Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 240–268

УДК 517.994

М.І. Яременко

Міжнародний математичний центр НАН України, Київ;
math.kiev@gmail.com

Існування розв'язків квазілінійних систем диференціальних рівнянь еліптичного типу з вимірними коефіцієнтами

Робота присвячена вивченню слабкої розв'язності квазілінійних систем диференціальних рівнянь з частковими похідними в просторах W_1^p з вимірними коефіцієнтами. Дослідження проводиться з використанням методу Гальоркіна та методу форм і нелінійних монотонних операторів. Умови на коефіцієнти уточнюються в процесі дослідження властивостей нелінійних операторів, що породжені формою, яка складена за лівими частинами заданої квазілінійної системи диференціальних рівнянь. При цьому одержані результати є новими у випадку, коли система є одним рівнянням та є досить актуальними в лінійному випадку.

1. Попередні відомості та умовні позначення.

Означення 1. Простір $L^p(R^l, d^l x)$ або скорочено $L^p(R^l)$ чи $L^p(1 \leq p < \infty)$ – Банаховий простір, який утворюють всі вимірні на R^l функції, що є інтегрованими за Лебегом зі степеню p.

Елементи $L^p(R^l)$ є класами еквівалентних між собою функцій на R^l. Лінійні операції в $L^p(R^l)$ задаються формулою:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x). \tag{1}$$

Норма в просторі $L^p(R^l)$ визначається співвідношенням:

$$\|f\| = \left(\int_{R^l} |f(x)|^p \, d^l x\right)^{\frac{1}{p}} = \langle |f|^p \rangle^{\frac{1}{p}} . \tag{2}$$

Спряженим (двоїстим) до простору $L^p(R^l)$ є простір $L^q(R^l)$, де $p + q = pq$ і є вірною формула:

$$\langle f, g \rangle \leq \|f\|_{L^p(R^l)} \|g\|_{L^q(R^l)} \leq \frac{\varepsilon^p}{p} \|f\|^p_{L^p(R^l)} + \frac{1}{\varepsilon^p q} \|g\|^q_{L^q(R^l)} , \tag{3}$$

де $f \in L^p(R^l)$, $g \in L^q(R^l)$, $\varepsilon > 0$. Рівність в останній нерівності досягається лише на елементі $f\,|f|^{p-2} \in L^q(R^l)$(будемо його називати двоїстим або спряженим до елементу $f \in L^p(R^l)$) і

$$\begin{gathered} \left\langle f, f\,|f|^{p-2} \right\rangle = \|f\|_{L^p(R^l)} \left\| f\,|f|^{p-2} \right\|_{L^q(R^l)} = \\ = \tfrac{1}{p} \|f\|^p_{L^p(R^l)} + \tfrac{1}{q} \left\| f\,|f|^{p-2} \right\|^{p-1}_{L^q(R^l)} = \|f\|^p_{L^p(R^l)} . \end{gathered} \tag{4}$$

Означення 2. Соболевий простір $W^p_m(R^l, d^l x)$ (або $W^p_m(R^l)$ чи W^p_m) є Банаховим простором який утворюють всі елементи простору $L^p(R^l)$ узагальнені похідні яких існують до m-го порядку включно і є інтегрованими зі степеню p.

$W^p_{m,0}(R^l, d^l x)$ - множина елементів $W^p_m(R^l, d^l x)$ носій яких є компактним.

Лінійні операції визначаються формулою подібною до випадку простору Лебега, норма вводиться за наступною рівністю:

$$\|f\|_{W^p_m} = \left(\|f\|^p_{L^p} + \sum_{1 \leq |s| \leq m} \|D^s f\|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{5}$$

або p – та степінь норми

$$\|f\|^p_{W^p_m} = \sum_{|s| \leq m} \|D^s f\|^p . \tag{6}$$

Для Соболевих просторів виконується теорема Релліха – Кондрашова: якщо $k > m$ і $1 \leq p < q < \infty$, $(k - m)\,p < l$ і виконується рівність $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-m}{l}$, тоді вкладання просторів $W^p_k\left(R^l\right) \subset W^q_m\left(R^l\right)$ є неперервним.

Існує багато модифікацій теорем вкладання майже всі вони пов'язані з встановленням певних функціональних оцінок.

Спряженим до простору $W_m^p(R^l, d^l x)$ простір $W_{-m}^q(R^l, d^l x)$, який за означенням можна ввести як простір усіх лінійних функціоналів на лінійному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$. Двоїстий елемент має вигляд

$$f^{cn} = -\sum_{r=1,..,l} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \left| \frac{\partial f}{\partial x_r} \right|^{p-2} \right).$$

Оскільки основна частина даної роботи присвячена дослідженню системам квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними то, як правило, невідомою буде не скалярна, векторна-функція, тобто елемент $u = (u_1(x), ..., u_N(x)),\ x \in R^l$ – це упорядкована множина з N елементів певного функціонального простору, наприклад $u_i \in W_m^p(R^l, d^l x),\ i = 1, ..., N$.

Будемо використовувати наступні позначення:

$$\|u\|_{L^p(R^l)} = \left\langle \sum_{i=1,\ldots,N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1,\ldots,N} \langle |u_i|^p \rangle \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1,\ldots,N} \langle u_i, v_i \rangle\ \forall u \in L^p(R^l) \forall v \in L^q(R^l). \tag{8}$$

де під елементом $u \in L^p(R^l)$ мається на увазі упорядкований набір елементів довжини N кожен з яких належить скалярному простору $L^p(R^l)$, а v за аналогією належить двоїстому простору $L^q(R^l)$ (кожна компонента вектора належить до $L^q(R^l)$).

Має місце рівність:

$$\|u\|_{L^p(R^l)}^{p-1} = \left\langle \sum_{i=1,\ldots,N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{p-1}{p}} = \left\langle \sum_{i=1,\ldots,N} \left(|u_i|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right\rangle^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\| u^{p-1} \right\|_{L^q(R^l)}. \tag{9}$$

Подібно вводиться норма в векторному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$:

$$\|u\|_{W_m^p} = \left(\sum_{i=1,\ldots,N} \left(\|u_i\|_{L^p}^p + \sum_{1 \le |s| \le m} \|D^s u_i\|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

тобто належність вектор-функції до якого-небудь функціонального простору означає, що кожна компонента вектор-функції належить до цього простору.

Значний вклад в розвиток нелінійного аналізу внесли французькі математики школи Лере – Ліонса, особливо хочеться відмітити одну важливу лему, яку стосується вкладання просторів Банаха.

Лема (Ж.Л. Ліонс). Нехай X, Z – рефлексивні Банахові простори, Y – довільний Банаховий простір. Виконаються умови:

1. Вкладання просторів $X \subset Y$ є компактним;
2. Має місце алгебраїчне та топологічне вкладання $X \subset Y \subset Z$ просторів;

Тоді $\forall\varepsilon > 0$ $\exists c(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільного елемента u є правильною нерівність:

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + c(\varepsilon) \|u\|_Z .$$

Доведення. Оскільки доведення розриває суть взаємозв'язків математичних об'єктів то доведемо це твердження від супротивного. Нехай $\forall\varepsilon > 0$ $\exists c(\varepsilon) > n$ і $\exists u_n \in X$ для довільного натурального числа n, такі, що:

$$\|u_n\|_Y \geq \varepsilon \|u_n\|_X + c(\varepsilon) \|u_n\|_Z .$$

Покладемо $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_X}$. Отже, маємо: $\|v_n\|_Y \geq \varepsilon \|v_n\|_X + c(\varepsilon) \|v_n\|_Z$ і $\|v_n\|_Y \leq const \|v_n\|_X \leq const$, де стала не залежить від числа n. Тоді, при $c(\varepsilon) > n$, маємо $\|v_n\|_Z \leq \frac{const}{n}$, для довільного числа n.

Внаслідок компактності вкладення $X \subset Y$ і рівності $\|v_n\|_X = 1$ із послідовності $\{v_n\}$ можна вибрати підпослідовність $\{v_k\}$ яка буде мати границю в просторі Y із властивістю: $\|v_n\|_Y \leq \frac{1}{n}$, але це суперечить наступні нерівності:

$\|v_k\|_Y \geq \varepsilon \|v_k\|_X + c(\varepsilon) \|v_k\|_Z$. Лема доведена.

2. Постановка задачі. Розглянемо в усьому евклідовому просторі R^l систему вигляду:

$$\lambda u^k - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, u^k)\frac{\partial}{\partial x_j}u^k\right) + b^k(x, u^k, \nabla u^k) = f^k, \quad k = 1, ..., N \quad (11)$$

де невідомою є вектор-функція $u^k(x) = \left(u^1, ..., u^N\right)$, $\lambda > 0$ дійсне число і $f(x) = f^k = (f^1, ..., f^N)$– задана вектор-функція.

$b(x,u,\nabla u) = b^k(x,u^k,\nabla u^k)$ – вектор-функція довжини N трьох змінних: вектора розмірності l, вектора розмірності N, матриці розмірності $l \times N$.

Вимірна матриця $a_{ij}(x,u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності: $\exists \nu : \quad 0 < \nu < \infty$ і виконується наступна нерівність $\nu \mathrm{I} \le a(x,u), \quad$ для майже всіх $x \in R^l$, тобто

$$\nu \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \le \sum_{ij=1,\dots,l} a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \quad \forall \xi \in R^l \tag{12}$$

Зауваження. Завжди, коли не вказано інше будемо вважати, що система (11) складається з N нелінійних рівнянь з N невідомими функціями причому припускається, що N може дорівнювати одиниці і рівняння можуть бути лінійними, але всі функції визначені на евклідовому просторі R^l, причому завжди $l \ge 3$, тобто випадок прямої і площини виключений із дослідження (в цих випадках ми потрапляємо в умови відомих контр прикладів).

Узагальненим (слабким) розв'язком в $W_1^p(R^l, d^l x)$ (під розв'язком завжди, коли не вказано інше, розуміємо узагальнений або слабкий розв'язок) будемо називати елемент $u\,(x)$ який задовольняє інтегральну тотожність:

$$\lambda \left\langle u, v \right\rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,\dots N} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \left\langle b, v \right\rangle = \left\langle f, v \right\rangle, \tag{13}$$

для будь-якого елементу $v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Виходячи з цього означення за лівими частинами системи побудуємо форму оскільки $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^q \to R$:

$$h_\lambda^p(u,\nu) \equiv \lambda \left\langle u, v \right\rangle + \left\langle \nabla v \circ a \circ \nabla u \right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u), v \right\rangle, \tag{14}$$

яку будемо вважати визначеною (умови на коефіцієнти уточнимо нижче) для всіх елементів $u \in W_1^p(R^l, d^l x),\ v \in W_1^q(R^l, d^l x)$.

Отже, виходячи із заданої системи диференціальних рівнянь будується скалярна форма (форма визначена на векторних функціональних просторах $W_1^p(R^l, d^l x) \times\ W_1^q(R^l, d^l x)$розмінностей N і приймає дійсні числові значення, тобто в умовних позначеннях

$$h_\lambda^p : \left(\mathop{\times}_1^N W_1^p(R^l, d^l x) \right) \times\ \left(\mathop{\times}_1^N W_1^q(R^l, d^l x) \right) \to R.$$

Крім слабкого існують і інші поняття розв'язку, наприклад, власним розв'язком системи (11) називається функція $u(x)$, якщо ця функція тотожно задовольняє систему рівнянь (11).

Основний об'єкт дослідження – існування розв'язку таких систем, тобто встановлення належності узагальненого розв'язку певному функціональному простору за умов, що коефіцієнти рівняння належать до певних функціональних класів і просторів.

3. Умови на функції, що утворюють систему (11).

1. $b(x,y,z)$ є вимірною векторною функцією своїх аргументів і $b \in L^1_{loc}(R^l)$;

2. Вектор-функція $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє нерівності:

$$|b\,(x,u,\nabla u)| \le \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x). \tag{15}$$

Введемо клас функцій:

$$PK_\beta(A) = \left\{ f \in L^1_{loc}(R^l, d^l x) : |\langle h\, f\, h\rangle| \le \beta\, \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\rangle + \right.$$

$$\left. + c\,(\beta)\, ||h||_2^2 \right\},$$

де $\beta > 0, \quad c\,(\beta) \in R^1$.

В умові (15) функції

$\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_1^2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$,

$$\left|\left\langle h\, \mu_1^2\, h\right\rangle\right| \le \beta\, \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\rangle + c\,(\beta)\, ||h||_2^2,$$

$\mu_2 \in PK_\beta(A)$, тобто [$\mu_2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$,

$$|\langle h\, \mu_2 h\rangle| \le \beta\, \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\rangle + c\,(\beta)\, ||h||_2^2,$$

функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$.

3. Приріст вектор-функції $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє умову:

$$|b\,(x,u,\nabla u) - b\,(x,v,\nabla v)| \ \le\ \mu_4(x)\,|\nabla\,(u-v)| + \mu_5(x)\,|u-v|, \tag{15a}$$

де $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_4^2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ і

$$\left|\left\langle h\, \mu_4^2\, h\right\rangle\right| \le \beta\, \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\rangle + c\,(\beta)\, ||h||_2^2,$$

де $\mu_5 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_5 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ і

$$|\langle h\, \mu_5 h\rangle| \le \beta\, \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\rangle + c\,(\beta)\, ||h||_2^2.$$

Зауваження. Наведені вище умови на нелінійність є більш слабкі ніж ті за яких раніше розглядалася дана система в науковій літературі. Даній умові, наприклад, задовольняють функції типу потенціалу Кулона.

4. Побудова оператора, що породжений формою яка складена за лівими частинами системи (11). Дослідження будемо проводити за допомогою наступної схеми: за рівнянням будуємо форму і вивчаємо її властивості, показуємо, що з цією формою можна асоціювати певний не лінійний оператор властивості якого вивчаються за допомогою форми, що породжує його; використовуючи метод монотонних операторів показуємо, що вихідна система має розв'язок в певному Соболевському просторі. Реалізувати цю схему можна лише у випадку існування певних апріорних оцінок, подібні оцінки є теоремами про властивості розв'язків за певних умов на функції, що утворюють дану систему, тобто припускаємо певну гладкість «коефіцієнтів» і отримуємо гладкість розв'язків системи, насправді оцінки розв'язків і є ключовим моментом доведення теорем існування, за наявності таких оцінок можна використати різні методи доведення розв'язності системи.

Перевага методу аналізу нелінійних операторів полягає в загальності підходу до розгляду задачі і можливості застосування більш слабких умов на коефіцієнти, щодо нелінійності, а недолік в не можливості врахувати специфіку функцій з яких складається задана система, тобто виграючи в загальності втрачаємо певні класи систем які мають розв'язок і які не задовольняють нашим умовам (але дані умови значно загальніші ніж ті за яких велися попередні дослідження, мається на увазі, щодо умов на сингулярність коефіцієнтів, умови щодо росту повністю ідентичні класичним роботам, більш того відомі результати в яких степеневий ріст сильніший за той, що розглядається нижче).

Оцінимо форму (14), яка складена за системою (11) на спряженому елементі $u\,|u|^{p-2} = \left(u_1\,|u_1|^{p-2}, ..., u_N\,|u_N|^{p-2}\right)$:

$$\left|h_\lambda^p(u, u\,|u|^{p-2})\right| =$$

$$= \left|\lambda \left\langle u, u\,|u|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left(u\,|u|^{p-2}\right) \circ a \circ \nabla u\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle b(x, u, \nabla u), u\,|u|^{p-2}\right\rangle\right| \le$$

$$\le \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle +$$

$$+\left\langle \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x), |u|^{p-1}\right\rangle \le$$

$$\le \lambda \|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + \frac{2}{p}\langle \mu_1\,|\nabla w|\,, |w|\rangle +$$

$$+\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c(\beta)\,\|w\|^2 + \|\mu_3\|\,\|u\|^{p-1},$$

де використано позначення вектор-функції $w = u\,|u|^{\frac{p-2}{2}}$, відповідно матриця $\nabla w = \frac{p}{2}\,|u|^{\frac{p-2}{2}}\,\nabla u$ і оцінки:

$$\left\langle \mu_1\,|\nabla u|\,, |u|^{p-1}\right\rangle = \left\langle \mu_1\,|u|^{\frac{p-2}{2}}\,|\nabla u|\,, |u|^{\frac{p}{2}}\right\rangle \le \frac{2}{p}\langle \mu_1\,|\nabla w|\,, |w|\rangle\,,$$

$$\left\langle \mu_2(x), w^2\right\rangle \le \beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c(\beta)\,\|w\|^2\,,$$

$$\left\langle \mu_3(x), |u|^{p-1}\right\rangle \le \|\mu_3\|\,\left\||u|^{p-1}\right\| = \|\mu_3\|\,\|u\|^{p-1}\,,$$

тут використано позначення $|u|^{p-1} = \left(\sum_{i=1,..,N} |u_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ і тоді

$$|u|\,|u|^{p-1} = \left(\sum_{i=1,..,N} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1,..,N} |u_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1,..,N} |u_i|^p\right) = |u|^p\,.$$

Далі використаємо оцінки Гельдера та Юнга

$$\frac{2}{p}\langle \mu_1\,|\nabla w|\,, |w|\rangle \le \frac{2}{p}\,\|\mu_1 w\|\,\|\nabla w\|\,,$$

$$\|\mu_1 w\| = \left\langle (\mu_1 w)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \le \left(\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c(\beta)\,\|w\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

отже

$$\frac{2}{p}\langle \mu_1\,|\nabla w|\,, |w|\rangle \le \frac{2}{p}\,\|\mu_1 w\|\,\|\nabla w\| = \frac{2}{p}\,\|\nabla w\|\left\langle (\mu_1 w)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \frac{2}{p}\left\|\nabla w\right\|\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\nabla w\right\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2\right)\right).$$

Тоді одержимо оцінку

$$\left|h_\lambda^p(u, u\left|u\right|^{p-2})\right| \leq \lambda\left\|w\right\|^2 + \frac{4\left(p-1\right)}{p^2}\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\nabla w\right\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2\right)\right) +$$

$$+\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2 + \frac{\sigma^p}{p}\left\|\mu_3\right\|^p + \frac{1}{\sigma^q q}\left\|u\right\|^p,$$

остаточно

$$\left|h_\lambda^p(u, u\left|u\right|^{p-2})\right| \leq \left(\lambda + \left(\frac{\varepsilon^2}{p}+1\right)c\left(\beta\right) + \frac{1}{\sigma^q q}\right)\left\|w\right\|^2 +$$

$$+\left(\frac{4\left(p-1\right)}{p^2} + \frac{\beta\varepsilon^2}{p} + \beta\right)\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + \frac{1}{p}\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\nabla w\right\|^2 + \frac{\sigma^p}{p}\left\|\mu_3\right\|^p.$$

Зауваження. Покажемо, що $\left\|w\right\|^2_{L^2(R^l)} = \left\|u\right\|^p_{L^p(R^l)}$, дійсно

$$\left\|w\right\|^2_{L^2(R^l)} = \left\langle \sum_{i=1,..,N} w_i^2\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1,..,N} u_i\left|u_i\right|^{\frac{p-2}{2}}, u_i\left|u_i\right|^{\frac{p-2}{2}}\right\rangle =$$

$$= \left\|u\right\|^p_{L^p(R^l)}.$$

Проаналізуємо природу числових коефіцієнтів, які входять в оцінку форми: коефіцієнт β – форм-грань залежить лише від даних задачі (гладкості коефіцієнтів системи (μ_i)); коефіцієнт $c\left(\beta\right)$ залежить від β; коефіцієнти ε і σ– довільні додатні сталі; коефіцієнти ε вибирається в залежності від матриці a сталих еліптичності, коефіцієнт σ впливає на здвиг спектру його значення менш суттєве.

Отже, для кожного фіксованого вектора $u \in W_1^p$ форма $h_\lambda^p\left(u, v\right)$ є неперервним лінійним (по $v \in W_1^q$) функціоналом над W_1^q, а отже кожному $u \in W_1^p$ ставиться у відповідність елемент спряженого до W_1^q простору W_{-1}^p, тобто існує відображення $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$.

5. Дослідження відображення $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$.

Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ діє таким чином: $h_\lambda^p(u,v) = \langle A^p(u), v\rangle$.

Означення 3. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ називається коерцитивний, якщо форма $h_\lambda^p(u,v) = \langle A^p(u), v\rangle$ задовольняє умову:

$$\lim_{||u|u|^{p-2}||_{W_1^q}\to\infty} \frac{h_\lambda^p\left(u, u|u|^{p-2}\right)}{||u|u|^{p-2}||_{W_1^q}} = \infty. \qquad (16)$$

Лема 1. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ є коерцитивним.

Доведення. Для доведення потрібно оцінити форму, що породжує оператор знизу, це можна зробити за допомогою оцінок аналогічних до тих які були виконані вище, а саме:

$$h_\lambda^p(u, u\,|u|^{p-2}) = \lambda \left\langle u, u\,|u|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left(u\,|u|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla u\right\rangle +$$

$$+\left\langle b(x,u,\nabla u), u\,|u|^{p-2}\right\rangle \geq \lambda\,\|w\|^2 + \frac{4\,(p-1)}{p^2}\,\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\rangle -$$

$$-\left\langle \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x), |u|^{p-1}\right\rangle \geq$$

$$\geq \left(\lambda - \left(\left(\frac{\varepsilon^2}{p}+1\right)c\,(\beta) + \frac{1}{\sigma^q q}\right)\right)\|w\|^2 +$$

$$+\left(\frac{4\,(p-1)}{p^2} - \left(\frac{\beta\varepsilon^2}{p} + \beta + \frac{1}{\nu p}\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right)\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\rangle - \frac{\sigma^p}{p}\,\|\mu_3\|^p\,,$$

позначення и постійні ті самі, що і в попередньому пункті, але в даному випадку доданок $\frac{\sigma^p}{p}\,\|\mu_3\|^p$можна відкинути – постійне число. Важливе значення має число β – міра сингулярності коефіцієнтів, саме форм-грань вирішує який знак має другий доданок в оцінці форми (оскільки ε можна вибирати як це потрібно, тобто ε пов'язує здвиг спектру і сингулярність).

Означення. 4 Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ є акретивний в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, якщо виконується нерівність:

$$\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle \geq 0, \forall u,v \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right). \qquad (17)$$

Пояснення. Різниця розуміється як різниці елементів N мірного лінійного (евклідового) простору, тобто по елементна, а $(u-v)\,|u-v|^{p-2} = \left((u_1-v_1)\,|u_1-v_1|^{p-2}, ..., (u_N-v_N)\,|u_N-v_N|^{p-2}\right)$.

Зауваження. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ називається строго акретивний в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, якщо виконується нерівність:

$$\left\langle A^p\left(u\right) - A^p\left(v\right), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle \geq 0, \forall u, v \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$$

і рівність $\left\langle A^p\left(u\right) - A^p\left(v\right), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle = 0, \forall u, v \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ можлива лише тоді і тільки тоді коли $u = v$.

Лема 2. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає строго акретивне відображення в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$

Доведення. Дана властивість є однією з ключових при використанні методу монотонності, а отже проведемо її детальне доведення.

$$\left\langle A^p\left(u\right) - A^p\left(v\right), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left(\left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right)\circ a \circ \nabla u\right\rangle +$$

$$+\left\langle b(x,u,\nabla u), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle - \lambda\left\langle v, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \nabla\left(\left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right)\circ a \circ \nabla v\right\rangle +$$

$$+\left\langle b(x,v,\nabla v), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u-v, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle +$$

$$= \left\langle \nabla\left(\left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right)\circ a \circ \nabla\left(u-v\right)\right\rangle +$$

$$+\left\langle b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v), \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u-v, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \nabla\left(\left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right)\circ a \circ \nabla\left(u-v\right)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \mu_4(x)\left|\nabla\left(u-v\right)\right| + \mu_5(x)\left|u-v\right|, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\|w\right\|^2 + \frac{4\left(p-1\right)}{p^2}\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle -$$

$$-\left\langle \mu_4(x)\left|\nabla\left(u-v\right)\right| + \mu_5(x)\left|u-v\right|, \left(u-v\right)\left|u-v\right|^{p-2}\right\rangle,$$

де введено позначення $w = (u-v)\,|u-v|^{\frac{p-2}{2}}$,

$$\nabla w = \frac{p}{2}\,|u-v|^{\frac{p-2}{2}}\,\nabla\,(u-v)\,.$$

Далі оцінимо

$$\frac{2}{p}\,\langle \mu_4(x)\,|\nabla w|\,,|w|\rangle \leq \frac{2}{p}\,\|\mu_4 w\|\,\|\nabla w\| = \frac{2}{p}\,\|\nabla w\|\,\left\langle (\mu_4 w)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\,\|\nabla w\|\,\left(\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c\,(\beta)\,\|w\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\,\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c\,(\beta)\,\|w\|^2\right)\right),$$

і

$$\left\langle \mu_5(x)\,|u-v|\,,(u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle = \left\langle \mu_5, w^2\right\rangle \leq$$

$$\leq \beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c\,(\beta)\,\|w\|^2\,.$$

Отже, маємо

$$\left\langle A^p\,(u) - A^p\,(v)\,,(u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda\,\|w\|^2 + \frac{4\,(p-1)}{p^2}\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle -$$

$$-\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\,\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c\,(\beta)\,\|w\|^2\right)\right) +\right.$$

$$\left.+\beta\,\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle + c\,(\beta)\,\|w\|^2\right) \geq$$

$$\geq \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c\,(\beta)}{p} - c\,(\beta)\right)\|w\|^2 +$$

$$+\left(\frac{4\,(p-1)}{p^2} - \beta\frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2\nu} - \beta\right)\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle \geq 0.$$

Лема доведена.

Означення 5. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає хемінеперервне відображення, якщо справджується властивість:

$$\omega - \lim_{t \to 0} \mathrm{A}^p\,(u + tv) = A^p\,(u)$$

$\forall\ u, v \in W^p_{1,0}\left(R^l, d^l x\right)$ в нормі $W^p_{-1}\left(R^l, d^l x\right)$.

Лема 3. Оператор $A^p : W^p_1 \to W^p_{-1}$ визначає хемінеперервне відображення.

Доведення. Доведення базується на міркуваннях подібних до попередніх, а саме для $\forall u, v \in W^p_{1,0}\left(R^l, d^l x\right)$ і $\forall w \in W^q_1\left(R^l, d^l x\right)$:

$$\langle A^p (u + tv) - A^p (u), w\rangle =$$

$$= \lambda \langle u + tv, w\rangle + \langle \nabla w \circ a \circ \nabla (u + tv)\rangle +$$

$$+ \langle b(x, u + tv, \nabla (u + tv)), w\rangle -$$

$$-\lambda \langle u, w\rangle - \langle \nabla w \circ a \circ \nabla u\rangle - \langle b(x, u, \nabla u), w\rangle =$$

$$= \lambda t \langle v, w\rangle + t \langle \nabla w \circ a \circ \nabla v\rangle +$$

$$+t \langle \mu_4(x) |\nabla v| + \mu_5(x) |v|, w\rangle \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Для граничного переходу використані задані умови, тобто обмеженість останнього доданку. Лему 3 доведено.

Отже, за системою (11) складено форму (14) яка породжує нелінійний оператор $A^p : W^p_1 \to W^p_{-1}$, який задовольняє умови коерціативності, акретивності та хемінеперервності.

6. Актуальність теми роботи. Робота присвячена дослідженню умов існування розв'язку системи (11), тобто встановленню обмежень на не лінійність за яких система буде мати розв'язок і дослідженню єдиності такого розв'язку в певному класі функцій.

Методи дослідження подібних систем є подібними до тих, що застосовуються для розгляду одного рівняння (в нашому випадку при $N = 1$) але у випадку системи розглядається не скалярний простір, а векторний, тобто всі означення, теореми і леми повинні бути переформульовані в нових термінах з відповідними змінами, часто нетривіальним чином, при цьому поняття спряженого елементу набуває дещо іншого змісту, навіть поняття узагальненого розв'язку можна формулювати по різному.

При дослідженні квазілінійних систем (або рівнянь у випадку $N = 1$, який допускається в даній роботі але за умов $l > 2$) важливими є результати які стосуються відповідних лінійних систем (або рівнянь).

Найбільш важливі перші результати щодо розв'язності одного лінійного рівняння з довільною еліптичною матрицею були одержані геніальним американським математиком Джоном Нешом в 1958 році і Ен. Джоржі які розв'язали, так звану, 19-ту проблему Гільберта, в їх роботах були одержані апріорні оцінки, що дозволили сформулювати відповідні теореми про існування та гладкість розв'язків, при цьому доведення було проведено лише в найпростіших випадках. Після одержання цих важливих базових результатів теорія лінійних і квазілінійних еліптичних диференціальних рівнянь з частинними похідними почала дуже стрімко зростати і підсумкові класичні результати цього розвитку викладено в роботах О.А. Ладиженської, Н.Н. Уральцевої, В.А. Солоннікова та Д. Гільберга, Н. Трудінгера робота останніх двох авторів цікава тим, що в ній розвиваються методи теорії форм та операторів але одержані результати суттєво не покращують класичні.

При дослідженні подібних задач основна увага зо серед жується на двох напрямках: по-перше це – умови росту, по-друге умови щодо сингулярності. Розглянемо ці умови на прикладі в нашому випадку:

$$|b\,(x,u,\nabla u)| \leq \mu_1(x)\,|\nabla u|^{\alpha} + \mu_2(x)\,|u|^{\delta} + \mu_3(x),$$

$$|b\,(x,u,\nabla u) - b\,(x,v,\nabla v)| \leq \mu_4(x)\,|\nabla\,(u-v)|^{\varphi} + \mu_5(x)\,|u-v|^{\psi}\,,$$

умови в подібній формі вперше почав розглядати М.М.Кухарчук, насправді вони майже нічим не відрізняються від класичного запису. Дійсні числа $\alpha, \delta, \varphi, \psi$ визначають степінь росту функції яка визначає нелінійність саме умови на ці числа і маються на увазі під степеню росту в нашому випадку вони тотожно дорівнюють одиниці. В усіх відомих автору роботах умови на степінь росту аналогічні або близькі до них, тобто степінь росту більший за одиницю, тоді оператор породжений формою не буде акретивним, а буде оператором обмеженої варіації і за цих умов рожна довести існування розв'язку, але його єдиність встановити не можна (в класичні літературі доводиться аналогічні результати).

Під умовами щодо сингулярності коефіцієнтів розуміємо сингулярності функцій μ_i які задані в умовах задачі.

Зауваження. Вкінці 90 років минулого століття вийшли публікації Гаррі Лібермана, які присвячені дослідженню квазілінійних задач і в яких стверджувалось про послаблення класичних умов О.А. Ладиженської, Н.Н. Уральцевої, але насправді всі доведення проводяться за класичних умов щодо степеневого росту та незначного покращення щодо сингулярностей.

Отже, можна зробити висновок, найкращі відомі результати (з невеликими змінами щодо сингулярностей) які стосуються квазілінійних рівнянь та систем викладені в роботі: О.А. Ладиженська, Н.Н. Уральцева «Лінійні і квазілінійні рівняння еліптичного типу» на стр. 465. Але це зовсім не означає, що умови згаданої вище роботи не були покращені для певних класів рівнянь, навпаки, таких робіт досить багато.

На відміну від квазілінійних рівнянь та систем в лінійному випадку вдалося значно покращити результати, що згадані вище і одержати майже необхідні умови щодо коефіцієнтів, оскільки ці умови важливі для розуміння наших результатів то коротко опишемо сучасний стан проблеми у випадку одного лінійного рівняння.

Розглядається рівняння загального вигляду:

$\Lambda u = 0$, де $\Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b}\nabla - \nabla b + v$,

$a(x) \ : R^l \mapsto R^l \otimes R^l$ гладка симетрична еліптична матриця, що задовольняє умову: $\exists \varsigma, \xi : \quad 0 < \varsigma \leq \xi < \infty$ і виконується нерівність: $\varsigma \mathrm{I} \leq a(x) \leq \xi \mathrm{I}$, для всіх $x \in R^l$; $\tilde{b}$, $b : R^l \mapsto R^l$, $v : R^l \mapsto R$.

Для дослідження подібних задач визначаються певні класи функцій.

Означення 6. Нехай $\varphi \in L^2_{loc}(R^l, d^l x)$, тоді визначимо функцію $n(\varphi; \lambda)$ за формулою

$$n(\varphi;\lambda) = ess \sup_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{t\Delta} \left|\varphi\right|^2 (x))^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}};$$

цю функцію, інколи називають нормою Неша функції φ.

Аналогічно для функції $\varphi \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ вводяться функції $k_l(\varphi; \lambda)$ і $k_{l+1}(\varphi; \lambda)$ за визначенням:

$$k_l(\varphi;\lambda) = ess \sup_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} \left|\varphi\right| (x) dt,$$

$$k_{l+1}(\varphi;\lambda) = ess \sup_{x \in R^l} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} \left|\varphi\right| (x) \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Функція φ належить класу Неша N_2 тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} n(\varphi; \lambda) = 0$.

Аналогічно, функція φ належить класам Като K_l і K_{l+1} , тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} k_l(\varphi; \lambda) = 0$ і $\lim\limits_{\lambda \to \infty} k_{l+1}(\varphi\, ; \lambda) = 0$, відповідно.

Означення 7. Згідно з означенням клас функція форм-обмежених функцій $PK_\beta(A)$ визначається за формулою:

$$PK_\beta(A) = \Big\{ f \in L^1_{loc}(R^{l+1}) : \Big| \Big\langle f\, |h|^2 \Big\rangle \Big| \leq \beta \Big\langle A^{\frac{1}{2}} h, A^{\frac{1}{2}} h \Big\rangle +$$

$$+ c\,(\beta)\, ||h||_2^2 \big\},$$

де $h \in D(A^{\frac{1}{2}})$,$\beta > 0, \quad c\,(\beta) \in R^1$.

Приклади :

1. Справедливі вкладення функціональних просторів:

$$\{ L^p(R^l, d^l x) + L^\infty(R^l, d^l x), \quad p > l, \quad l \geq 2 \} \subset N_2 \subset K_{l+1}.$$

2. Якщо взяти $\varphi(t) = e^{-1}$ при $t \geq e^{-e}$ і $\varphi(t) = \left(\left(\log \frac{1}{t}\right) \left(\log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon} \right)^{-1}$ при $t \geq e^{-e}$ і довільному $\varepsilon > 0$. Тоді можна отримати, що $\left\{ L^{q,p}_{loc,u}(R^l, d^l x), \quad \frac{l}{2p} + \frac{1}{q} < 1, \quad l \geq 2 \right\} \subset N^\alpha_\varphi$.

3. Цікавим є випадок параболічного рівняння вигляду: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \right) u = 0$, де $\Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b} \nabla - \nabla b + v$.

Де $a(\cdot) \quad : \Omega \mapsto R^l \otimes R^l$ – симетрична еліптична матриця, яка задовольняє умову: $\exists \varsigma \ : \quad 0 < \varsigma < \infty$ виконується нерівність: $\varsigma \mathrm{I} \leq a(\cdot), \quad x \in R^l$; $a(\cdot) \in \left[L^1_{loc}(\Omega) \right]^{l \times l}$. Квадратична форма $H(u,v) = \langle \nabla u \bullet a \bullet \nabla v \rangle\,, \quad u, v \in C^1_0(\Omega)$, може бути замкненою в L^2. Нехай A_D – генератор, породжений замиканням форми$H(u,v)$ в L^2 і нехай оператор A_Dзнову позначаємо через A, тоді внаслідок теорії Берлінг – Дінні в просторі $L^p, \quad 1 \leq p < \infty$, існує позитивна стискаюча напівгрупа класу C_0, генератором якої є оператор $-A_p$ і $A = A_2$. Отже, оператор ∇b можна розглядати як невелике збурення оператора A , що визначений вище, в просторах L^2 чи L^p відповідно. Нехай $b \bullet a^{-1} \bullet b \in PK_\beta(A)$ при деякому $\beta < 1$, тоді є вірною нерівність :

$$|\langle \nabla \varphi \bullet b \varphi \rangle| \leq \sqrt{\beta}\, \langle A\varphi, \varphi \rangle + \frac{c(\beta)}{2\beta} \, \|\varphi\|^2\,, \quad \forall \varphi \in D(A).$$

Якщо оператор A - оператор Лапласа, тоді остання умова набуде вигляду:

$$|\langle \nabla \varphi \bullet b \varphi \rangle| \leq \sqrt{\beta}\, \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{c(\beta)}{2\beta} \, \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in D(\Delta).$$

Зазначені умови і нерівність $\beta < 1$ дають можливість твердити про існування в просторі L^p, C_0 - напівгрупи стиску $e^{-t\Lambda_p}$, $\frac{2}{2-\beta} \le p < \infty$, де $\Lambda = A + b \bullet \nabla$.

Далі для випадку лінійних операторів доводимо таку теорему: якщо $b \bullet a^{-1} \bullet b$, $\tilde{b} \bullet a^{-1} \bullet \tilde{b} \in PK_1(\beta A + v^+)$ $\forall \beta > 0$, де $v = v^+ - v^-$, $0 \le v^\pm \in L^1_{loc}$, то в просторі L^p, $1 < p < \infty$, існує квазістискаюча напівгрупа $e^{-t\Lambda_p}$ класу C_0 з генератором $-\Lambda_p$ така, що $\Lambda_2 = A + \tilde{b}\nabla - \nabla b + v$, і справедливою є наступна оцінка: $\left\| e^{-t\Lambda_p} \right\|_{r \to q} \le C_{r,q} e^{t\omega_{r,q}} t^{\frac{-l(r-q)}{2rq}}, \quad 1 < r < q < \infty, \quad t > 0.$

Для порівняння з результатами які одержані в данні роботі для квазілінійних систем важливим є випадок лінійного рівняння вигляду: $\left(-\nabla a \nabla + \tilde{b}\nabla - \nabla b\right) u = 0$ для якого доводиться, що достатніми умовами існування розв'язку цього рівняння є належність функцій-коефіцієнтів рівняння $\tilde{b}$ класу Неша та b класу Като, або $\tilde{b}$ класу Като, а b класу Неша, тобто один з функціональних коефіцієнтів повинен належати класу Неша а інший класу Като (в цьому розумінні класи Неша та Като взаємно спряжені).

На перший погляд може здатися, що теорія для систем квазілінійних диференціальних рівнянь буде включати в себе попередні, як частинні випадки, насправді це не так, безумовно результати даної роботи є вірними для усіх вище згаданих задач але вони є занадто не точними. Наприклад, порівнюючи класи сингулярностей, які одержані в якості достатніх умов існування розв'язку для систем квазілінійних диференціальних рівнянь еліптичного типу з аналогічними для випадку одного лінійного диференціального рівнянь еліптичного типу, маємо що вони гарантують існування розв'язку, тому, що обмеження на класи сингулярностей функціональних коефіцієнтів сильніші (тому самі класи вужчі), тобто вони погані в тому розумінні, що в лінійному випадку існують функції, які задовольняють умовам існування розв'язку для одного лінійного диференціального рівняння але не входять в класи функцій, які запропоновані в даній роботі, наші умови більш сильні (але вони значно покращують всі відомі умови для систем квазілінійних рівнянь). Очевидно, що така ситуація є цілком природною чим більше інформації про рівняння тим слабкіші умови існування розв'язку.

7. Метод Гальоркіна. Доводити існування розв'язку системи (11) та його єдиність будемо в декілька етапів. Спочатку припустимо, що вектор-функції які утворюють рівняння достатньо гладкі і доведемо існування розв'язку методом Гальоркіна з використанням спеціального базису єдиність розв'язком буде наслідком строгої акретивності оператора породженого формую, що складена за системою рівнянь і доводиться від супротивного. Потім припустимо, що коефіцієнти вимірні, тоді за допомогою зрізання та згладжування зведемо задачу до попереднього випадку. Наступний етап знімання умов зрізання та згладжування.

Сформулюємо наступну лему (про гострий кут). *Нехай на сфері* $S_R = \left(\bar{C} : |\bar{C}| = R\right)$, *де* $R > 0$ *– деяке відповідним чином вибране число, задано неперервне відображення* $\overrightarrow{B} : R^n \to R^n$ *для якого виконується аналог умови про гострий кут, тобто* $\left\langle \bar{B}\left(\bar{C}\right), \bar{C}^* \right\rangle \geq 0$. *Тоді існує принаймні одна така точка* $\overrightarrow{C}$: $|\overrightarrow{C}| \leq R$, *що* $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right) = 0$.

Припустимо, що коефіцієнти обмежені достатньо гладкі функції, доведення існування розв'язку будемо проводити за допомогою методу Гальоркіна.

Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ - гладкі базиси просторів $W_1^p(R^l, d^l x)$, $W_1^q(R^l, d^l x)$, відповідно, і нехай $[v_1, ...v_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів $\langle u_k, u_k^* \rangle = ||u_k||_p^p$. Покладемо за визначенням $u_k = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, $u_k^* = \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь:

$$\langle A^p\left(u_k\right) - f, v_i^* \rangle = 0, i = 1, ..., k,$$

далі покажемо, що ця система має розв'язок в лінійній оболонці перших n елементів базису $\{v_i\}$. Дійсно ця система визначає неперервне відображення сфери в евклідовому просторі, а отже має місце аналог леми про гострий кут, тобто, відображення $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right)$: $B_i\left(\overrightarrow{C}\right) = \langle A^p\left(u_k\right) - f, v_i^* \rangle$, внаслідок коерцитивності оператора $A^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут:

$$\left\langle \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right), \overrightarrow{C}^* \right\rangle = \left\langle A^p\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right) - f, \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^* \right\rangle =$$

$$= \left\langle A^p\left(u_k\right) - f, u_k |u_k|^{p-2} \right\rangle \geq$$

$$\geq \left(\frac{h_\lambda^p \left(u_k, u_k|u_k|^{p-2}\right)}{||u_k|u_k|^{p-2}||_{W_1^q}} - ||f||_{W_{-1}^p} \right) ||u_k|u_k|^{p-2}||_{W_1^q} \geq 0.$$

Оскільки $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ – неперервне відображення на скінченно-вимірних підпросторах простору $W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > 0$ існує такий елемент $\vec{C}$, $\quad |\vec{C}\,| = R$, що $\vec{B}\left(\vec{C}\right) = 0$.

Тобто вище вказано спосіб побудови послідовності $\{u_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками системи рівнянь $\langle A^p\left(u_k\right) - f, v_i^* \rangle = 0$. Покажемо, що ця послідовність збігається до розв'язку системи.

Використавши коерцитивність оператора $A^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо нерівність$||A^p\left(u_k\right)||_{W_{-1}^p} \leq ||f||_{L^p}$.

Далі потрібна апріорна оцінка $||u||_{W_1^p} < const$.

Теорема 1. *Узагальнені розв'язки системи рівнянь (11) за умов (15) рівномірно обмежені в W_1^p.*

Доведення. Складемо інтегральну тотожність:

$$\lambda\langle u_k, \xi\rangle + \langle d\xi \circ a \circ du_k\rangle + \langle b(x, u_k, \nabla u_k), \xi\rangle \equiv \langle f, \xi\rangle,$$

Покладемо $\xi = u_k|u_k|^{p-2}$, одержимо:

$$\lambda\langle u_k, u_k|u_k|^{p-2}\rangle + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d\left(u_k|u_k|^{\frac{p-2}{2}}\right) \circ a \circ d\left(u_k|u_k|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle +$$

$$+\left\langle b, u_k|u_k|^{p-2}\right\rangle \equiv \left\langle f, u_k|u_k|^{p-2}\right\rangle.$$

З умов (15), використовуючи нерівності Юнга і Гельдера, знаходимо:

$$|\langle b, u_k|u_k|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\nabla w\right\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle\nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2\right)\right) +$$

$$+\beta\left\langle\nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2 + \frac{\sigma^p}{p}\left\|\mu_3\right\|^p + \frac{1}{\sigma^q q}\left\|u_k\right\|^p,$$

Далі, одержимо:

$$|\langle f, u_k|u_k|^{p-2}\rangle| \leq ||f||_p||u_k|u_k|^{p-2}||_q \leq ||f||_p||u_k||^{p-1}.$$

Далі, використовуючи міркування подібні попереднім, одержимо

$$||u_k|| + ||\nabla u_k|| \leq c(\lambda, p, l, \lambda_0, N)||f||.$$

Отже, оскільки $||u_k||_{W_1^p} < C$, де стала залежить лише від функцій (структури системи рівнянь), то тоді внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ отримаємо, що існує така підпослідовність $(u_{k'}(x))$, що має місце властивість: $u_{k'} \underset{W_1^p}{\longrightarrow} u_0$ слабко і $A^p(u_{n'}) \underset{W_1^p}{\longrightarrow} y$ слабко.

Покажемо, що $y = A^p(u_0) = f$. Звідси випливатиме, що відображення $A^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням «на». Складемо інтегральні тотожності:

$$\langle A^p(u_{k'}), v_i^* \rangle = \langle f, v_i^* \rangle, i = 1, ..., k'$$

і перейдемо до границі при $k' \to +\infty$. Тоді одержимо:

$$\lim_{n\to\infty} A^p(u_{k'}) = y = f,$$

де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Використовуючи акретивність оператора $A^p(\cdot) : W_1^p(R^1, d^l x) \to W_{-1}^p(R^1, d^l x)$ в просторі $L^p(R^l, d^l x)$, маємо:

$$\lim_{k'\to\infty} \left\langle A^p(u_{k'}) - A^p(v), (u_{k'} - v)\,|u_{k'} - v|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle y - A^p(v), (u_0 - v)\,|u_0 - v|^{p-2} \right\rangle \geq 0.$$

Поклавши $v = u_0 - tz, t > 0, \quad z \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, отримаємо $\left\langle y - A^p(u_0 - tz), z\,|z|^{p-2} \right\rangle \geq 0.$

З хемінеперервності оператора $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$, враховуючи довільність елемента $z \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо $y = A^p(u_0) = f$, тобто для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{u_{k'}\}$ і доведено її збіжність до елементу $u_0 \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, отже елемент $u_0 \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ буде розв'язком системи за умов згаданих вище.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A^p(\cdot)$. Дійсно, нехай u_0, u_0' – два таких розв'язки. Тоді, справедливі рівності:

$$\langle A^p(u_0), w \rangle = f, \quad \langle A^p(u_0'), w \rangle = f \quad \forall w \in W_1^q(R^l, d^l x),$$

тобто $\langle A^p(u_0) - A^p(u_0'), w \rangle = 0.$

Поклавши $w = (u_0 - u_0')|u_0 - u_0'|^{p-2}$, отримаємо:

$$0 = \left\langle A^p(u_0) - A^p(u_0'), (u_0 - u_0')|u_0 - u_0'|^{p-2} \right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda ||u_0 - u_0'||_p^p + (p-1) \left\langle \nabla (u_0 - u_0') \circ a \circ \nabla (u_0 - u_0'), |u_0 - u_0'|^{p-2} \right\rangle -$$

$$- \left\langle \mu_4(x) \left| \nabla (u_0 - u_0') \right| + \mu_5(x) \left| u_0 - u_0' \right|, (u_0 - u_0') \left| u_0 - u_0' \right|^{p-2} \right\rangle \geq$$

$$\geq \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c(\beta)}{p} - c(\beta) \right) \|w\|^2 +$$

$$+ \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \beta \frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2 \nu} - \beta \right) \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle \geq 0,$$

що, внаслідок строгої акретивності оператора A^p еквівалентно рівності $u_0 = u_0'$, тобто розв'язки системи рівнянь співпадають.

8. Дослідження випадку вимірних коефіцієнтів. Нехай функції, що утворюють квазілінійну систему (11) є вимірними і задовольняють наведені вище умови щодо степеню росту та сингулярностей.

Введемо означення "зрізки"функції $u(x)$. Нехай $u(x)$ – вимірна за Лебегом вектор-функція на R^l розмірності N. Позначимо через u_ϑ і s_ϑ зрізку і її носій, відповідно при$i = 1, ..., N$

$$u_\vartheta = \begin{cases} u_i - \vartheta_i, u_i > \vartheta_i, \\ 0; |u_i| \leq \vartheta_i, \\ u_i + \vartheta_i, u_i < -\vartheta_i, \end{cases} \tag{18}$$

$$s_\vartheta(u) = \left\{ x \in R^l : |u_i(x)| > \vartheta_i, \vartheta_i > 0 \right\}.$$

Нехай $a^m(x)$, $f^m(x)$, $b^m(x, y, z)$ – зрізки за аргументом x функцій $a(x)$, $f(x)$, $x \in R^l$, $b(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \{R^l \times R \times R^l\}$, відповідно.

Розглянемо "гладку"апроксимацію функцій $a^m(x), ; b^m(x, y, z)$, $f^m(x)$ за аргументом x:

$$a_i^{n,m}(x) = \int_{R^l} \rho_n(x - t) a_i^m(t) dt = \rho_n * a_i^m, \tag{19}$$

де $\rho_n(t)$ – гладка невід'ємна апроксимація 1 в R^l.

Дослідження буде проводитися згідно такої схеми: система рівнянь апроксимується системою рівнянь з гладким коефіцієнтами, потім за цією апроксимуючою системою складається форми, які породжують оператори для апроксимуючих систем рівнянь, і досліджуються властивості цих операторів, тобто доводиться існування розв'язку для квазілінійної еліптичної системи за умов, що були розглянуті вище. На завершальному етапі встановлюється розв'язуваність апроксимуючих рівнянь і здійснюється перехід до границі. Перехід до границі здійснюється наступним чином спочатку знімається згладжування, тобто переходимо до границі при $n \to \infty$ потім знімаємо зрізання, тобто переходимо до границі при $m \to \infty$(послідовність граничних переходів важлива).

Розглядається система рівнянь:

$$\lambda u - d \circ a^{m,n} \circ du + b^{m,n}(x, u, \nabla u) = f^{m,n}, \lambda > 0, \tag{20}$$

і форма

$$h_\lambda^{p,mn}(u, v) = \lambda\langle u, v\rangle + \langle dv \circ a^{m,n} \circ du\rangle + \langle b^{m,n}, v\rangle. \tag{21}$$

Отже, для кожного фіксованого вектора $u \in W_1^p$ форма $h_\lambda^{p,mn}(u, v)$ є неперервним лінійним (по $v \in W_1^q$) функціоналом над W_1^q, а отже кожному $u \in W_1^p$ ставиться у відповідність елемент спряженого до W_1^q простору W_{-1}^p, тобто існує відображення $A^{p,mn} : W_1^p \to W_{-1}^p$ яке породжене даною формою.

Лема 4. *Форма $h_\lambda^{p,mn}(u, v)$, задовольняє умову коерцитивності.*

Наслідок. *Форма $h_\lambda^{p,mn}$ породжує коерцитивний оператор $A^{p,mn} : W_1^p \to W_{-1}^p$.*

Лема 5. *Оператор $A^{p,mn} : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає хемінеперевне відображення.*

Лема 6. *Оператор $A^{p,mn} : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає строго акретивне в L^p відображення.*

Теорема 2. *Система рівнянь (20) за умов (15, 15a) однозначно розв'язувана в W_1^p.*

Доведення. Цей результат доведено вище для $\forall n \in N$ і $\forall m \in R^+$.

Припустимо, що розв'язки системи $u^{m,n}(x)$ рівномірно обмежені, тобто $||u^{m,n}(x)||_{W_1^p} < c$. Внаслідок коерцитивності оператора $A^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ одержимо нерівність $||A^p(u^{m,n})||_{W_{-1}^p} \leq ||f||_{W_{-1}^p}$. Тоді згідно властивості слабкої компактності простору W_1^p існує така послідовність $n' = (m', n')$, що

$$u^{n'} \frac{\omega}{W_1^p} \to u_0, A^p(u^{n'}) \to y, n' = (m', n') \to \infty.$$

Тепер нам достатньо показати, що $A^p(u_0) = f$. Дійсно, перейдемо до границі в тотожності $\langle A^p(u_{n'}), v\rangle = \left\langle f^{n'}, v\right\rangle$. З властивостей апроксимації та умов (15, 15a) одержимо $w \xrightarrow[n' \to \infty]{} A^p(u^{n'}) = y = f$.

З іншого боку:

$$\langle A^p(u^{n'}) - A^p(v), (u^{n'} - v)|u^{n'} - v|^{p-2}\rangle \geq 0,$$

що є наслідком акретивності оператора $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ в L^p.

Покладемо $v \equiv u_0 - tz, \quad z \in W_1^p$, і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, одержимо нерівність:

$$\langle y - A^p(u_0 - tz), z|z|^{p-2}\rangle \geq 0.$$

Оскільки оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ – хемінеперервний, то переходячи до границі при $t \to 0$, остаточно одержуємо $y = A^p(u_0) = f$, тобто система рівняння (11) має єдиний розв'язок в просторі W_1^p.

Для завершення доведення залишається отримати апріорну оцінку $||u^{m,n}|| < c$.

Теорема 3. *Узагальнені розв'язки системи рівнянь (11) за умов (15) рівномірно обмежені в* W_1^p.

Доведення. Складемо інтегральні тотожності:

$$\lambda\langle u^{m,n}, \xi\rangle + \langle d\xi \circ a^{m,n} \circ du^{m,n}\rangle + \langle b^{m,n}(x, u^{m,n}, \nabla u^{m,n}), \xi\rangle \equiv \langle f^{m,n}, \xi\rangle,$$

Поклавши $\xi = u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}$, одержимо:

$$\lambda\langle u^{m,n}, u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle +$$
$$+\frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d\left(u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}\right) \circ a^{m,n} \circ d\left(u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle +$$
$$+\left\langle b^{m,n}, u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\right\rangle \equiv \left\langle f^{m,n}, u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\right\rangle.$$

З умов (15), використовуючи нерівності Юнга і Гельдера, знаходимо:

$$|\langle b^{m,n}, u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle| \leq$$
$$\leq \int_{R^l}\int_{R^l} |b^{m,n}(t)|\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \leq$$
$$\leq \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_1^m(t)\nabla u^{m,n}(x) +$$
$$+\mu_2^m(t)u^{m,n}(x) + \mu_3^m(t))\rho_n(x-t) \times \times u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \leq$$
$$\leq \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_1^m(t)|\nabla u^{m,n}(x)|\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx +$$

$$+\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_2^m(t)|u^{m,n}(x)|\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx+$$

$$+\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_3^m(t)\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_1^m(t)|\nabla W(x)|\rho_n(x-t)W(x)dtdx+$$

$$+\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_2^m(t)W^2(x)\rho(x-t)dtdx+$$

$$+\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_3^m(t)\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx,$$

можемо записати оцінку:

$$\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_2^m(t)W^2(x)\rho(x-t))dtdx=$$

$$\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\mu_2^m(t)\,|\rho_n(x-t)|\,|W(x)|^2dx\right)=$$

$$=\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\mu_2^m(t)dt\right)|\rho_n(x)|\,W^2(x-t)dx=$$

$$=\int_{R^l}|\rho_n(x)|\int_{R^l}(\mu_2^m(t)W^2(x-t)dt)dx \leq \int_{R^l}|\rho_n(x)|\,\_(\beta||\nabla W(x)||_2^2+$$

$$+c(\beta)||\nabla W(x)||_2^2)dx=\beta||\nabla W||_2^2+c(\beta)||\nabla W||_2^2,$$

оцінюємо інтеграли:

$$\int_{R^l}\int_{R^l}\mu_1^m(t)|\nabla W(x)|\rho_n(x-t)W(x)dtdx \leq$$

$$\leq\left(\int_{R^l}\int_{R^l}\rho_n(x-t)|\nabla W(x)|^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}} *$$

$$*\left(\int_{R^l}\int_{R^l}|\rho_n(x-t)|\,(\mu_1^m(t)|W(x)|)^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}},$$

де використано позначення $W=u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}$.

Далі знову використовується нерівність Юнга і форм-обмеженість функції μ_1^2. Маємо:

$$\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\rho_n(x-t)W^2(x)dx(\mu_1^m(t))^2dt\right)=$$

$$=\int_{R^l}\left(\int_{R^l}(\mu_1^m(t))^2dt\right)\rho_n(x)|W(x-t)|^2dx=$$

$$=\int_{R^l}\rho_n(x)\int_{R^l}((\mu_1^m(t))^2\,|W(x-t)|^2dt)dx\leq$$

$$\leq\int_{R^l}\rho_n(x)\_(\beta||\nabla W(x-t)||_2^2+$$

$$+c(\beta)||W(x)||_2^2)dx=\beta||\nabla W||_2^2+c(\beta)||W||_2^2.$$

Далі отримуємо

$$\int_{R^l}\int_{R^l}(\mu_3^m(t)\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx\leq$$

$$\leq\|\mu_3\|_p\left\|u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}\right\|_q=\|\mu_3\|_p\left\|u^{m,n}(x)\right\|^{p-1}$$

Використовуючи властивості “зрізки” і апроксимації функції f та застосовуючи до правої частини тотожності нерівність Гельдера, одержимо:

$$|\langle f^{m,n},u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle|\leq||f^{m,n}||_p||u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}||_q\leq$$

$$\leq||f^n||_p||u^{m,n}||^{p-1}\leq||f||_p||u^{m,n}||_p^{p-1}.$$

Далі, використовуючи нерівність Юнга, для достатньо великих m, n і міркування подібні попереднім, одержимо $||u^{m,n}||+||\nabla u^{m,n}||\leq c(\lambda,p,l,\lambda_0,N)||f||_p$.

9. Розглянемо наступний досить широкий клас скалярних квазілінійних еліптичних рівнянь (систем при $N=1$) вигляду:

$$\lambda u-\sum_{i=1,\ldots,l}\frac{d}{dx_i}a_i(x,u,\nabla u)-a(x,u,\nabla u)=0.$$

Покажемо, що рівняння даного вигляду можуть бути досліджені методами, що описані вище (при $N=1$).

Дійсно, за рівнянням складемо форму і в додамо нуль, одержимо:

$$h_\lambda^p(u, u\,|u|^{p-2}) = \lambda \left\langle u, u\,|u|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle a_i(x, u, \nabla u) \circ \nabla \left(u\,|u|^{p-2} \right) \right\rangle + \left\langle a(x, u, \nabla u), u\,|u|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \lambda \left\langle u, u\,|u|^{p-2} \right\rangle + \left\langle (a_i(x, u, \nabla u) - a_i(x, u, 0)) \circ \nabla \left(u\,|u|^{p-2} \right) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle a_i(x, u, 0) \circ \nabla \left(u\,|u|^{p-2} \right) \right\rangle + \left\langle a(x, u, \nabla u), u\,|u|^{p-2} \right\rangle,$$

далі використаємо позначення $a_0\,(x, u, \nabla u) = \frac{\partial}{\partial \nabla_j u} a_i(x, u, \theta \nabla u)$, існує таке дійсне число $\theta \in (0, 1)$, що

$$(a_i(x, u, \nabla u) - a_i(x, u, 0)) = \left(\frac{\partial}{\partial \nabla_j u} a_i(x, u, \theta \nabla u) \right) \nabla_j u =$$

$$= a_0\,(x, u, \nabla u)\,\nabla u, \quad i = 1, ..., l,$$

тоді форму породжену рівнянням можна записати у вигляді

$$h_\lambda^p(u, u\,|u|^{p-2}) = \lambda \left\langle u, u\,|u|^{p-2} \right\rangle + \left\langle \nabla u \circ a_0\,(x, u, \nabla u) \circ \nabla \left(u\,|u|^{p-2} \right) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle a_i(x, u, 0) \circ \nabla \left(u\,|u|^{p-2} \right) \right\rangle + \left\langle a(x, u, \nabla u), u\,|u|^{p-2} \right\rangle.$$

Форма складається з чотирьох доданків перший дорівнює $\lambda \|u\|^p$, другий, за умови еліптичності $\nu \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \leq \sum_{ij=1,...,l} [a_0\,(x, u, \nabla u)]_{ij} \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in R^l$, подібний до відповідного доданка в уже досліджуваному випадку, останні два можна співставити з функцією $b(x, u, \nabla u)$ з відповідними умовами. Отже, задача звилася до попередньої.

10. Висновки. Доведено існування розв'язку квазілінійної еліптичної системи рівнянь в усьому евклідовому просторі R^l вигляду:

$$\lambda u^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, u^k) \frac{\partial}{\partial x_j} u^k \right) + b^k(x, u^k, \nabla u^k) = f^k, \quad k = 1, ..., N \quad (22)$$

де невідомою є вектор-функція $u^k\,(x) = \left(u^1, ..., u^N \right)$, $\lambda > 0$ дійсне число і $f(x) = f^k = (f^1, ..., f^N) \in L^p-$ задана вектор-функція.

$b(x, u, \nabla u) = b^k(x, u^k, \nabla u^k)$ – вектор-функція довжини N.

Матриця $a_{ij}(x, u)$ розмірності $l \times l$ майже скрізь задовольняє умову еліптичності: $\exists \nu : \quad 0 < \nu < \infty$ і виконується наступна нерівність $\nu \mathrm{I} \leq a(x, u), \quad$ майже для всіх $x \in R^l$, тобто

$$\nu \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \leq \sum_{ij=1,\dots,l} a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in R^l. \tag{23}$$

Література

[1] Вишик М.Й. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.Й. Вишик // Матем. сб. - 1951. - Т. 29(71), №3. - С. 615-676.

[2] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К.Захариас. - М.:Мир, 1978. - 336 с.

[3] Гильберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д.Гильберг, Н.Трудингер. - М.: Наука, 1989. - 463 с.

[4] Дубинский Ю.А., Похожаев С.И. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений / Ю.А.Дубинский, С.И. Похожаев // Матем. сб. - 1967. - Т. 72(114), №2. - С. 226 - 236.

[5] Коваленко В.Ф., Кухарчук Н.М., Семенов Ю.А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором /В.Ф. Коваленко, Н.М.Кухарчук, Ю.А. Семенов. - Деп. в УкрНИИНТИ. - Киев, 1985. - №2380-Ук 85.

[6] Кухарчук М. М. Про розв'язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в / М.М.Кухарчук // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2004. - № 2. - С. 145-158.

[7] Кухарчук Н.М. Гладкость обобщений решений квазилинейных уравнений с непрерывными коэффициентами / М.М. Кухарчук // Труды 5-й Респ. конференции по нелинейным задачам математической физики. - Деп. в УкрНИИНТИ. - Донецк: Донецкий гос. ун-т. - 1985.

[8] Кухарчук Н.М. О принадлежности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений в дивергентной форме с разрывными коэффициентами пространству / М.М.Кухарчук. - Киев: Ин-т математики, 1986. - 48с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.13).

[9] Кухарчук Н.М. Априорные оценки обобщенных производных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка / Н.М.Кухарчук. - Киев, 1987. - 60 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.36).

[10] Кухарчук Н.М. Разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми медленно растущими коэффициентами в пространствах , / Н.М. Кухарчук. - Киев: Ин-т математики, 1988. - 52 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.61).

[11] Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про розв'язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга-Серріна в і побудову нелінійних напівгруп стиску в / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць. Рівне. - 2008. - Вип. 1(41). - С. 435-443.

[12] Кухарчук М.М., Яременко М.І. Розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння з матрицею Гільберга - Серріна в просторах Соболева / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2009. - №4. - С. 142-154.

[13] Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про гладкість розв'язків деяких квазілінійних еліптичних рівняннянь / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2008. - №4. - С. 67-71.

[14] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н.Уральцева. - М.: Наука, 1973. - 579 с.

[15] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л.Лионс. - М: Мир, 1972. - 587 с.

[16] Яременко М.І. Квазілінійні рівняння та нелінійні напівгрупи стиску / М.І. Яременко. - К.: НТУУ "КПІ 2013. - 201 с.

[17] Яременко М.І. Напівгрупи та їх застосуванняу дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь / М.І. Яременко. - К.: НАН України, Інститут математики, 2014. - 246 с.

[18] Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces / V.Barbu. - Legden: Nordhoff International Publiching, 1976. - 352 p.