

УДК 532.595

*А.В. Константинов**, *О.С. Лимарченко***,
*И.Ю. Семенова***

**Ин-т математики НАН Украины, Киев*

E-mail: akonst.im@mail.ru

***Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко, Киев*

E-mail: olelim2010@yahoo.com

Вынужденные нелинейные колебания жидкости в резервуаре параболической формы

Исследуется задача выхода на установившийся режим системы параболический резервуар – жидкость. Движение системы возбуждается гармонической силой в горизонтальном направлении. Процесс волнообразования изучается на основе нелинейной многомодовой модели совместного движения резервуара и жидкости. Показано, что при соотношении масс резервуара и жидкости 0,5 и больше наблюдается периодическая модуляция при частотах в окрестности резонанса, до этого порогового значения периодические движения проявляются только для частот силового возбуждения, больших резонансной частоты колебаний основного тона системы.

Введение. Рассматривается задача о вынужденных колебаниях идеальной жидкости со свободной поверхностью в резервуаре параболической формы под действием горизонтальной гармонической силы. На основе математической модели, учитывающей большое количество форм, исследуется возможность выхода механической системы

© А.В. Константинов, О.С. Лимарченко,
И.Ю. Семенова, 2014

на установившийся режим. Отмечены особенности развития динамических процессов рассматриваемой системы при частотах близких к частоте основного резонанса, до- и зарезонансных. Исследование поведения жидкости со свободной поверхностью производилось для разных соотношений масс резервуара и жидкости в рамках модели совместного движения резервуара и жидкости.

Математическая модель механической системы “резервуар – жидкость со свободной поверхностью”. Поведение системы исследовалось на основе нелинейной математической модели динамики совместного движения ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью и резервуара параболической формы [1, 2, 7]. Нелинейная дискретная модель динамики системы строилась на основе вариационного принципа Гамильтона - Остроградского с предварительным аналитическим удовлетворением всех кинематических граничных условий задачи. Полученные по такому алгоритму уравнения Лагранжа второго рода в амплитудных параметрах a_i движения свободной поверхности жидкости и параметрах несущего тела $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ri}^1 + \sum_j a_j V_{rij}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j V_{rijk}^3 \right\} + \quad (1) \\ & + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{U}_r^1 + \sum_i a_i \vec{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}_{rijk}^4 \right\} = \\ & = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijk}^{3*} - g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} W_{ijk}^4 \right\}, \\ & \frac{\rho}{M_T + M_F} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{U}_{i,j}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} = \quad (2) \\ & = \frac{\vec{F}}{M_T + M_F} - g\vec{k} - \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ij}^2 + 2 \sum_k \dot{a}_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}, \end{aligned}$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения, M_T – масса резервуара; M_F – масса жидкости; $\vec{k} = (0, 0, 1)$ – направляющий вектор координатной оси OZ , $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор перемещения резервуара; \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на резервуар.

Приведенная система $N + 3$ уравнений представляет собой нелинейную дискретную модель динамики поступательного движения резервуара с частично заполняющей его жидкостью, где N – количество учитываемых форм колебаний свободной поверхности жидкости. При построении этой нелинейной модели принимались такие предположения: жидкость идеальная, однородная, несжимаемая и в начальный момент времени ее вихревое движение отсутствует, нелинейности учитывались до третьего порядка малости включительно. Стенки бака рассматривались как абсолютно жесткие, его перемещение считается конечным.

На основе описанной математической модели был разработан алгоритм для проведения вычислительных экспериментов, который позволяет определить:

- амплитуды всех учитываемых форм колебаний;
- картины волн на свободной поверхности жидкости;
- параметры поступательного движения резервуара;
- поле давления жидкости;
- главный вектор сил давления жидкости на стенки резервуара (силовой отклик жидкости).

Исследование выхода движения на установившийся режим.

Рассмотрим параболический резервуар с вертикальной продольной осью и уравнением образующей стенки $r = \sqrt{z + H}$. Резервуар массой M_T частично заполнен жидкостью массой M_F до глубины $H = 1$ м. В начальный момент резервуар с жидкостью неподвижен, а возмущения свободной поверхности жидкости отсутствуют. Исследуем поведение системы “параболический резервуар – жидкость со свободной поверхностью” при воздействии гармонической силы в горизонтальном направлении $F_x = A \sin(\omega t)$, где амплитуда внешней силы $A = 0,4$ Н, а соотношение массы резервуара к массе жидкости

$M_T = 0,01M_F$. Процесс колебаний рассматривался на интервале времени 100 периодов колебаний по главной форме.

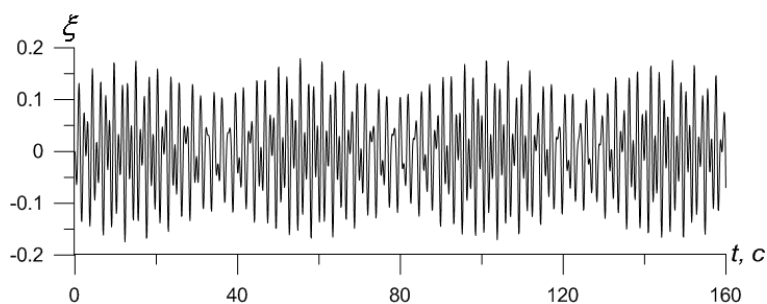


Рис. 1 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара на полном интервале наблюдения при возбуждении движения на околорезонансной частоте при соотношении масс

$$M_T = 0,01M_F$$

Рассмотрим амплитуды возмущений на стенке бака в зависимости от частоты. На Рис. 1 представлено изменение колебаний для случая околорезонансной частоты (3,57 Гц) на временном промежутке 176 с. Из Рис. 1 видно, что для колебаний характерна модуляция при неизменном среднем значении амплитуд. Для более детального изучения колебаний рассмотрим график на Рис. 2, где показано изменение амплитуд на более коротком временном промежутке. Как видно из графика, выход на установившийся режим колебаний не происходит. График зависимости от времени по первой форме значительно искажен влиянием более высоких гармоник и изменением амплитуды. Наличие двугорбых пиков и супергармоник свидетельствует о том, что выход на стационарный режим колебаний не происходит. При этом колебания супергармоник происходят на собственных частотах. Отметим, что такая форма движения опускалась при анализе

установившихся режимов в исследованиях [3, 4].

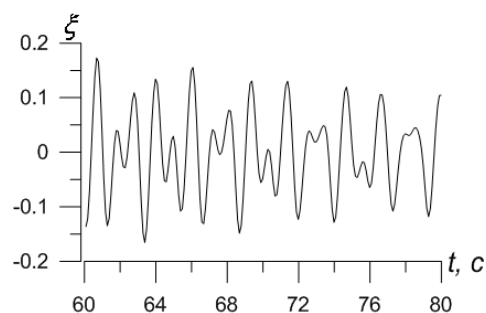


Рис. 2 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара на временном интервале 60 – 80 с при возбуждении движения на околорезонансной частоте при соотношении масс $M_T = 0,01M_F$

Проанализируем поведение системы для случая, когда частота внешней силы больше резонансной и равна 5 Гц, амплитуда при этом 0,15 Н (Рис. 3). Для данного графика характерна выраженная модуляция при среднем значении амплитуды. График на Рис. 4 демонстрирует картину развития этого же процесса на более коротком временном промежутке. График иллюстрирует модуляционную периодичность с периодом равным четырем периодам первой формы. Характер графика является следствием того, что влияние старших гармоник значительно меньше, чем в первом случае.

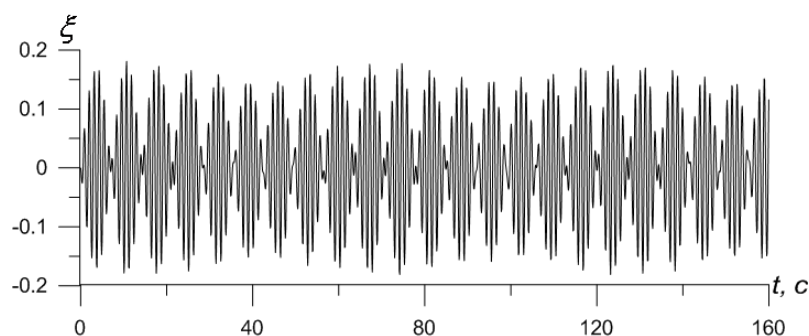


Рис. 3 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара на полном интервале наблюдения при возбуждении

движения на зарезонансной частоте при соотношении масс
 $M_T = 0,01M_F$

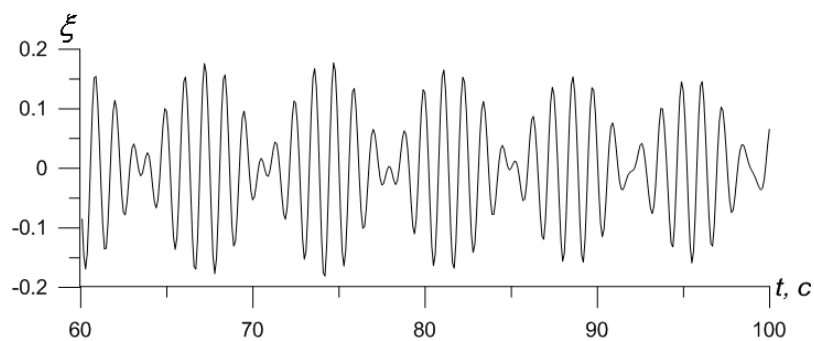


Рис. 4 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара на временном интервале 60 – 80 с при возбуждении движения на зарезонансной частоте при соотношении масс
 $M_T = 0,01M_F$

Также изучался случай возбуждения движения с частотой меньше резонансной частоты системы. На Рис. 5 показано изменение колебаний при частоте внешней силы 2,5 Гц при амплитуде 0,4 Н. График на Рис. 5 показывает еще большее влияние высших гармоник, чем при частотах, близких к частоте резонанса по главной форме. В этом случае выход на установившийся режим также не происходит.

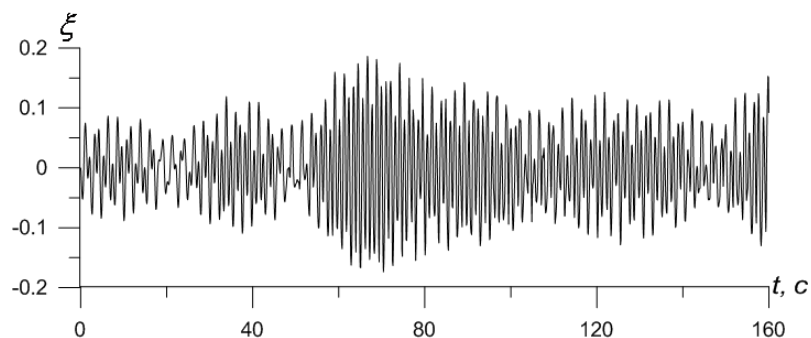


Рис. 5 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара на полном интервале наблюдения при возбуждении

движения на дорезонансной частоте при соотношении масс
 $M_T = 0,01M_F$

Рассматривалась также задача воздействия на подвижный параболический резервуар гармонической горизонтальной силой на околорезонансной частоте для соотношений масс резервуара и жидкости $M_T \geq 0,02M_F$. Численные результаты показали, что для возбуждения колебаний с частотой, близкой к резонансной, только для соотношения $M_T \geq 0,5M_F$ наблюдается модуляционная периодичность графика колебаний.

На Рис. 6,7 показано изменение амплитуды колебаний на стенке бака во временном промежутке 50 и 20 периодов по первой форме. График иллюстрирует, что при соотношении масс $M_T \geq 0,5M_F$ говорить о наблюдении установившегося движения на резонансной частоте при снижении амплитуды внешней силы, однако в отличие от результатов работ [3,4] колебания происходят не с постоянной амплитудой, а со значительной модуляцией.

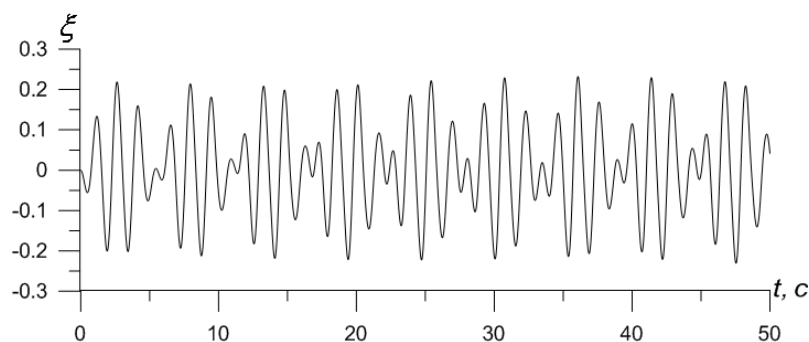


Рис. 6 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара за 50 периодов при возбуждении движения на дорезонансной частоте при соотношении масс $M_T = 0,5M_F$

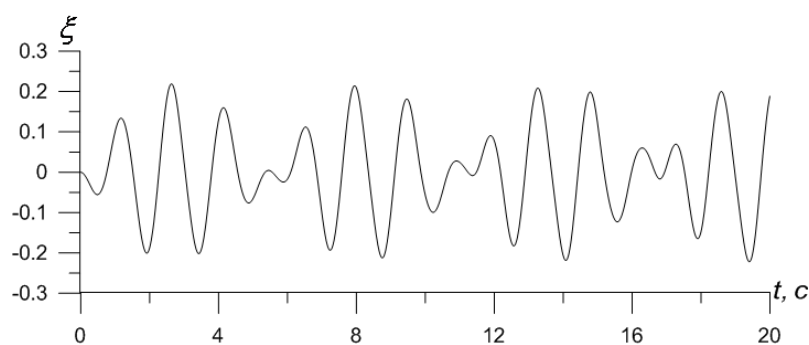


Рис. 7 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара за 20 периодов при возбуждении движения на дорезонансной частоте при соотношении масс $M_T = 0,5M_F$

С ростом коэффициента отношения масс резервуара и жидкости растет время выхода на установившийся режим. Проводились расчеты на временном отрезке 100 периодов по главной форме и амплитуде внешних колебаний 0,05 при соотношении масс резервуара и жидкости 5, 10 и 100 (Рис. 8,9).

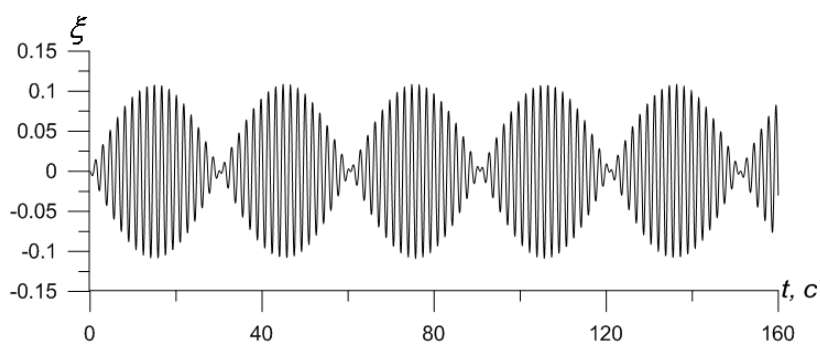


Рис. 8 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара при возбуждении движения на дорезонансной частоте при соотношении масс $M_T = 5M_F$

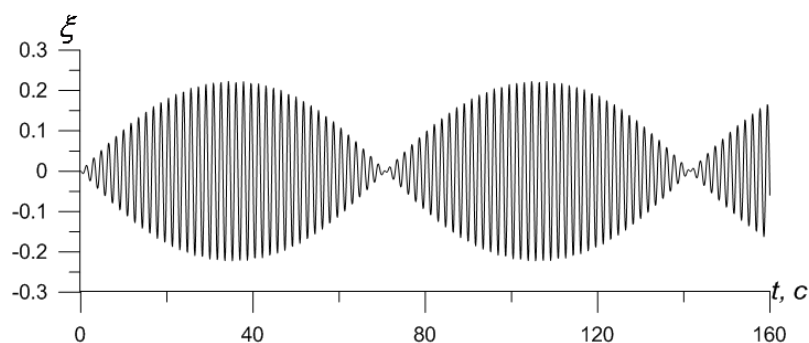


Рис. 9 Амплитуда свободной поверхности жидкости на стенке резервуара при возбуждении движения на дорезонансной частоте при соотношении масс $M_T = 10M_F$

Из графиков видно, что модуляционная периодичность при соотношении масс резервуара и жидкости $M_T = 5M_F$ составляет примерно 17 периодов по главной форме, для $M_T = 10M_F$ – примерно 40 периодов. Анализ показал, что период такой модуляции соответствует периоду изменения энергии жидкости. Полученные результаты для около- и зарезонансных частот качественно согласуются с экспериментальными результатами работ [6, 8], где рассматривались резервуары только прямоугольной формы.

Выводы. Исследован процесс выхода системы параболический резервуар - жидкость на установившийся режим в случае, когда движение возбуждается гармонической силой для разных соотношений масс резервуара и жидкости. Изучены особенности волнообразования при увеличении параметра соотношения массы резервуара к массе жидкости. Определен пороговый коэффициент соотношения массы резервуара и массы жидкости для классического параболоида (0,5), при котором периодическая модуляция проявляется в окрестности резонансной частоты по главной форме.

Литература

- [1] Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ "КПИ 1997. — 338 с.

- [2] *Лимарченко О.С., Семенова И.Ю.* Нелинейная динамика совместного движения параболического резервуара и частично заполняющей его жидкости // Проблемы динаміки та стійкості багатомірних систем. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — т. 4. — № 2. — С. 134–146.
- [3] *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — Киев, Наук. думка, 1990. — 295 с.
- [4] *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
- [5] *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. — Cambridge University Press. — 2005. — 950 p.
- [6] *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // Physics of fluids. — 2006. — Vol. 18. — 14 p.
- [7] *Limarchenko O.S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 59, N 3. — P. 44–70.
- [8] *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // International Journal of Recent Trends in Engineering. — 2009. — Vol. 1, N 6. — P. 1–5.