Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 54–67

УДК 531.383:62.50

О.П. Коломійчук

Ін-т математики НАН України, Київ
E-mail: kolomithyk@rambler.ru

Особливості побудови спостережника зниженого порядку для майже консервативних динамічних систем

Враховуючи особливості структури майже консервативної динамічної системи побудовано фільтр Луінбергера зниженого порядку. Показано, що розвязуючи задачу побудови фільтра, слід звертати увагу на парність останнього. Алгоритм побудови фільтра значно спрощено, порівняно з загальним випадком, завдяки спеціальній формі Коші, притаманній майже консервативним моделям. Стаття є продовженням роботи [1].

В роботі [1] розглянуто загальний алгоритм побудови спостережника зниженого порядку для стаціонарної майже консервативної динамічної системи вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{z} = (A_0 + \varepsilon A_1)z + Bu, \quad z(t_0) = z_0, \\ &Y = \varepsilon C z, \end{aligned} \tag{1}$$

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

де t_0 — початковий момент часу, $z(t) \in \Re_{2n}$ — вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця, $A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ — матриця-збурення, $u \in \Re_m$ — вектор керування, $\in \Re_{2n\times m}$ — матриця при керуванні, $Y \in \Re_l$ — вихідний сигнал об'єкта $(l < 2n)$, $\in \Re_{l\times 2n}$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, виявилось, що кількість лінійно незалежних спостережень системи визначає його порядок. Спостережник, може бути, як парного порядку, так і непарного. В зв'язку з цим, слід ці два випадки досліджувати окремо і для кожного з них розробити процедуру вибору матриці K. Покажемо як це робиться.

Випадок 1. Кількість лінійно незалежних спостережень парна. Матриця $\widetilde{A}_0 = -\widetilde{A}_0^T$ буде парного рангу і невиродженою. У цьому випадку спостережник є майже консервативним.

Система, щодо вектора невідомих параметрів α які використовуються для побудови розв'язку, у матричні формі, для випадку 1, матиме вигляд:

$$H\alpha = q, \tag{2}$$

де

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{2(m-1)}]^T,$$

$$q = -[tr(Q_1), tr((A_{22}^0)^2 Q_1), ..., tr((A_{22}^0)^{2m} Q_1)]^T,$$

$$H = \begin{bmatrix} tr(\widetilde{A}_1) & tr((A_{22}^0)^2\widetilde{A}_1) & \dots & tr((A_{22}^0)^{2(m-1)}\widetilde{A}_1) \\ tr((A_{22}^0)^2\widetilde{A}_1) & tr((A_{22}^0)^4\widetilde{A}_1) & \dots & tr((A_{22}^0)^{2m}\widetilde{A}_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ tr((A_{22}^0)^{2(m-1)}\widetilde{A}_1) & tr((A_{22}^0)^{2m}\widetilde{A}_1) & \dots & tr((A_{22}^0)^{4(m-1)}\widetilde{A}_1) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

де $2m = 2n - l$ та $\widetilde{A}_1 = A_{22}^1 - KA_{12}^0$.

Розв'язуючи її знаходимо таку матрицю K, яка забезпечить єдиність розв'язку та додатну визначеність матриці P_0, що означатиме асимтотичну стійкість рівнянню похибки спостережника.

Випадок 2. Кількість лінійно незалежних спостережень непарна. Матриця $\widetilde{A}_0 = -\widetilde{A}_0^T$ – вироджена і нехай має одне нульове власне значення. Система (1) вже не є майже консервативною.

У цьому випадку проведемо декомпозицію системи (1), виділивши в ній майже консервативну динамічну підсистему за допомогою відповідної ортогональної матриці перетворення $\widetilde{T} \in \Re_{(2n-l)\times(2n-l)}$ [7] такої, що:

$$\Phi = \widetilde{T}\widetilde{A}_0\widetilde{T}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_0 \end{bmatrix}, \quad (\widetilde{T}\widetilde{T}^T = I), \tag{4}$$

де $\Phi_0 = -\Phi_0^T \in \Re_{(2n-l-1)\times(2n-l-1)}$.

Домножимо (4) з ліва на матрицю $\widetilde{T}$ та справа на матрицю $\widetilde{T}^T$ і позначимо через

$$\Pi = \widetilde{T}P\widetilde{T}^T, \quad \Theta = \widetilde{T}Q\widetilde{T}^T$$

$$A = \widetilde{T}\widetilde{A}_1\widetilde{T}^T = \widetilde{T}(A_{22}^1 - K(A_{12}^0 + \varepsilon A_{12}^1))\widetilde{T}^T = \widetilde{A}_{22}^1 - \widetilde{K}(\widetilde{A}_{12}^0 + \varepsilon \widetilde{A}_{12}^1),$$

матимемо

$$(\Phi + \varepsilon A)^T\Pi + \Pi(\Phi + \varepsilon A) = -2\Theta. \tag{5}$$

Подамо матриці Π, Θ та A у блочному вигляді, де розміри блоків узгоджено з:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} (\widetilde{A}_{22}^1)_{11} & (\widetilde{A}_{22}^1)_{12} \\ (\widetilde{A}_{22}^1)_{21} & (\widetilde{A}_{22}^1)_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{K}_1 \\ \widetilde{K}_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} (\widetilde{A}_{12}^0)_1 & (\widetilde{A}_{12}^0)_2 \end{bmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon \begin{bmatrix} (\widetilde{A}_{12}^1))_1 & (\widetilde{A}_{12}^1))_2 \end{bmatrix} \right) \right) = \tag{6}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} (\widetilde{A}_{22}^1)_{11} & (\widetilde{A}_{22}^1)_{12} \\ (\widetilde{A}_{22}^1)_{21} & (\widetilde{A}_{22}^1)_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{K}_1(\widetilde{A}_{12}^0)_1 & \widetilde{K}_1(\widetilde{A}_{12}^0)_2 \\ \widetilde{K}_2(\widetilde{A}_{12}^0)_1 & \widetilde{K}_2(\widetilde{A}_{12}^0)_2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \begin{bmatrix} \widetilde{K}_1(\widetilde{A}_{12}^1))_1 & \widetilde{K}_1(\widetilde{A}_{12}^1))_2 \\ \widetilde{K}_2(\widetilde{A}_{12}^1))_1 & \widetilde{K}_2(\widetilde{A}_{12}^1))_2 \end{bmatrix} \right).$$

Зауважимо, що Π_{11}, Θ_{11}, $(\widetilde{A}^1_{22})_{11}$, $\widetilde{K}_1$, $(\widetilde{A}^0_{12})_1$ та $(\widetilde{A}^1_{12})_1 \in \Re_1$. Рівняння (5) у блочному вигляді буде таким

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = -2 \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

Запишемо це рівняння Ляпунова у вигляді системи

$$\begin{gathered} \varepsilon(A_{11}\Pi_{11} + A_{21}^T \Pi_{12}^T + \Pi_{11} A_{11} + \Pi_{12} A_{21}) = -2\Theta_{11}, \\ \Pi_{12}\Phi_0 + \varepsilon(A_{11}\Pi_{12} + A_{21}^T \Pi_{22} + \Pi_{11} A_{12} + \Pi_{12} A_{22}) = -2\Theta_{12}, \\ \Phi_0^T \Pi_{22} + \Pi_{22}\Phi_0 + \varepsilon(A_{12}^T \Pi_{12} + A_{22}^T \Pi_{22} + \Pi_{12}^T A_{12} + \Pi_{22} A_{22}) = -2\Theta_{22}. \end{gathered} \tag{8}$$

Подамо матриці Π_{ij} рядами за ступенями ε

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^0 + \varepsilon \Pi_{ij}^1 + ... \tag{9}$$

та

$$\Theta_{ij} = \varepsilon \Theta_{ij}^1 + \varepsilon^2 \Theta_{ij}^2 + ... \tag{10}$$

Ряди (9) та (10) є збіжними згідно з теоремою Пуанкаре.

Отже, маємо

$$A_{11}(\Pi_{11}^0 + \varepsilon \Pi_{11}^1 + ...) + A_{21}^T(\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...)^T + (\Pi_{11}^0 + \varepsilon \Pi_{11}^1 +$$
$$+ ...)A_{11} + (\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...)A_{21} = -2(\Theta_{11}^1 + \varepsilon \Theta_{11}^2 + ...),$$

$$\begin{gathered} (\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...)\Phi_0 + \varepsilon(A_{11}(\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...) + \\ + A_{21}^T(\Pi_{22}^0 + \varepsilon \Pi_{22}^1 + ...) + (\Pi_{11}^0 + \varepsilon \Pi_{11}^1 + ...)A_{12} + \\ + (\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...)A_{22}) = -2(\varepsilon \Theta_{12}^1 + \varepsilon^2 \Theta_{12}^2 + ...), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\Phi_0^T(\Pi_{22}^0 + \varepsilon \Pi_{22}^1 + ...) + (\Pi_{22}^0 + \varepsilon \Pi_{22}^1 + ...)\Phi_0 + \varepsilon(A_{12}^T(\Pi_{12}^0 + \varepsilon \Pi_{12}^1 + ...) +$$

$$+A_{22}^T(\Pi_{22}^0+\varepsilon\Pi_{22}^1+...)+(\Pi_{12}^0+\varepsilon\Pi_{12}^1+...)^TA_{12}+(\Pi_{22}^0+$$
$$+\varepsilon\Pi_{22}^1+...)A_{22})=-2(\varepsilon\Theta_{22}^1+\varepsilon^2\Theta_{22}^2+...).$$

Звідси для другого рівняння матимемо таку нескінченну систему рівнянь, щодо Π_{12}^k, Π_{22}^k, де $k=0,1...$:

$$\begin{gathered}\Pi_{12}^0\Phi_0=0,\\ \Pi_{12}^1\Phi_0+A_{11}\Pi_{12}^0+A_{21}^T\Pi_{22}^0+\Pi_{11}^0A_{12}+\Pi_{12}^0A_{22}=-2\Theta_{12}^0,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ \Pi_{12}^i\Phi_0+A_{11}\Pi_{12}^{i-1}+A_{21}^T\Pi_{22}^{i-1}+\Pi_{11}^{i-1}A_{12}+\Pi_{12}^{i-1}A_{22}=-2\Theta_{12}^{i-1},\\ \cdots\cdots\cdots.\end{gathered}\tag{12}$$

Оскільки $det(\Phi_0)\neq 0$, то, використовуючи перше рівняння нульового наближення, $(\varepsilon=0)$ отримуємо

$$\Pi_{12}^0=0.\tag{13}$$

Повертаючись до (11), з першого рівняння, матимемо нескінченну систему рівнянь, щодо Π_{11}^k, Π_{12}^k, де $k=0,1...$,

$$\begin{gathered}A_{11}\Pi_{11}^0+\Pi_{11}^0A_{11}=-2\Theta_{11}^1,\\ A_{11}\Pi_{11}^1+A_{21}^T(\Pi_{12}^1)^T+\Pi_{11}^1A_{11}+\Pi_{12}^1A_{21}=-2\Theta_{11}^2,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ A_{11}\Pi_{11}^i+A_{21}^T(\Pi_{12}^i)^T+\Pi_{11}^iA_{11}+\Pi_{12}^iA_{21}=-2\Theta_{11}^{i+1},\\ \cdots\cdots\cdots,\end{gathered}\tag{14}$$

за допомогою якої, враховуючи (13) і той факт, що Π_{11}^0, Θ_{11}^1 та $A_{11}\in\Re_n$, знаходимо

$$\Pi_{11}^0=-\frac{\Theta_{11}^1}{A_{11}}=-\frac{\Theta_{11}^1}{(\widetilde{A}_{22}^1)_{11}+\widetilde{K}_1\ (\widetilde{A}_{12}^0)_1}.\tag{15}$$

Обираємо $\widetilde{K}_1$, щоб забезпечити додатність Π_{11}^0.

З останнього рівняння (11), отримуємо таку нескінченну систему

$$\Phi_0^T \Pi_{22}^0 + \Pi_{22}^0 \Phi_0 = 0,$$
$$\Phi_0^T \Pi_{22}^1 + \Pi_{22}^1 \Phi_0 + A_{22}^T \Pi_{22}^0 + \Pi_{22}^0 A_{22} = -2\Theta_{22}^1,$$
$$\Phi_0^T \Pi_{22}^2 + \Pi_{22}^2 \Phi_0 + A_{12}^T \Pi_{12}^1 + A_{22}^T \Pi_{22}^1 + (\Pi_{12}^1)^T A_{12} + \Pi_{22}^1 A_{22} = -2\Theta_{22}^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad (16)$$
$$\Phi_0^T \Pi_{22}^i + \Pi_{22}^i \Phi_0 + A_{12}^T \Pi_{12}^{i-1} + A_{22}^T \Pi_{22}^{i-1} + (\Pi_{12}^{i-1})^T A_{12} +$$
$$+ \Pi_{22}^{i-1} A_{22} = -2\Theta_{22}^i,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Для визначення Π_{22}^0 слід скористатись першим і другим рівняннями, останньої системи.

Система, щодо вектора невідомих параметрів α, у матричній формі, для випадку 2, матиме вигляд:

$$H\alpha = q, \qquad (17)$$

де

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{2(s-1)}]^T,$$
$$q = -[tr(\Theta_{22}^1), tr(\Phi_0^2 \Theta_{22}^1), ..., tr(\Phi_0^{2(s-1)} \Theta_{22}^1)]^T,$$
$$H = \begin{bmatrix} tr(A_{22}) & tr(\Phi_0^2 A_{22}) & \dots & tr(\Phi_0^{2(s-1)} A_{22}) \\ tr(\Phi_0^2 A_{22}) & tr(\Phi_0^4 A_{22}) & \dots & tr(\Phi_0^{2s} A_{22}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ tr(\Phi_0^{2(s-1)} A_{22}) & tr(\Phi_0^{2s} A_{22}) & \dots & tr(\Phi_0^{4(s-1)} A_{22}) \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

де $2s = 2n - l - 1$ та $A_{22} = (\widetilde{A}_{22}^1)_{22} + \widetilde{K}_2 (\widetilde{A}_{12}^0)_2$.

Елементи $\widetilde{K}_2$, знаходяться як такі, що допомагають забезпечити додатну визначеність симетричній матриці Π_{22}^0.

Якщо матриця $\widetilde{A}_0$ має $d > 1$ — нульових власних значень, то задача розв'язується аналогічно випадку єдиного нульового власного значення.

Для зручності користування, розвинені дослідження, викладемо у вигляді наступного алгоритму:

Алгоритм. *Побудова спостережника пониженого порядку для МКДС*

1. Перевірити спостережність системи.

2. Провести перетворення, щоб виконувалась умова $C = [I_l; 0]$.

3. Сформувати відповідні матриці.

4. Якщо спостережник парного порядку:

4.1 Записати матрицю P_0 у вигляді многочлена від $\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{2(n-1)}$.

4.2 Обчислити матрицю H та вектора q згідно (3).

4.3 Перевірити ранг матриці H.

4.4 У разі якщо H не повного рангу підібрати вектор q, таким чином, щоб виконувалась умова повного рангу.

4.5 Знайти вектор α.

4.6 Обрати елементи матриці K (які входять до α) такі, щоб матриця P_0 була додатно визначеною.

5. Якщо спостережник непарного порядку:

5.1 Провести декомпозицію початкової системи, виділивши в ній майже консервативну динамічну підсистему за допомогою відповідної ортогональної матриці перетворення $\widetilde{T}$.

5.2 Обрати елемент (елементи) матриці $\widetilde{K_1}$ який забезпечить додатну визначеність Π_{11}^0.

5.3 Записати матрицю Π_{22}^0 у вигляді многочлена від $\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{2(n-1)}$.

5.4 Обчислити матрицю H та вектора q.

5.5 Перевірити ранг матриці H.

5.6 У разі якщо H не повного рангу підібрати вектор q, таким чином, щоб H була повного рангу.

5.7 Знайти вектор α розв'язуючи (17).

5.8 Обрати елементи матриці $\widetilde{K_2}$ (які входять до α), такі щоб матриця Π_{22}^0 була додатно визначеною.

6. Визначити неспостережні координати вектора стану $\hat{x}_2$, за допомогою співвідношення

$$\hat{x}_2 = q - \varepsilon K y. \tag{19}$$

Після застосування цього алгоритму, система із спостережником пониженого порядку набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}\right) x + \varepsilon \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \\
&y = \varepsilon \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix} x, \\
&\dot{q} = \Big[(A_{22}^0 + \varepsilon A_{22}^1) - \varepsilon K (A_{12}^0 + \varepsilon A_{12}^1)\Big] q + \Big[\varepsilon (A_{22}^0 + \varepsilon A_{22}^1) K - \\
&-(A_{21}^0 + \varepsilon A_{21}^1) - \varepsilon K (A_{11}^0 + \varepsilon A_{11}^1) - \varepsilon^2 K (A_{12}^0 + \varepsilon A_{12}^1) K\Big] y + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \Big[B_2 + \varepsilon K B_1\Big] u, \\
&\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ q + \varepsilon K y \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Побудова спостережника пониженого порядку для моделі гіроскопічного компаса. Для моделі гіроскопічного компаса побудуємо спостережник пониженого порядку застосовуючи теорію цього параграфа.

Модель гіроскопічного компаса у вигляді Коші, з відповідними матрицями має вигляд

$$\begin{gathered} \dot{z} = (F_0 + \varepsilon F_1) x + D u, \\ y^* = \varepsilon G z \end{gathered} \tag{21}$$

де

$$z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T, u = [u_2, u_3]^T$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3 \\ 0 & 0 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ d_2 & 0 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\nu^2 - \Omega^2}, \quad \omega_2 = \sqrt{p^2 - \Omega^2}, \quad \omega_3 = 2\nu.$$

Нехай матриця спостережень буде наступною

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_2 & g_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Використовуючи алгоритм, матимемо:

1. Легко показати що система є спостережною.
2. Зведемо матриці системи перетвореннями

$$T_1 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & g_2\sqrt{t_1} & g_3\sqrt{t_1} & 0 \\ g_2\sqrt{t_1} & g_3^2 & -g_2 g_3 & 0 \\ g_3\sqrt{t_1} & -g_2 g_3 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \sqrt{t_1},$$

де

$$t_1 = g_2^2 + g_3^2,$$

до вигляду

$$A_0 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & -g_2 g_3 \omega_1 & -g_3^2\omega_1 & g_2\omega_2\sqrt{t_1} \\ g_2 g_3 \omega_1 & 0 & g_2\omega_1\sqrt{t_1} & g_3^2\omega_2 \\ g_3^2\omega_1 & -g_2\omega_1\sqrt{t_1} & 0 & -g_2 g_3\omega_2 \\ -g_2\omega_2\sqrt{t_1} & -g_3^2\omega_2 & g_2 g_3\omega_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_3\omega_3\sqrt{t_1} \\ 0 & 0 & 0 & -g_2 g_3\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & g_2^2\omega_3 \\ -g_3\omega_3\sqrt{t_1} & g_2 g_3\omega_3 & -g_2^2\omega_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} g_3 d_2\sqrt{t_1} & 0 \\ -g_2 g_3 d_2 & 0 \\ g_2^2 d_2 & 0 \\ 0 & d_3 t_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Матриці спостережника такі

$$A_{22}^0 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & g_2\omega_1\sqrt{t_1} & g_3^2\omega_2 \\ -g_2\omega_1\sqrt{t_1} & 0 & -g_2g_3\omega_2 \\ -g_3^2\omega_2 & g_2g_3\omega_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22}^1 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_2g_3\omega_3 \\ 0 & 0 & g_2^2\omega_3 \\ g_2g_3\omega_3 & -g_2^2\omega_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}^0 = \frac{1}{t_1}\begin{bmatrix} -g_2g_3\omega_1 & -g_3^2\omega_1 & g_2\omega_2\sqrt{t_1} \end{bmatrix}.$$

4. Спостережник непарного порядку.

5. Знайдемо матрицю K, розв'язуючи.

5.1 Проведемо декомпозицію системи, виділивши в ній майже консервативну динамічну підсистему за допомогою відповідної матриці перетворення

$$\widetilde{T} = \frac{1}{t_2}\begin{bmatrix} g_3^2\omega_2\sqrt{t_1}g_2\omega_1 & 0 & -\omega_1^2g_2g_3^2\omega_2 \\ \omega_1\sqrt{t_1}g_3^3\omega_2 & \frac{t_1t_2}{g_3^2\omega_2} & t_1g_3^2\omega_2 \\ t_1g_3\omega_1^2g_2 & -\frac{\sqrt{t_1}t_2}{g_2\omega_1} & t_1^{\frac{3}{2}}g_2\omega_1 \end{bmatrix},$$

де $t_2 = g_2^4\omega_1^2 + g_2^2\omega_1^2g_3^2 + g_3^4\omega_2^2$.

Завдяки перетворенню $\widetilde{T}$ матимемо

$$A_{22}^0 = \frac{1}{g_3\omega_1\sqrt{t_1}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2g_3^2 - t_1 \\ 0 & \omega_1^2g_3^2 + t_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22}^1 = \frac{\omega_3}{t_1t_2}\begin{bmatrix} -g_3^4g_2^2\omega_1^2\omega_2 & g_3^3g_2^3\omega_1^2\omega_2 & -g_3^3g_2^2\omega_1\omega_2\sqrt{t_1} \\ 0 & 0 & g_2^2t_2 \\ g_3^3g_2^2\omega_1\omega_2\sqrt{t_1} & -g_3^2g_2^3\omega_1\omega_2\sqrt{t_1} & -g_3^4g_2^2\omega_1^2\omega_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}^0 = \frac{1}{t_1t_2}\begin{bmatrix} a_{11} & a12 & a13 \end{bmatrix},$$

де $a_{11} = g_2^2g_3^3\omega_1^2\omega_2\sqrt{(}t_1)(\omega_2 - 1)$, $a_{12} = -g_3^2\omega_1t_2$, $a_{13} = g_2^2g_3^2\omega_1\omega_2(g_3^2\omega_1^2 + \omega_2t_1)$,

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \quad \widetilde{K} = \begin{bmatrix} \widetilde{k}_1 \\ \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}.$$

5.2. Отже, отримаємо

$$\Pi_{11}^0 = \frac{\theta_1}{\frac{-g_3^4 g_2^2 \omega_1^2 \omega_2 \omega_3}{t_1 t_2} + \widetilde{k}_1 \frac{g_2^2 g_3^3 \omega_1^2 \omega_2 (\omega_2 - 1)}{\sqrt{t_1 t_2}}},$$

$$\widetilde{k}_1 < \frac{g_3 \omega_3}{\sqrt{t_1}(\omega_2 - 1)}.$$

Оскільки $\omega_2 = \sqrt{p^2 - \Omega^2} < 1$, то $\widetilde{k}_1$ може приймати лише від'ємні значення.

5.3 Матриця Π_{22}^0 матиме вигляд

$$\Pi_{22}^0 = \alpha_0 I_2,$$

або

$$\Pi_{22}^0 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}.$$

5.4 У нашому випадку матриця H та вектор q такі

$$H = \frac{\widetilde{k}_2 t_3 - \widetilde{k}_3 t_4 - t_5}{t_1 t_2}, \quad q = -q2 - q3,$$

де $0 < t_3 = g_3^2 t_2 \omega_1$, $0 < t_4 = g_3^4 g_2^2 \omega_1^3 \omega_2 + g_3^2 g_2^2 \omega_1 \omega_2^2 t_1$, $0 < t_5 = = g_3^4 g_2^2 \omega_1^2 \omega_2 \omega_3$.

5.5

$$det(H) = \frac{\widetilde{k}_2 t_3 - \widetilde{k}_3 t_4 - t_5}{t_1 t_2}.$$

5.6 H — повного рангу.

5.7 Маємо

$$\alpha_0 = \frac{t_1 t_2 (q2 + q3)}{-\widetilde{k}_2 t_3 + \widetilde{k}_3 t_4 + t_5}.$$

5.8 Елемент p_1 з матриці Π_{22}^0 буде таким

$$p_1 = \frac{t_1 t_2 (q2 + q3)}{-\widetilde{k}_2 t_3 + \widetilde{k}_3 t_4 + t_5}.$$

Враховуючи, що t_1, t_2, q_2, q_3, t_3, t_4, t_5 — додатні, то елементи матриці K_2 задовольняють нерівності $-\widetilde{k}_2 t_3 + \widetilde{k}_3 t_4 + t_5 > 0$.

Двохроторний гіроскопічний компас із спостережником пониженого порядку має вигляд:

$$\dot{x} = \tfrac{1}{t_1}\left(\begin{bmatrix} 0 & -g_2 g_3 \omega_1 & -g_3^2 \omega_1 & g_2 \omega_2 \sqrt{t_1} \\ g_2 g_3 \omega_1 & 0 & g_2 \omega_1 \sqrt{t_1} & g_3^2 \omega_2 \\ g_3^2 \omega_1 & -g_2 \omega_1 \sqrt{t_1} & 0 & -g_2 g_3 \omega_2 \\ -g_2 \omega_2 \sqrt{t_1} & -g_3^2 \omega_2 & g_2 g_3 \omega_2 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_3 \omega_3 \sqrt{t_1} \\ 0 & 0 & 0 & -g_2 g_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & g_2^2 \omega_3 \\ -g_3 \omega_3 \sqrt{t_1} & g_2 g_3 \omega_3 & -g_2^2 \omega_3 & 0 \end{bmatrix} x +$$

$$\left. +\varepsilon \begin{bmatrix} g_3 d_2 \sqrt{t_1} & 0 \\ -g_2 g_3 d_2 & 0 \\ g_2^2 d_2 & 0 \\ 0 & d_3 t_1 \end{bmatrix} u \right),$$

$$y = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

$$\dot{q} = \tfrac{1}{t_1} \left[\begin{bmatrix} 0 & g_2 \omega_1 \sqrt{t_1} & g_3^2 \omega_2 \\ -g_2 \omega_1 \sqrt{t_1} & 0 & -g_2 g_3 \omega_2 \\ -g_3^2 \omega_2 & g_2 g_3 \omega_2 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+\varepsilon \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_2 g_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & g_2^2 \omega_3 \\ g_2 g_3 \omega_3 & -g_2^2 \omega_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{k}_1 \\ \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left.\times \begin{bmatrix} -g_2g_3\omega_1 & -g_3^2\omega_1 & g_2\omega_2\sqrt{t_1} \end{bmatrix}\right)q+$$

$$+\left[\frac{\varepsilon}{t_1}\begin{bmatrix} 0 & g_2\omega_1\sqrt{t_1} & g_3^2\omega_2 \\ -g_2\omega_1\sqrt{t_1} & 0 & -g_2g_3\omega_2 \\ -g_3^2\omega_2 & g_2g_3\omega_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{k}_1 \\ \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}-\right.$$

$$-\frac{1}{t_1}\left(\begin{bmatrix} g_2g_3\omega_1 \\ g_3^2\omega_1 \\ -g_2\omega_2\sqrt{t_1} \end{bmatrix}+\right. \tag{24}$$

$$\left.\left.+\varepsilon\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_3\omega_3\sqrt{t_1} \end{bmatrix}\right)-\varepsilon\begin{bmatrix} \widetilde{k}_1 \\ \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}\right]y+\frac{\varepsilon}{t_1}\begin{bmatrix} -g_2g_3d_2 & 0 \\ g_2^2d_2 & 0 \\ 0 & d_3t_1 \end{bmatrix}u,$$

$$\hat{x}=\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ q+\varepsilon\begin{bmatrix} \widetilde{k}_1 \\ \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}y \end{bmatrix}.$$

Література

[1] *Коломійчук О.П.* Спостережники зниженого порядку для майже консервативних динамічних систем // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 3. — С. 65–70.

[2] *Квакернак Х.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

[3] *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. Пер. с англ. / Под ред. Г.И. Марчука. — М.: Мир, Редакция литературы по математическим наукам. — 1980. — 454 с.

[4] *Новицький В.В.* Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. — Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2008 — **78**. — 124 с.

[5] *Новицький В.В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. — Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2008: — **77**. — 252 с.

[6] *Новицький В.В.* Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. — К. — 2004. — 33 с. — (Препр., НАН України. Ін-т математики; 2004.7.)

[7] *Жуковська О.А.* Нестаціонарна ортогональна декомпозиція економічних моделей // Збірник наукових праць викладачів і аспірантів факультету менеджменту та маркетингу / Редкол.: В. Д. Немцов та ін. — К.: ІВЦ "Видавництво "Політехніка" ". — 2002.— С. 214–217.

[8] *Пейтел Р.В.* Алгоритмы размещения собственных значений в многосвязанных системах // Автоматизированое проектирование систем управления. — М. Машиностроение, 1989. — С. 280–309.

[9] *Luinberger D.G.* Observing for multivariable systems // IEEE Trans. Autom. Control., 11, 1966: — 190–197 pp.

[10] *Cumming S. D.* Design of observers of reduced dunamics / S. D. Cumming Electron. Letters, 5, 10, 1969: — 213–214 pp.

[11] *Wonham W. M.* Dynamic observers-Geometric theory // IEEE Trans. Autom. Control., 15, 2, 1970: 258–259 pp.

[12] *Мороз А. И.* Курс теории систем // Учеб. пособие для вузов спец. "Прикл. математика". — М.: Высш. шк., 1987. — 304 с.