n+2} – періодична послідовність.

Розглянемо два випадки, залежно від того: число $n+2$ просте чи складене.

Якщо число $n+2$ просте, то для елементів періодичної послідовності B'_{n+2} мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-1$, і $\beta_n = 3$, оскільки $\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = 1$. З іншого боку, для періодичної послідовності B_n, використовуючи рівність $\beta_n = 3$, отримаємо рівності $\beta_{sk+s} = 3$, де $0 \le k \le p-1$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо $n+2$ просте число, то послідовність B'_{n+2} неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число $n+2$ складене. Нехай s' – довільний дільник числа $n+2$, такий, що $s'p' = n+2$, є періодом періодичної числової послідовності B'_{n+2}. Розіб'ємо доведення на три частини, залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s' < s$;
2) $s' = s$;
3) $s' > s$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s' < s$ і поважемо, що довільний дільник s' числа $n+2$, для якого виконується нерівність $s' < s$, не є періодом числової послідовності B'_{n+2}.

Позначимо $s' = q$ – довільний дільник числа $n+2$, для якого $s' < s$, і q є періодом періодичної послідовності B'_{n+2}. Оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s' = q$ – період послідовності B'_{n+2}, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p'-1$, окрім пари значень $k = p'-1$ та $i = q-2$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p'-1)+q-2} - 2 = \beta_{q-2}$.

Оскільки виконуються рівності $sp = n$, $qp' = n+2$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p'-1)-2} = \beta_{q(p'-1)-s-2}$. Але згідно з властивістю періодичності B'_n виконуються рівності $\beta_{q(p'-1)-2} = \beta_{qp'-2} = \beta_{n-2} + 2$, $\beta_{q(p'-1)-s-2} = \beta_{qp'-s-2} = \beta_{n-s-2} = \beta_{n-2}$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність B'_{n+2} неперіодична з періодом s', для якого $s' < s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s' = s$. З рівностей $ps = n$,

$s^{'}p^{'} = n+2$, отримуємо, що $s^{'} = s = 2$. Тоді для послідовності $B^{'}_{n+2}$ мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \leq i \leq n-1$, і $\beta_n = 3$, оскільки $\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = 1$. З іншого боку, для періодичної послідовності B_n, використовуючи рівність $\beta_n = 3$, отримуємо рівності $\beta_{sk+s} = 3$, де $0 \leq k \leq p-1$. Отже, знову маємо суперечність, тобто послідовність $B^{'}_n$ неперіодична з періодом $s^{'} = s$.

Останній випадок, коли $s^{'} > s$, розглядається аналогічно. Доводиться, що довільний дільник $s^{'}$ числа n, для якого $s^{'} > s$, не є періодом числової послідовності $B^{'}_n$.

Лему 4 доведено.

Мають місце наступні твердження, які аналогічні лемам 3 і 4.

Лема 5. *Якщо послідовність*
$$B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_{n-3},\ \beta_{n-2},\ 1,\ 1)$$
є періодичною, то послідовність
$$B^{'}_{n-2} = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_{n-3},\ \beta_{n-2}+2)$$
не є періодичною.

Лема 6. *Якщо послідовність*
$$B_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},\ 1),$$
де $\beta_{n-1} > 1$, *є періодичною, то послідовність*
$$B^{'}_n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1}-1,\ 2)$$
не є періодичною.

Доведення лем 5 і 6 виконується за допомогою міркувань, що аналогічні тим, які використано при доведенні лем 3 і 4.

З властивостей періодичних послідовностей, які описано в лемах 3–6, випливає наступна властивість опуклих вгору циклічних перестановок.

Твердження 4. *Числові набори (4) і (5) для опуклої вгору циклічної перестановки одночасно не є періодичними послідовностями.*

Доведення твердження 4. Припустимо, що числовий набір вигляду (4) є періодичною послідовністю. Використовуючи лему 1, розглянемо два випадки, залежно від значення елемента l_s.

Якщо $l_s = 2$, то числовий набір вигляду (5) записується наступним чином $(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s+1,\ 1)$. Тоді за лемою 3 такий числовий набір вигляду (5) не є періодичним.

Якщо $l_s > 2$, то числовий набір вигляду (5) записується наступним чином $(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ ...,\ m_{s-1},\ l_{s-1},\ m_s,\ l_s-2,\ 1,\ 1)$. Тоді за лемою 4 такий числовий набір вигляду (5) не є періодичним.

Припустимо, що числовий набір вигляду (5) є періодичною послідовністю. Використовуючи лему 2, розглянемо два випадки, залежно від значення елемента $m'_{s'}$.

Якщо $m'_{s'} = 1$, то числовий набір вигляду (4) записується наступним чином $(m'_1,\ l'_1,\ m'_2,\ l'_2,\ ...,\ m'_{s'-1},\ l'_{s'-1} + 2)$. Тоді за лемою 5 такий числовий набір вигляду (4) не є періодичним.

Якщо $m'_{s'} > 1$, то числовий набір вигляду (4) записується наступним чином $(m'_1,\ l'_1,\ m'_2,\ l'_2,\ ...,\ m'_{s'-1},\ l'_{s'-1},\ m'_{s'} - 1,\ 2)$. Тоді за лемою 6 такий числовий набір вигляду (4) не є періодичним.

Твердження 4 доведено.

5. Вага опуклої вгору циклічної перестановки. У подальшому використовується поняття моделі і ваги опуклої вгору циклічної перестановки.

Означення 7. *Вагою числового набору*

$$(m_1, l_1, m_2, l_2,\ \ldots\ , m_s, l_s)$$

називаеться число

$$\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j}\ 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j} (1 - (-2)^{l_i})}{1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i}\ 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}. \tag{9}$$

Наступна лема обґрунтовує необхідність неперіодичності числового набору в означенні моделі опуклої циклічної перестановки.

Лема 7. *Ваги числових наборів*

$$B_k = (m_1, l_1, m_2, l_2,\ \ldots\ , m_k, l_k)$$

та $B_s = (\underbrace{B_k,\ B_k,\ \ldots B_k,\ B_k}_{p})$, *де* $s = kp$, *однакові.*

Доведення леми 7. З конструкції числового набору B_s випливає, що для його елементів виконується наступна умова: для довільних чисел $1 \le i \le k$, $1 \le j \le p-1$ мають місце рівності $m_{jk+i} = m_i$, $l_{jk+i} = l_i$.

Згідно означення (7) вага числового B_s набору визначається за його елементами формулою

$$\sigma(B_s) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j} \, 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j} (1 - (-2)^{l_i})}{1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i} \, 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i = p \sum\limits_{i=1}^{k} l_i$ і $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = p \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, то знаменник в формулі для $\sigma(B_s)$ можна записати таким чином:

$$1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i} = 1 - \left((-2)^{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i} \right)^p =$$

$$= \left(1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i} \right) \sum_{i=1}^{p} \left((-2)^{\sum\limits_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-i}.$$

Аналогічно, скориставшись тепер тим, що $s = kp$ та виконуються рівності $m_{jk+i} = m_i$ і $l_{jk+i} = l_i$ при $1 \le i \le k$ та $1 \le j \le p-1$ розкладемо чисельник в формулі для $\sigma(B_s)$ на множники наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{s} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j} (1 - (-2)^{l_i}) =$$

$$= \left((-2)^{\sum\limits_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-1} \left((-2)^{\sum\limits_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=2}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_1}) + \right.$$

$$+ (-2)^{\sum\limits_{j=3}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=3}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_2}) + \ ...$$

$$\left. ... + (-2)^{l_k} 2^{m_k} (1 - (-2)^{l_{k-1}}) + (1 - (-2)^{l_k}) \right) +$$

$$+ \left((-2)^{\sum\limits_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-2} \left((-2)^{\sum\limits_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=2}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_1}) + \ ... \right.$$

$$\left. ... + (1 - (-2)^{l_k}) \right) + ... \ + \left((-2)^{\sum\limits_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=2}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_1}) + \ ... \right.$$

$$... + (-2)^{l_s} 2^{m_k} (1 - (-2)^{l_{k-1}}) + (1 - (-2)^{l_k}) \Bigg) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_i}) \right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{p} \left((-2)^{\sum\limits_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-i}.$$

Скоротивши чисельник і знаменник дробу, з якого визначається $\sigma(B_s)$, на вираз $\sum\limits_{i=1}^{p} \left((-2)^{\sum\limits_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-i}$, отримаємо, що

$$\sigma(B_s) = \sigma(B_k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{k} l_j} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{k} m_j} (1 - (-2)^{l_i}))}{1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}}.$$

Лему 7 доведено.

В означенні 5 визначено поняття м-моделі та р-моделі опуклої циклічної перестановки. Оскільки м-модель і р-модель — це числові неперіодичні набори, то для них можна визначити поняття ваги моделі та поставити у відповідність опуклій циклічній перестановці тільки одну модель.

Означення 8. *Моделлю опуклої циклічної перестановки називається та модель з м-моделі або р-моделі, яка має більшу вагу. Відповідно, вага цієї моделі називається вагою перестановки.*

Вага опуклої циклічної перестановки π позначається σ_π.

Скористаємося отриманими властивостями опуклих вгору циклічних перестановок для дослідження циклів неперервних відображень інтервалу.

6. Інтерпретація поняття ваги перестановки з точки зору одновимірної динаміки. Геометричний зміст ваги пояснює наступна лема.

Лема 8. *Нехай* $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ \dots \ , m_s, l_s)$ — *модель опуклої циклічної перестановки* π. *Тент-відображення має цикл типу* π, *координата мінімальної точки* α *якого дорівнює:*

$$\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j}\,2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i}\,2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}.$$

Доведення леми 8. Запишемо тент-відображення у наступному вигляді:

$$x \longmapsto \begin{cases} f_1 = 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ f_2 = -2x+2, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Це відображення має наступні властивості:

1) $f_1([0;\frac{1}{2}]) = [0;1] = f_2([\frac{1}{2};1])$;

2) інтервал $[0;1]$ можна подати як об'єднання інтервалів вигляду $M_m = [\frac{1}{2^{m+1}};\frac{1}{2^m}]$, $m = 0,1,2,...$, де $f_1^m(M_m) = [\frac{1}{2};1]$;

3) інтервал $[0;1]$ можна подати як об'єднання інтервалів вигляду $L_l, l = 0,1,2,...$, де $L_l = [x_l; x_{l+2}]$ при парних значеннях l та $L_l = [x_{l+2}; x_l]$ при непарних значеннях l, де $x_l = \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^l)$ і при цьому $f_2^l(L_l) = [0;\frac{1}{2}]$.

З властивостей 1)-3) тент-відображення випливає, що для будь-якого набору натуральних чисел $(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, \ \dots \ , m_{s^{'}}^{'}, l_{s^{'}}^{'})$ існує така точка $x^{'} \in [0;\frac{1}{2}]$, що її координату для $n^{'}$-ої ітерації тент-відображення, де $n^{'} = \sum\limits_{i=1}^{s^{'}}(m_{i^{'}} + l_i^{'})$, можна записати наступним чином:

$$f_2^{l_{s^{'}}^{'}}(f_1^{m_{s^{'}}^{'}}(...(f_2^{l_2^{'}}(f_1^{m_2^{'}}(f_2^{l_1^{'}}(f_1^{m_1^{'}}(x^{'})))))...)). \tag{10}$$

Дійсно, розглянемо інтервал $M_{m_1^{'}}$. З властивостей 2), 3) випливають наступні рівності $f_1^{m_1^{'}}(M_{m_1^{'}}) = [\frac{1}{2};1] = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} L_l$. Звідси, враховуючи лінійність f_1, знаходимо, що існує єдиний замкнений підінтервал інтервалу $M_{m_1^{'}}$, який позначимо $M_{m_1^{'}l_1^{'}}$, для якого виконується умова $f_1^{m_1^{'}}(M_{m_1^{'}l_1^{'}}) = L_{l_1^{'}}$.

З властивостей 2)–3) отримуємо, що виконуються наступні рівності $f_2^{l_1'} \circ f_1^{m_1'}(M_{m_1' l_1'}) = [0; \frac{1}{2}] = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} M_m$. Звідси випливає існування єдиного замкненого підінтервалу інтервалу $M_{m_1' l_1'}$, який позначимо $M_{m_1' l_1' m_2'}$, для якого виконується умова $f_2^{l_1'} \circ f_1^{m_1'}(M_{m_1' l_1' m_2'}) = M_{m_2'}$.

Повторюючи міркування для інтервалу $M_{m_1' l_1' m_2'}$ аналогічні тим, які проведено стосовно інтервалу $M_{m_1'}$, показуємо існування такого замкненого інтервалу, для кожної точки x' якого має місце (10).

Перетворимо формулу (10), використовуючи аналітичні формули відображень f_1 і f_2. Очевидно, що для довільних m і l мають місце наступні рівності:

$$f_1^m(x) = 2^m x, \quad f_2^l(x) = (-2)^l x + \frac{2}{3}(1 - (-2)^l). \tag{11}$$

З (11) випливає, що (10) записується таким чином:

$$f_2^{l_{s'}'}(f_1^{m_{s'}'}(...(f_2^{l_2'}(f_1^{m_2'}(f_2^{l_1'}(f_1^{m_1'}(x')))))...)) =$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{s'} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s'} l_j'} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s'} m_j'} (1 - (-2)^{l_i'}) + (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s'} l_i'} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s'} m_i'} x'. \tag{12}$$

З (12) випливає, що точка x', що значення якої визначено формулою

$$x' = \frac{2}{3} \; \frac{\sum\limits_{i=1}^{s'} (-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s'} l_j'} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s'} m_j'} (1 - (-2)^{l_i'})}{1 - (-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s'} l_i'} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s'} m_i'}},$$

є періодичною точкою тент-відображення, причому єдиною точкою, що відповідає довільному числовому набору $(m_1', l_1', m_2', l_2', \ \ldots \ , m_{s'}', l_{s'}')$, бо рівняння для її знаходження, складене на основі формули (12), є лінійним.

Період цієї точки є дільником числа n', а інші точки циклу, якому вона належить, містяться в інтервалах $M_{m'}$ і $L_{l'}$ з відповідними індексами, які визначаються елементами числового набору $(m_1', l_1', m_2', l_2', \ldots , m_{s'}', l_{s'}')$.

Нехай $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ \dots\ , m_s, l_s)$ — модель опуклої циклічної перестановки π, а $n = \sum\limits_{i=1}^{s}(m_i+l_i)$. Згідно з означенням 3 для перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_i & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

виконуються нерівності $j_i < j_{i+1}$ при $1 \le i < \hat{i}$ та $j_i > j_{i+1}$ при $\hat{i} \le i < n$, при цьому $n > 2$, $2 \le \hat{i} \le n-1$ та $\pi(\hat{i}) = n$.

Не втрачаючи загальності, припустимо, що модель $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ \dots\ , m_s, l_s)$ перестановки π є м-моделлю (доведення для випадку р-моделі проводиться аналогічно). Позначимо через π_1 обмеження відображення π на множину $\{1, 2, ..., \hat{i}-1\}$, а через π_2 — обмеження відображення π на множину $\{\hat{i}, \hat{i}+1, ..., n\}$.

Якщо модель перестановки π є р-моделлю, то через π_1 позначимо обмеження перестановки π на множину $\{1, 2, ..., \hat{i}\}$, а через π_2 — обмеження перестановки π на множину $\{\hat{i}+1, \hat{i}+2, ..., n\}$.

З властивостей перестановки π випливає, що π_1 — монотонно зростаюче відображення, а π_2 — монотонно спадне.

Використовуючи відображення π_1 і π_2 та означення м-моделі, циклічне представлення перестановки π можна записати у наступному вигляді

$$\Big(\pi_1(1),\ \dots,\ \pi_1^{m_1}(1),\ \pi_2(\pi_1^{m_1}(1)),\ \dots,\ \pi_2^{l_1}(\pi_1^{m_1}(1)),\ \dots,$$

$$\dots, \pi_2^{l_s}(\pi_1^{m_s}(\dots\pi_2^{l_1}(\pi_1^{m_1}(1))\dots))\Big).$$

Вище доведено, що для будь-якого числового набору, а отже, і для числового набору $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ \dots\ , m_s, l_s)$, який є м-моделлю перестановки π, існує така періодична точка $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$ тент-відображення, що

$$\alpha = \frac{2}{3}\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j}\ 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i}\ 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}},$$

а цикл, якому вона належить, є наступною множиною

$$\Big\{f_1(\alpha),\ \dots,\ f_1^{m_1}(\alpha),\ f_2(f_1^{m_1}(\alpha)),\ \dots,\ f_2^{l_1}(f_1^{m_1}(\alpha)),\ \dots,$$

$$.., f_2^{l_s}(f_1^{m_s}(...f_2^{l_1}(f_1^{m_1}(\alpha))...))\Big\}, \qquad (13)$$

яку позначимо B.

Обмеження тент-відображення на цикл B — це циклічна перестановка, що визначена на множині B. Позначимо її π'. Оскільки згідно з означенням м-модель перестановки π є неперіодичною послідовністю, то множина B складається з n різних елементів, тобто α є періодичною точкою періоду n.

Будь-який цикл тент-відображення періоду більшого, ніж 2, має точки як на інтервалі $[0;\frac{1}{2}]$, так і на інтервалі $[\frac{1}{2};1]$. Тому на всі елементи перестановки π', які менші за точку $\frac{1}{2}$, діє монотонно зростаюче відображення f_1, а на всі інші – монотонно спадне відображення f_2.

Отже, перестановка π' є опуклою вгору перестановкою, а послідовність з формули (13) є її циклічним зображенням.

Крім того, кожному елементу $\pi^i(1),\ i = 1, 2, ..., n$, перестановки π можна взаємно однозначно поставити у відповідність елемент $(\pi')^i(\alpha)$ перестановки π'.

Звідси випливає, що α є найменшою точкою циклу B.

Лему 8 доведено.

Зауваження 3. *Варто відмітити, що не будь-який неперіодичний числовий набір може бути моделлю опуклої циклічної перестановки.*

7. Доведення теореми 1. Необхідно показати еквівалентність наступних тверджень:

1) $\pi \in \Sigma$;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення;

3) π є типом деякого циклу Λ-відображення.

Очевидно, що тент-відображення є Λ-відображенням. Тому для доведення теореми 1 достатньо довести еквівалентність тверджень 1) і 3). Твердження 2) включено в формулювання теореми 1, бо тент-відображення детально вивчено в теорії динамічних систем.

Покажемо, що з твердження 1) теореми 1 випливає її твердження 3). Нехай $\pi \in \Sigma$. Множина Σ складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 та всіх опуклих вгору циклічних перестановок. Розглянемо Λ-відображення g, для якого виконуються наступні умови (див. означення 2):

1) $g(0) = g(1) = 0$;

2) існує така точка a, де $0 < a < 1$, що $g(a) = 1$;

3) $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$.

Покажемо, що відображення g має цикл, типом якого є будь-яка перестановка $\pi \in \Sigma$.

З умови 1) відображення g теореми 1 випливає, що відображення g має нерухому точку 0, тобто цикл типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

З записаних вище умов 1) і 2) відображення g випливають наступні рівності множин:

$$g([0;a]) = [0;1] = g([a;1]).$$

Звідси і з властивості неперервності відображення g випливає існування циклу періоду 2, типом якого є наступна перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тепер треба довести, що відображення g має цикл, типом якого є довільна опукла циклічна перестановка.

Далі доведення аналогічне доведенню леми 8. Відмінність полягає лише в побудові аналогів інтервалів $M_m, m = 0,1,2,...,$ і $L_l, l = 0,1,2,...,$ з леми 8, у якій їх кінцеві точки були представлені в аналітичному вигляді. Тому опишемо лише цю відмінність і не будемо деталізувати доведення далі.

Обмеження відображення g на інтервалі $[0;a]$ позначимо g_1, а обмеження відображення g на інтервалі $[a;1]$ — за допомогою g_2.

Оскільки $g_1(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і $g_1([0;a]) = [0;1]$, то існують такі точки $a_m,\ m = 0,1,2,...,$ що $0 < a_{m+1} < a_m$ і $a_{m+1} = \min\{x \in [0;a] \mid g_1(x) = a_m\},\ m = 0,1,2,...,$ де $a_0 = 1$. Границю монотонно спадної послідовності $(a_m,\ m = 0,1,2,...)$, позначимо a_∞. В силу неперервності g_1, ця точка є нерухомою точкою відображення і при цьому $0 \le a_\infty$.

Інтервал $[a_\infty;1]$ можна подати як об'єднання інтервалів вигляду $A_m = [a_{m+1};a_m],\quad m = 0,1,2,...,$ для яких виконуються умови $g_1^m(A_m) = [a_1;1]$.

Побудуємо аналоги інтервалів $L_l, l = 0,1,2,...,$ з леми 8. Оскільки $g_2(x)$ монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$ і $g_2([a;1]) = [0;1]$, то існують такі точки $b_l,\ l = 0,1,2,...,$ що при будь-якому $k = 0,1,2,...$ виконуються наступні умови:

1) $b_0 = a_\infty$;

2) $b_0 < b_2 < ... < b_{2k} < b_{2k+2} < ... < b_{2k+3} < b_{2k+1} < ... < b_3 < b_1$;

3) $b_{2k+1} = \min\{x \in [a;1] \mid g_2(x) = b_{2k}\}$;

4) $b_{2k+2} = \max\{x \in [a;1] \mid g_2(x) = b_{2k+1}\}$.

Інтервал $[a_\infty; b_1]$ можна подати як об'єднання інтервалів вигляду $B_l = [\min\{b_l; b_{l+2}\}, \max\{b_l; b_{l+2}\}], l = 0, 1, 2, ...,$, для яких виконуються умови, а $g_2^l(B_l) = [b_0; b_2],\ l = 0, 1, 2, ...$

Для побудованих точок виконується нерівність $a_\infty = b_0 < a_1 \leq a < b_2 < b_1 \leq a_0 = 1$ з випливає, що $A_0 \supset \bigcup_{l>1} B_l$ і $B_0 \supset \bigcup_{m>1} A_m$.

За допомогою міркувань для інтервалів $A_m,\ m = 0, 1, 2, ...,$ та $B_l, l = 0, 1, 2, ...,$, які аналогічні тим, що описані вище для інтервалів $M_m, m = 0, 1, 2, ...,$ і $L_l, l = 0, 1, 2, ...,$ з леми 8, приходимо до висновку про те, що з твердження 1) теореми 1 випливає її твердження 3).

Покажемо тепер, що з твердження 3) теореми 1 випливає її твердження 1). Дійсно, оскільки Λ-відображення g має нерухому точку 0 та цикл періоду 2 (бо $g([0;a]) = [0;1] = g([a;1])$), то це відображення має також і цикли типів $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Будь-який інший цикл відображення g, тобто цикл періоду більшого, ніж 2, має тип, що задається опуклою вгору циклічною перестановкою, оскільки точки цього циклу розташовані як на інтервалі $[0;a]$, так і на інтервалі $[a;1]$, при цьому на інтервалі $[0;a]$ діє монотонно неспадаюче відображення g_1,а на інтервалі $[a;1]$ діє монотонно незростаюче відображення g_2.

Теорему 1 доведено.

8. Доведення твердження 1. З доведеної вище теореми 1 випливає, що для доведення твердження 1 потрібно показати, що тип будь-якого циклу відображення $f \in C^0(I, I)$, яке має L-схему (див. означення 1), належить множині Σ.

Доведення твердження 1 аналогічно доведенню теореми 1: спочатку потрібно показати існування циклів періодів 1 і 2, а потім побудувати аналоги інтервалів $M_m, m = 0, 1, 2, ...,$ і $L_l, l = 0, 1, 2, ...,$ з леми 8.

Для відображення f, що має L-схему, виконується наступна умова: $f([a;b]) \bigcap f([b;c]) \supseteq [a;c]$. Згідно властивості неперервності відображення ця умова гарантує існування нерухомої точки та періодичної точки періоду 2 на кожному з інтервалів $[a;b]$ і $[b;c]$.

Оскільки нерухома точка a відображення f належить інтервалу $[0;b]$, то множина $\{x \in [0;b] \mid f(x) = x\}$ непорожня, а згідно властивості неперервності відображення, і замкнена.

Позначимо $x_1 = \max\{x \in [0; b] \mid f(x) = x\}$. З означення L-схеми випливає, що $f([b; c]) \supseteq [a; c] \ni x_1$, тому існує точка $\min\{x \in [b; c] \mid f(x) = x_1\}$, яку позначимо x_2. Аналогічно доводиться існування точок $x_3 = \min\{x \in [b; c] \mid f(x) = x_2\}$ і $x_4 = \max\{x \in [x_1; b] \mid f(x) = x_2\}$.

За побудовою точки $x_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, мають наступні властивості:

1) $x_1 < x_4 \le x_3 < x_2$;

2) $x_1 = f(x_1) = f(x_2)$;

3) $x_2 = f(x_3) = f(x_4)$;

4) $x_1 < f(x) < x_2$ при $x \in (x_1; x_4) \bigcup (x_3; x_2)$.

Побудуємо аналоги інтервалів $M_m, m = 0, 1, 2, ...$, з леми 8 на інтервалі $[x_1; x_4]$. З властивостей 1) – 3) випливає, що $f([x_1; x_4]) \supset [x_1; x_4] \bigcup [x_3; x_2]$. Звідси слідує існування такої монотонно спадної послідовності точок $c_m,\ m = 0, 1, ...$, що $c_{m+1} = \min\{x \in [x_1; c_m] \mid f(x) = c_m\}$, де $c_0 = x_2$.

Маючи послідовність $c_m,\ m = 0, 1, ...$, побудуємо ще одну монотонно спадну послідовність точок $c'_m,\ m = 0, 1, ...,$, для точок якої маємо $c'_{m+1} = \max\{x \in [c_{m+1}; c_m] \mid f(x) = c'_m\}$, де $c'_0 = x_3$. Інтервал $[c'_m; c_m]$ позначимо C_m. За побудовою при кожному $m = 0, 1, ...$ маємо, що $[c'_{m+1} < f(x) < c_{m+1}$ при $x \in [c'_m; c_m]$ і $f^m(C_m) = [c'_0; c_0]$.

Побудуємо тепер аналоги інтервалів $L_l, l = 0, 1, 2, ...$, з леми 8 на інтервалі $[x_3; x_2]$. З властивостей 1) – 3) випливає, що $f([x_3; x_2]) \supset [x_1; x_4] \bigcup [x_3; x_2]$. Звідси випливає існування послідовності точок $d_l,\ l = 0, 1, ...,$, що при будь-якому $k = 0, 1, 2, ...$ виконуються наступні умови:

1) $d_0 = x_1$;

2) $d_0 < d_2 < ... < d_{2k} < d_{2k+2} < ... < d_{2k+3} < d_{2k+1} < ... < d_3 < d_1$;

3) $d_{2k+1} = \min\{x \in [x_3; x_2] \mid f(x) = d_{2k}\}$;

4) $d_{2k+2} = \max\{x \in [x_3; x_2] \mid f(x)(x) = d_{2k+1}\}$.

Властивості 1) – 3) точок $x_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, дозволяють побудувати також таку послідовність точок $d'_l,\ l = 0, 1, ...$, що при будь-якому $k = 0, 1, 2, ...$ виконуються наступні умови:

1) $d'_0 = x_4$;

2) $d'_0 < d'_2 < ... < d'_{2k} < d'_{2k+2} < ... < d'_{2k+3} < d'_{2k+1} < ... < d'_3 < d'_1$;

3) $d'_{2k+1} = \max\{x \in [d'_{2k+3} < d_{2k+1}] \mid f(x) = d'_{2k}\}$;

4) $d'_{2k+2} = \min\{x \in [d'_{2k} < d_{2k+2}] \mid f(x)(x) = d'_{2k+1}\}$.

Інтервал $[\min\{d'_l; d_l\}, \max\{d'_l; d_l\}]$ позначимо $D_l,\ l = 0, 1, ...$ За побудовою для кожного з цих інтервалів маємо, що $\min\{d'_l; d_l\} <$

$f(x) < \max\{d_l^{'}; d_l\}$ при $x \in [\min\{d_{l+1}^{'}; d_{l+1}\}, \max\{d_{l+1}^{'}; d_{l+1}\}]$, а отже $f^l(D_l) = [d_0; d_0^{'}]$. Крім того, маємо $f(C_0) \supset \bigcup\limits_l D_l$ і $f(D_0) \supset \bigcup\limits_m C_m$.

Повторюючи міркування для інтервалів C_m і D_l, $m, l = 0, 1, ...$, аналогічні тим, що проведені вище для інтервалів M_m L_l, $m, l = 0, 1, ...$, при доведені леми 8, отримуємо, що дане відображення має цикл, типом якого є будь-яка опукла вгору циклічна перестановка.

Твердження 1 доведено.

Література

[1] *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, №1. – С. 61 – 71.

[2] *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.

[3] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 768 с.

[4] *Devaney R. L.* A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. – Westview Press, 1992. – 320 p.

[5] ALM *Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M.* Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One. Second Edition. – World Scientific, 2000. – 415 p.

[6] *Block L.S., Coppel W.A.* Dynamics in One Dimension. – Springer, 1995. – 252 p.

[7] *Федоренко В.В.* Канонические периодические траекториии одномерных динамических систем // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Институт математики АН УССР, 1983. – С. 106 – 109.