Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 154–165

УДК 517.9

В.Л. Островський

(Інститут математики НАН України, Київ)

Д.Ю. Якименко

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про існування та побудову ортоскалярних наборів підпросторів.

vo@imath.kiev.ua, dandan@imath.kiev.ua

This paper is devoted to the studu of orthoscalar tuples of subspaces in a complex Hilbert space, i.e. such that their orthoprojections sums up to a scalar operator. Such objects also known as *tight fusion frames*. They have a particularly usefulness in signal processing [3, 7, 8] and were studied in a number of works. For example, in [1] the question about possible values of the corresponding scalar was resolved. In [2] authors gave a criterion for existence of equal-rank tight fusion frames and presented a method for their construction, the so-called 'Spectral Tetris'. In this paper we present an explicit and simpler version of that criterion and supply it with a different proof.

Дану роботу присвячено ортоскалярним наборам підпросторів комплексного гільбертового простору, тобто таким, для яких сума відповідних ортопроекторів є скалярним оператором. В англомовній літературі такі об'єкти відомі як *tight fusion frames*. Вони мають застосування, зокрема, в обробці сигналів [3, 7, 8] і неодноразово вивчались. Наприклад, в роботі [1] було досліджено питання про можливі значення відповідного скалярного оператору. У роботі [2] автори привели критерій існування ортоскалярного набору у випадку, коли ранги ортопроекторів співпадають та описали метод побудови таких наборів, так званий "Спектральний тетріс". В даній статті ми наводимо явну та спрощену версію цього критерію, а також інший метод доведення.

1. Вступ

Нехай H це комплексний гільбертів простір (скінченновимірний або сепарабельний). Набір підпросторів будемо називати *ортоскалярним*, якщо відповідні ортопроектори $P_1, \ldots, P_n$ в сумі дають скалярний оператор, тобто

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = \lambda I,$$
$$\lambda \in \mathbb{C}, P_i^2 = P_i^* = P_i.$$

В англомовній літературі такі об‘єкти також відомі як *tight fusion frames*. Вони мають застосування, наприклад, в обробці сигналів і використовуються в алгоритмах комунікації в розподілених сенсорних мережах [3, 7, 8].

В роботі [2] автори привели алгоритмічний критерій існування ортоскалярного набору у випадку, коли ранги ортопроекторів співпадають. Тобто їх критерій для трійки чисел (K, L, N) визначає, чи можливо побудувати ортоскалярний набір з K ортопроекторів рангу L у N-вимірному гільбертовому просторі. Вони також навели метод побудови таких наборів, так званий “Спектральний тетріс”. Нажаль, згаданим авторам були невідомі подібні дослідження таких об’єктів. Так, в роботі [1] було отримано опис множини Σ_K можливих значень λI для ортоскалярного набору з K ортопроекторів (не обов’язково однакового рангу). Використовуючи цей результат та властивості нерівностей Хорна, в розділі 2 даної роботи ми виводимо більш явну та спрощену версію критерію існування ортоскалярного набору типу (K, L, N). В розділі 3 ми також покажемо, як можна спростити процедуру побудови таких ортоскалярних наборів у порівнянні з наведеною у [2].

Зауважимо, що в тексті статті ми не будемо відрізняти ортоскалярний набір підпросторів від набору ортопроекторів, оскільки у гільбертовому просторі існує однозначна відповідність (див., напр, [6]).

2. Критерій існування ортоскалярного набору типу (K, L, N)

Перед тим, як сформулювати основний результат цього розділу, наведемо у вигляді теореми 1 результати, отримані у [1], про опис множини

Σ_K можливих значень λI для ортоскалярного набору з K ортопроекторів, які не обов'язково є однакового рангу:

Теорема 1. *Позначимо* $\phi_K(\lambda) = 1 + \frac{1}{K-1-\lambda}$.

1) Для $K \leq 3$*:*

$$\Sigma_1 = \{0,1\}, \Sigma_2 = \{0,1,2\}, \Sigma_3 = \{0,1,\frac{3}{2},2,3\}$$

2) Для $K \geq 4$ *множина* Σ_K *має наступний опис:*

$$\Sigma_K = \Lambda_K^1 \cup \Lambda_K^2 \cup \left[\frac{K-\sqrt{K^2-4K}}{2}, \frac{K+\sqrt{K^2-4K}}{2}\right] \cup K-\Lambda_K^1 \cup K-\Lambda_K^2,$$

$$\Lambda_K^1 = \{\phi_K^i(0)\}_{i\in\mathbb{N}_0} = \{0, 1+\frac{1}{K-1}, 1+\frac{1}{K-2-\frac{1}{K-1}}, \dots\},$$

$$\Lambda_K^2 = \{\phi_K^i(1)\}_{i\in\mathbb{N}_0} = \{1, 1+\frac{1}{K-2}, 1+\frac{1}{K-2-\frac{1}{K-2}}, \dots\}$$

Зауважимо, що об'єднання в цьому описі диз'юнктне.

3) Множина Σ_K^{fin} *можливих значень* λ *для скінченновимірного ортоскалярного набору з* K *ортопроекторів має наступний опис:*

$$\Sigma_K^{fin} = \Sigma_K \cap \mathbb{Q}$$

Легко бачити, що ця теорема дає необхідну умову на трійку чисел (K, L, N) для існування ортоскалярного набору відповідного типу:

$$\frac{KL}{N} \in \Sigma_K.$$

Виявляється, що ця умова є також і достатньою. Наступна теорема є основним результатом даної статті:

Теорема 2. *Для трійки чисел* (K, L, N) *ортоскалярний набір відповідного типу існує тоді й тільки тоді, коли*

$$\frac{KL}{N} \in \Sigma_K.$$

Ця форма критерію може бути перевірена безпосередньо, використовуючи критерій з [2]. Але ми наводимо інше, неконструктивне доведення, елементи якого можуть бути корисні і цікаві самі по собі.

Ідея доведення теореми полягає у наступному. Припустимо, що існує ортоскалярний набір у розмірності $(N; d_1, \dots, d_K)$, тобто $\dim H = N$, $\dim P_i = d_i$. Тоді також існує ортоскалярний набір у розмірності $(MN; Md_1, \dots, Md_K)$ для $M \in \mathbb{N}$ — ми просто можемо взяти пряму суму M копій початкового набору. Виявляється, що це вірно і в обернену сторону:

Твердження 1. *Нехай існує ортоскалярний набір у розмірності $(N; d_1, \dots, d_K)$ та натуральне число M ділить усі d_i та N. Тоді існує ортоскалярний набір у розмірності $(\frac{N}{M}; \frac{d_1}{M}, \dots, \frac{d_K}{M})$.*

Перед тим, як довести твердження 1, покажемо, як з нього випливає теорема 2.

Доведення теореми 2: Оскільки необхідність умови $\frac{KL}{N} \in \Sigma_K$ очевидна, нам потрібно довести лише достатність. Позначимо $\lambda = \frac{KL}{N}$ і нехай $\lambda \in \Sigma_K$. З теореми 1 ми знаємо, що існує ортоскалярний набір у якійсь розмірності $(d; d_1, \dots, d_K)$ з даним λ. З рівності сліду випливає $\lambda = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{K} d_i$. Візьмемо тепер пряму суму K копій цього набору, але i-ту копію циклічно зсунемо на $i-1$. Тобто, i-тий доданок це ортоскалярний набір у розмірності $(d; d_i, d_{i+1}, \dots, d_K, d_1, \dots, d_{i-1})$. Отримана пряма сума є ортоскалярним набором у розмірності $(Kd; \sum_{i=1}^{K} d_i, ..., \sum_{i=1}^{K} d_i)$. За твердженням 1 існує деякий редукований ортоскалярний набір у розмірності $(N'; L', ..., L')$ з тим самим $\lambda = \frac{KL'}{N'} = \frac{KL}{N}$ і такий, що L' та N' взаємно прості числа. Звідси $N = mN', L = mL'$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. А отже, ортоскалярний набір у розмірності $(N; L, \dots, L)$ може бути побудований як пряма сума m копій редукованого набору.

Для доведення твердження 1 ми будемо використовувати нерівності Хорна. Насправді, з їх допомогою ми доведемо більш загальне твердження — теорему 3.

Через N-*кортеж* будемо позначати впорядкований набір з N дійсних чисел. Нехай ми маємо $K+1$ N-кортежів. Тобто, $\lambda(i) = \{\lambda_1(i), \dots, \lambda_N(i)\}$, $i = 0, \dots, K$. Визначимо N-кортеж в *степені* натурального числа m як mN-кортеж, що складається з m копій даного N-кортежу: $\lambda^m = \{\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \dots, \lambda_N\}$. Визначимо *добуток* N-кортежу на число m просто як поелементне множення $m\lambda = \{m\lambda_1, \dots, m\lambda_N\}$.

Теорема 3. *Нехай для $(K+1)$-го N-кортежу $\lambda(i)$ та числа $m \in \mathbb{N}$ існує $K+1$ комплексних ермітових матриць A_i у розмірності mN таких, що спектр $\sigma(A_i) = \lambda(i)^m$ та*

$$A_1 + \cdots + A_K = A_0.$$

Тоді існують комплексні ермітові матриці B_i у розмірності N такі, що спектр $\sigma(B_i) = \lambda(i)$ та

$$B_1 + \cdots + B_K = B_0.$$

Відмітимо, що в обернену сторону ця теорема очевидна — матриці A_i можна взяти як пряму суму m копій матриць B_i.

Надалі будемо вважати, що всі розглядувані нами кортежі впорядковані за спаданням елементів, якщо не вказано протилежне. Впорядкований набір з $(K+1)$ кортежів будемо називати *валідним* тоді й тільки тоді, коли існують ермітові матриці $A_0, \ldots, A_K$ такі, що $A_0 = A_1 + \cdots + A_K$, а спектр кожної матриці співпадає з відповідним кортежем. Для r-елементної підмножини $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, N\}, i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, визначимо *функцію* μ

$$\mu(I) = (i_r - r, \ldots, i_2 - 2, i_1 - 1)$$

— r-кортеж цілих чисел впорядкованих за спаданням. Валідність набору кортежів визначається нерівностями Хорна. Вони мають довгу і цікаву історію, яку можна подивитись у класичному огляді [4].

Нам буде зручно використовувати рекурсивну версію критерію для визначення валідності набору кортежів. Для трьох матриць це теорема 2 з [4], а її узагальнення для довільної кількості матриць по суті доведено у [5], розділ 7.

Теорема 4. *Набір з $(K+1)$-го N-кортежу $\lambda(i)$, $i = 0, \ldots, K$ є валідним тоді й тільки тоді, коли*

$$\forall r < N \ \forall I_0, \ldots, I_K : \sum_{i \in I_0} \lambda_i(0) \le \sum_{i \in I_1} \lambda_i(1) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i(2) + \cdots + \sum_{i \in I_K} \lambda_i(K),$$

де

$$I_j \subset \{1, \ldots, N\}, |I_j| = r, j = 0, \ldots, K,$$

причому I_j такі, що

$$(\mu(I_0), \dots, \mu(I_K))$$

є валідний набір r-кортежів.

Доведення теореми 3. Для доведення теореми 3 нам потрібно показати, що $\{\lambda(i), i = 0, \dots, K\}$ є валідним, якщо $\{\lambda^m(i), i = 0, \dots, K\}$ валідний. Ідея доведення зрозуміла — валідність набору "великих" кортежів дає нам нерівності, з яких ми виводимо інші нерівності, які в свою чергу означають валідність набору "маленьких" кортежів.

Означимо *підкортежем* $\lambda|_I$ кортежу λ наступний кортеж:

$$\lambda|_I = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}).$$

Для впорядкованої підмножини $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, N\}, i_1 < i_2 < \dots < i_r$, визначимо *градацію* $I^{\wedge m}$ за числом m як впорядковану підмножину множини $\{1, \dots, mN\}$:

$$\begin{aligned} I^{\wedge m} = \{&1 + (i_1 - 1)m, 2 + (i_1 - 1)m, \dots, m + (i_1 - 1)m, \\ &1 + (i_2 - 1)m, 2 + (i_2 - 1)m, \dots, m + (i_2 - 1)m, \\ &\dots, \\ &1 + (i_r - 1)m, 2 + (i_r - 1)m, ..., m + (i_r - 1)m\}. \end{aligned}$$

Наступні леми перевіряються безпосередньо.

Лема 1. $\lambda^m|_{I^{\wedge m}} = (\lambda|_I)^m$.

Лема 2. $\mu(I^{\wedge m}) = m(\mu(I))^m$.

Тепер ми можемо завершити доведення теореми 3. Нехай набір підмножин $I_0, \dots, I_K$ множини $\{1, \dots, N\}$ такий, що $\mu(I_0), \dots, \mu(I_K)$ — валідний. Тоді $m(\mu(I_0))^m, \dots, m(\mu(I_K))^m$ також валідний за відомою конструкцією прямої суми. Звідси по лемі 2 маємо, що $\mu(I_0^{\wedge m}), \dots, \mu(I_K^{\wedge m})$ валідний. Оскільки за припущенням $\lambda(0)^m, \dots, \lambda(K)^m$ є валідним, то за теоремою 4 наступна нерівність має виконуватись:

$$\sum_{i \in I_0^{\wedge m}} (\lambda(0)^m)_i \leq \sum_{i \in I_1^{\wedge m}} (\lambda(1)^m)_i + \dots + \sum_{i \in I_K^{\wedge m}} (\lambda(K)^m)_i.$$

За лемою 1 маємо

$$\sum_{i \in I_j^{\wedge m}} (\lambda(j)^m)_i = m \sum_{i \in I_j} (\lambda(j))_i = m \sum_{i \in I_j} \lambda_i(j),$$

а отже ми отримуємо нерівність

$$\sum_{i\in I_0}\lambda_i(0)\le\sum_{i\in I_1}\lambda_i(1)+\cdots+\sum_{i\in I_K}\lambda_i(K)$$

яка й була необхідна для доведення валідності $\lambda(0),\ldots,\lambda(K)$ за теоремою 4.

Таким чином, ми показали, що нерівності Хорна для "маленьких" кортежів виводяться з нерівностей Хорна для "великих" кортежів. □

3. Побудова ортоскалярних наборів типу (K, L, N)

В статті [2] окрім критерію існування також був наведений метод побудови ортоскалярних наборів типу (K, L, N) у випадку, коли це можливо. Цей метод побудови складається з трьох етапів, які можна умовно позначати як "модифікація функторами Кокстера", "Спектральний тетріс" та "модуляція по типу фрейму Габора". В цьому розділі ми опишемо інший, дещо спрощений метод побудови таких наборів, який не використовує модуляцію по типу фрейму Габора.

Модифікація ортоскалярного набору функторами Кокстера (або spatial та Naimark complements).

Нехай $S=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ деякий ортоскалярний набір ортопроекторів у розмірності $d=(d_0;d_1,d_2,\ldots,d_n)$, тобто

$$P_1+P_2+\cdots+P_n=\lambda I_H,$$

де $\dim H=d_0,\ \operatorname{rank}P_i=d_i$.

Неважко бачити, що набір $(I_H-P_1,I_H-P_2,\ldots,I_H-P_n)$ також є ортоскалярним, але у розмірності $d'=(d_0;d_0-d_1,d_0-d_2,\ldots,d_0-d_n)$ та з іншим $\lambda'=n-\lambda$.

Тож ми можемо визначити функтор Φ_{lin}, який ортоскалярному набору $S=(I_H;P_1,P_2,..,P_n)$ ставить у відповідність ортоскалярний набір $\Phi_{lin}(S)=(I_H;I_H-P_1,I_H-P_2,\ldots,I_H-P_n)$. Такий функтор ми будемо називати *функтором лінійного відбиття.* Виявляється, що можна визначити аналогічний *функтор гіперболічного відбиття* Φ_{hyp} так, що будуть виконуватись наступні властивості:

Твердження 2. *Для невироджених ортоскалярних наборів S виконується:*

$$\Phi_{lin}^2 = \mathrm{Id},\ \dim \Phi_{lin}(S) = \phi_{lin}(d) = (d_0; d_0 - d_1, d_0 - d_2, \dots, d_0 - d_n),$$
$$\phi_{lin}(\lambda) = n - \lambda,$$
$$\Phi_{hyp}^2 = \mathrm{Id},\ \dim \Phi_{hyp}(S) = \phi_{hyp}(d) = (\sum_{i=1}^{n} d_i - d_0; d_1, d_2, \dots, d_n),$$
$$\phi_{hyp}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

де набір S називається невиродженим, якщо $d_0 > 0$, $d_i \leq d_0 \leq \sum_{i=1}^n d_i$.

Такі функтори є узагальненнями функторів Кокстера, введених у [9], які діють на зображеннях колчанів у лінійних просторах.

Ми не будемо детально наводити конструкцію функтору Φ_{hyp}. Більш детально про ці функтори та їх властивості для ортоскалярних наборів можна подивитись, наприклад, у [1] або у [2] де вони відомі як spatial та Naimark complements.

Очевидно, що починаючи з якогось набору почерговим застосуванням функторів $\Phi_{lin}\Phi_{hyp}\Phi_{lin}\Phi_{hyp}, \dots$, ми можемо або прийти до виродженого набору або отримати нескінченну послідовність ортоскалярних невироджених наборів.

Для спрощення запису через Φ_* будемо позначати Φ_{lin} або Φ_{hyp} коли нам не важливо їх відрізняти, а записи Φ_{*lin}^m, Φ_{*hyp}^m будуть означати почергове застосування m відбиттів починаючи відповідно з Φ_{lin} або Φ_{hyp}.

Зауважимо, що під дією відбиттів відповідне λ буде залежати лише від K, початкового λ та кількості кроків і не буде залежати від розмірності початкового набору.

Ортоскалярні набори $S_0 = (I_H; 0, 0, \dots, 0)$ та $S_i = (I_H; 0, \dots, 0, I_H, 0, \dots, 0)$, де $\dim H = 1$, ми будемо називати *найпростішими.*

Запишемо у вигляді наступної теореми необхідні нам надалі твердження, отримані у [1]. Ці твердження описують динаміку значення λ при застосуванні відбиттів.

Теорема 5. *Позначимо $\Sigma_K^{discr} = \Sigma_K$ при $K \leq 3$, та при $K \geq 4$*

$$\Sigma_K^{discr} = \Lambda_K^1 \ \cup\ \Lambda_K^2 \ \cup\ K - \Lambda_K^1 \ \cup\ K - \Lambda_K^2,$$

$$\Lambda_K^1 = \{\phi_K^i(0)\}_{i\in\mathbb{N}_0} = \{0, 1 + \frac{1}{K-1}, 1 + \frac{1}{K-2-\frac{1}{K-1}}, \dots\},$$

$$\Lambda_K^2 = \{\phi_K^i(1)\}_{i\in\mathbb{N}_0} = \{1, 1 + \frac{1}{K-2}, 1 + \frac{1}{K-2-\frac{1}{K-2}}, \dots\},$$

Також позначимо $\Sigma_K^{cont} = [\frac{K-\sqrt{K^2-4K}}{2}, \frac{K+\sqrt{K^2-4K}}{2}]$ *при* $K \geq 4$, *тобто* $\Sigma_K = \Sigma_K^{discr} \cup \Sigma_K^{cont}$.

Тоді

1. Застосуванням відбиттів Φ_{lin}, Φ_{hyp} *від найпростіших можна отримати лише набори з* $\lambda \in \Sigma_K^{discr}$.

2. Будь-який незвідний ортоскалярний набір з $\lambda \in \Sigma_K^{discr}$ *можна отримати від найпростіших застовуванням відбиттів.*

3. Для будь-якого ортоскалярного набору з $\lambda \in \Sigma_K^{cont}$ *при послідовному застосуванні відбиттів множина відповідних* λ *буде мати непорожній перетин з* $[2, \frac{K}{2}]$ *та буде мати рівно 2 граничні точки* $\{\frac{K-\sqrt{K^2-4K}}{2}, \frac{K+\sqrt{K^2-4K}}{2}\}$.

Таким чином, для побудови ортоскалярного набору з $\lambda \in \Sigma_K^{discr}$ достатньо застосувати до найпростіших наборів функтори відбиттів відповідну кількість разів. Але для $\lambda \in \Sigma_K^{cont}$, взагалі кажучи, таких функторів вже недостатньо, хоча достатньо вміти будувати набори для λ з проміжку $[2, \frac{K}{2}]$.

Спектральний тетріс

У роботі [2] наведено процедуру, так званий 'Спектральний тетріс', яка дозволяє будувати одновимірні ортоскалярні набори з додаковими гарними властивостями, що відображено в наступній теоремі:

Теорема 6. *Для будь-яких чисел* $N, M \in \mathbb{N}$ *таких, що* $\lambda = \frac{M}{N} \geq 2$, *існує ортоскалярний набір* $S = (I_H; P_1, .., P_M)$ *типу* $(M, 1, N)$ *і такий, що* $P_i \perp P_j$ *при* $|i-j| \geq \lfloor\lambda\rfloor + 3$.

Зауважимо, що маючи ортоскалярний набір, в якому деякі ортопроектори ортогональні між собою, перестановкою та додаванням попарно ортогональних проекторів можна отримати інший ортоскалярний набір, з меншим числом проекторів але зі збільшеними розмірностями. Наприклад, з ортоскалярного набору $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, в якому $P_2 \perp P_4$, можна отримати набір $(P_2 + P_4, P_1, P_3, P_5)$. Такий метод отримання нових наборів ми будемо називати *ортокомпозицією.*

Наступна теорема є основним результатом даного розділу.

Теорема 7. *Нехай трійка чисел (K, L, N) задовольняє критерію з теореми 2. Тоді ортоскалярний набір відповідного типу можна побудувати використовуючи лише спектральний тетріс, ортокомпозицію та деяку кількість функторів відбиттів у визначеній послідовності.*

Доведення. Процедура побудови є наступною. По-перше будемо вважати, що (N, L) взаємно прості. Інакше ми застосуємо цю ж теорему для $(K, \frac{L}{\gcd(L,N)}, \frac{N}{\gcd(L,N)})$, а потім візьмемо пряму суму копій отриманого набору $\gcd(L, N)$ разів.

Можливі наступні випадки.

1. Нехай $\lambda = \frac{KL}{N} \in \Sigma_K^{discr}$. Це означає, що можливі наступні випадки: для деякого $m \in \mathbb{N}$ або $\phi_{*lin}^m(0) = \lambda$ або $\phi_{*lin}^m(1) = \lambda$. При цьому шуканий набір S є наступним:

$$\phi_{*lin}^m(0) = \lambda : \quad S = \Phi_{*lin}^m(S_0),$$
$$\phi_{*lin}^m(1) = \lambda : \quad S = \Phi_{*lin}^m(S_1 \oplus S_2 \oplus .. \oplus S_K).$$

Набір S єдиний з точністю до унітарної еквівалентності.

2. Нехай $\lambda = \frac{KL}{N} \in \Sigma_K^{cont}$, тож $K \geq 4$. При $K = 4$ маємо $\Sigma_4^{cont} = \{2\}$, тобто $\lambda = 2, N = 2, L = 1$. Тоді теорема 6 дає необхідну конструкцію набору типу $(4, 1, 2)$. Але насправді в цій ситуації є повний опис ортоскалярних наборів типу $(4, 1, 2)$, див., наприклад, [10].

Отже, нехай тепер $K \geq 5$. За теоремою 5 починаючи від набору з $\lambda \in \Sigma_K^{cont}$ за скінченну кількість застосувань відбиттів ми можемо прийти до ортоскалярного набору типу (K, L', N') з $\lambda' \in [2, \frac{K}{2}]$. Тобто існує $m \in \mathbb{N}$ що або $\lambda' = \phi_{*lin}^m(\lambda) \in [2, \frac{K}{2}]$ або $\lambda' = \phi_{*hyp}^m(\lambda) \in [2, \frac{K}{2}]$. Зрозуміло, що побудувавши набір з такими L', N', λ' ми можемо отримати набір типу (K, L, N) просто крокуючи назад відбиттями відповідну кількість разів. Тож насправді нам досить вміти будувати набори лише з $\lambda \in [2, \frac{K}{2}]$.

Але якщо $\lambda \in [2, \frac{K}{2}]$, то ми можемо застосувати теорему 6 для $M = KL, N = N$ і отримати ортоскалярний набір типу $(KL, 1, N)$ з властивістю $P_i \perp P_j$ при $|i - j| \geq \lfloor \lambda \rfloor + 3$, $1 \leq i, j \leq KL$. Оскільки $K \geq 5$ та $\lambda \leq \frac{K}{2}$, то $\lfloor \lambda \rfloor + 3 \leq K$. Звідси $P_i \perp P_j$ при $|i - j| \geq K$. А отже, ми можемо застосувати ортокомпозицію, щоб отримати набір типу (K, L, N):

$$(P_1 + P_{K+1} + \cdots + P_{(L-1)K+1},\\ P_2 + P_{K+2} + \cdots + P_{(L-1)K+2},\\ \ldots, P_K + P_{2K} + \cdots + P_{LK})$$

Відмітимо, що цю теорему можна розглядати як інше, конструктивне доведення достатності для критерію з теореми 2.

Автори щиро вдячні академіку Ю.С. Самойленку за обговорення та слушні зауваження.

Література

[1] *С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко.* О суммах проекторов // Функц. Анал. Прилож., 2002, т. 36 в. 3, с. 20-35.

[2] *P. G. Casazza, M. Fickus, D. Mixon, Y. Wang, and Z. Zhou.* Constructing tight fusion frames // Appl. Comput. Harmon. Anal., 30 (2011), 175-187.

[3] *B. G. Bodmann.* Optimal linear transmission by loss-insensitive packet encoding // Appl. Comput. Harmon. Anal., 22 (2007), 274-285.

[4] *W. Fulton.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 37 (3) (2000), pp. 209–249.

[5] *A. Knutson, T. Tao, C. Woodward.* The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood–Richardson cone // J. Amer. Math. Soc., 17 (1) (2004), pp. 19–48.

[6] *Yu. S. Samoilenko, D. Yu. Yakymenko.* On n-tuples of subspaces in linear and unitary spaces // Meth. Funct. Anal. Topol., 15, No. 1, 383–396 (2009).

[7] *P.G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li.* Fusion frames and distributed processing // Appl. Comput. Harmon. Anal. 25 (2008) 114–132.

[8] *P.G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li, C.J. Rozell*. Modeling sensor networks with fusion frames // Proc. SPIE 6701 (2007) 67011M-1–11.

[9] *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.*. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи Мат. Наук, 28:2 (1973), 19–33.

[10] *С. А. Кругляк, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер*. Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств // Зап. научн. сем. ПОМИ, 338 (2006), 180–201.