Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 166–177

УДК 512.552.4

Попова Н.Д., Стрілець О.В.

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про системи підпросторів гільбертового простору, що пов'язані з уніциклічним графом

popova@imath.kiev.ua, alexander.strelets@gmail.com

В роботі досліджуються системи підпросторів, що пов'язані з уніциклічними графами. Отримано критерій, який дозволяє питання про опис усіх незвідних систем, пов'язаних з певним уніциклічним графом, звести до питання про опис відповідних систем, пов'язаних з циклом.

The paper studies systems of subspaces related to unicyclic graphs. We have found a criterion that allows to reduce a question of description of all irreducible systems related to some unicyclic graph to the question of description of corresponding systems related to cycle.

1. Вступ

1. Дослідження систем $L = (V; V_1, \ldots, V_n)$ підпросторів $V_1, \ldots, V_n$ скінченовимірного лінійного простору V, $n \in \mathbb{N}$, зокрема, опис нерозкладних четвірок підпросторів у V [1], опис нерозкладних зображень у просторі V скінчених частково впорядкованих множин (див., наприклад, [2]), та таке інше, є класичними задачами алгебри.

Нехай H є комплексним гільбертовим простором, H_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — набір його підпросторів. Вивчення систем підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ гільбертового простору H (або, що є тим самим, наборів відповідних ортопроекторів $P_1, \ldots, P_n$) є важливою задачею функціонального аналізу, якій присвячено чисельні публікації (див., наприклад, бібліографію в [3]).

2. В роботі [3] вивчалися системи підпросторів (n-ки підпросторів), що є $*$-зображеннями $*$-алгебр

$$TL_{\Gamma,\tau,\perp} = \mathbb{C}\langle\, p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i \in V; \\ p_i p_j p_i = \tau_{ij}^2 p_i,\ p_j p_i p_j = \tau_{ij}^2 p_j, \ \text{якщо } \gamma_{ij} \in E; \\ p_i p_j = p_j p_i = 0, \ \text{інакше}\,\rangle,$$

де

- $\Gamma = (V, E)$ є скінченним неорієнтованим зв'язним графом без кратних ребер та петель: $V = \{1, \ldots, n\}$ є множиною вершин графу, а $E = \{\gamma_{ij} = \gamma_{ji}\}$ — множиною його ребер;
- τ — функція, означена на ребрах графу,

$$\tau : E \to (0,1) : \gamma_{ij} \mapsto \tau_{ij}.$$

Такі системи підпросторів автори роботи називали «простими».

Зокрема, в роботі було показано, що у найпростішому випадку, коли Γ є деревом, питання про опис всіх незвідних $*$-зображень $*$-алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ зводиться до питання про невід'ємну визначеність матриці $B_{\Gamma,\tau} = (b_{ij})$, де

$$b_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j,\, k \in V, \\ -\tau_{kj}, & k \neq j,\, \gamma_{kj} \in E, \\ 0, & k \neq j,\, \gamma_{kj} \notin E. \end{cases}$$

А саме, має місце наступна теорема ([3, Теорема 12], також див. [4])

Теорема 1. *Нехай Γ є деревом. Ненульова незвідна проста n-ка підпросторів S, що відповідає парі (Γ, τ), існує тоді і тільки тоді, коли матриця $B_{\Gamma,\tau}$ є невід'ємно визначеною. В цьому випадку, така n-ка підпросторів є єдиною, з точністю до унітарної еквівалентності, і для її узагальненої розмірності є вірною рівність*

$$\dim S = (n'; 1, 1, \ldots, 1),$$

де $n' = n$, якщо матриця $B_{\Gamma,\tau}$ є додатно визначеною, і $n' = n - 1$, інакше.

Нагадаємо, що *узагальненою розмірністю* системи підпросторів $S = (H; H_1, \dots, H_n)$ називають набір розмірностей

$$\dim S = (\dim H; \dim H_1, \dots, \dim H_n).$$

3. Наступним по складності є випадок, коли Γ є уніциклічним графом. Для уніциклічного графа зручно користуватися наступними позначеннями

$$\Gamma = (C; \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m),$$

де $C = (V_0, E_0)$, $V_0 = \{1, \dots, m\}$, є циклом з m вершин, $2 < m \leqslant n$, а $\Gamma_k = (V_k, E_k)$, $k = 1, \dots, m$, є деревами такими, що їх множини вершин попарно не перетинаються, і вершина $k \in V_k$, $k = 1, \dots, m$. Отже, множина вершин графа є $V_1 \cup \dots \cup V_m$, а множина ребер, відповідно, $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_m$.

В цьому випадку питання про опис всіх незвідних $*$-зображень $*$-алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ зводиться до питання: при яких $\varphi \in (0, 2\pi]$ матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi} = (b_{ij})$, де

$$b_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j,\, k \in V, \\ -\tau_{kj}, & k \neq j,\, \gamma_{kj} \in E \setminus \{\gamma_{1m}\}, \\ -e^{i\varphi}\tau_{1m}, & k = 1, j = m, \\ -e^{-i\varphi}\tau_{1m}, & k = m, j = 1, \\ 0, & k \neq j,\, \gamma_{kj} \notin E, \end{cases}$$

є невід'ємно визначеною? А саме, має місце наступна теорема ([3, Теорема 16], також див. [5]).

Теорема 2. *Нехай Γ є уніциклічним графом, Φ_τ є множиною усіх чисел $\varphi \in [0, 2\pi)$, таких, що матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є невід'ємно визначеною.*

Тоді незвідна проста n-ка підпросторів, що відповідає парі (Γ, τ), існує тоді і тільки тоді, коли множина Φ_τ не є порожньою, при цьому, з точністю до унітарної еквівалентності, для кожного параметра $\varphi \in \Phi_\tau$ існує єдина ненульова незвідна проста n-ка підпросторів $S_{\tau,\varphi}$ і всі вони не є еквівалентними між собою.

Для узагальненої розмірності системи підпросторів $S_{\tau,\varphi}$ виконується рівність

$$\dim S_{\tau,\varphi} = (n'; 1, 1, \dots, 1),$$

де $n' = n$, якщо матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є додатно визначеною, та $n' = n - 1$ або $n' = n - 2$, інакше.

Зауважимо, що в деяких подальших роботах у термін «проста» система вкладається трохи вужчий зміст: «простими» називають системи одновимірних підпросторів (про системи одновимірних підпросторів див., наприклад, [6]).

4. Задача визначення множини $\Phi_\tau = \Phi_{\Gamma,\tau}$ для певного уніциклічного графа Γ та функції τ не є тривіальною. В розділі 2 ми наведемо критерій, який показує, що або множина $\Phi_{\Gamma,\tau}$ є порожньою, або існує функція $\mu = \mu(\Gamma, \tau)$, визначена на ребрах циклу C, $\mu : E_0 \to (0, 1)$, така, що $\Phi_{\Gamma,\tau} = \Phi_{C,\mu}$. В розділі 3 ми розглянемо деякі приклади уніциклічних графів та відповідних систем підпросторів, коли функція τ є константною, і застосуємо отриманий критерій до їх дослідження.

2. Редукція уніциклічного графу до циклу

1. Для того, щоб сформулювати основну теорему нашої роботи, нам знадобляться наступні означення.

Для довільної вершини $i \in V_k$, $k \in V_0$, існує єдиний шлях $l(i)$ в дереві Γ_k з вершини i у вершину k. Означимо відстань $d(i)$ від вершини i до циклу C як довжину цього шляху. Для довільної вершини i, що не лежить на циклі, однозначно визначена «попередня» вершина $j = p(i)$, а саме то є вершина, що належить шляху $l(i)$, така, що $d(j) = d(i) - 1$. Навпаки, для кожної вершини j визначено множину «наступних» вершин у графі Γ (можливо порожню):

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{\Gamma,j} = \{i \in V \,|\, p(i) = j\}, \quad j \in V.$$

Множину всіх вершин V можно розділити на шари

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_{\Gamma,r} = \{i \in V \,|\, d(i) = r\}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

що не перетинаються. При цьому $\mathcal{L}_0 = V_0$, і, починаючи з деякого r, всі $\mathcal{L}_r$ є порожніми множинами. Зауважимо, що виконуються рівності

$$\mathcal{L}_r = \bigsqcup_{j \in \mathcal{L}_{r-1}} \mathcal{V}_j, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Нехай Γ є уніциклічним графом.*

Матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

(i) для всіх вершин $j \in V$ числа

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_j} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i} \tag{1}$$

є додатніми;

(ii) матриця $B_{C,\mu,\varphi}$, де μ визначено на ребрах E_0 циклу C рівністю

$$\mu_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\nu_i \nu_j}},$$

є невід'ємно визначеною.

Зауважимо, що формула (1) коректно визначає числа ν_j. Дійсно, зважаючи на те, що множини $\mathcal{V}_j$ є порожніми, якщо $j \in \mathcal{L}_d$, $d = \max\{r \mid \mathcal{L}_r \neq \varnothing\}$, за формулою (1) отримуємо $\nu_j = 1$ для вершин шару $\mathcal{L}_d$. Далі за цією формулою визначаємо ν_j для вершин шару $\mathcal{L}_{d-1}$, потім для вершин шару $\mathcal{L}_{d-2}$ і так далі. Підрахувати ν_j для кожного наступного шару є можливим, якщо всі ν_j, що отримані для попереднього шару, є додатніми.

2. Доведення теореми базується на двох наступних лемах. Перша з них дозволяє перейти від уніциклічного графа Γ до графа, що можна отримати з Γ, якщо прибрати декілька вершин, що належать до зовнішнього шару, тобто до множини $\mathcal{L}_d$.

Лема 4. *Нехай існують непорожня підмножина вершин $\mathcal{V}$ і вершина k, що не належить множині $\mathcal{V}$, такі, що кожну вершину $i \in \mathcal{V}$ з'єднано ребром з вершиною k, і тільки з нею.*

За таких умов матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються наступні дві умови:

(i) $\nu = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}} \tau_{ik}^2 > 0$

(ii) матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$,

$$\Gamma' = (V', E'), \quad V' = V \setminus \mathcal{V}, \quad E' = E \setminus \{\gamma_{ik}\}_{i \in \mathcal{V}}$$

$$\tau'_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}, & i, j \in V' \setminus \{k\}, \\ \nu^{-1/2} \tau_{ij}, & i = k, j \in V' \setminus \{k\}, \\ \nu^{-1/2} \tau_{ij}, & j = k, i \in V' \setminus \{k\}, \end{cases}$$

невід'ємно визначена.

Доведення. (A) Припустимо, що матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є невід'ємно визначеною. Покажемо, що в цьому випадку $\nu > 0$.

Враховуючи, що граф Γ є зв'язним, існує хоча б одна вершина $j \in V \setminus \mathcal{V}$, $j \neq k$, така, що $\gamma_{kj} \in E$. Розглянемо дерево $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} = \mathcal{V} \cup \{k, j\}$, $\hat{E} = \{\gamma_{ik}\}_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}}$. Тоді за Теоремою 1 матриця $B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}}$, де $\hat{\tau}$ є звуженням τ на $\hat{E}$, є невід'ємно визначеною. Отже $\det B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}} \geqslant 0$. З іншої сторони, $\det B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}} = \nu - \tau_{k,j}^2$, отже $\nu > 0$.

(B) Нехай $\nu > 0$. Покажемо, що для довільного вектора $x = (x_i)_{i \in V}$ виконується рівність

$$\langle B_{\Gamma,\tau,\varphi}\, x, x \rangle = \langle B_{\Gamma',\tau',\varphi} x', x' \rangle + \sum_{i \in \mathcal{V}} |x_i - \tau_{ik} x_k|^2, \tag{2}$$

де вектор $x' = (x'_i)_{i \in V'}$ визначено рівністю

$$x'_i = \begin{cases} x_i, & i \in V' \setminus \{k\}; \\ \nu^{1/2} x_i, & i = k. \end{cases}$$

Для зручності запису, позначимо $\Delta_{\gamma_{ij}} = \langle b_{ij} x_j, x_i \rangle + \langle b_{ji} x_i, x_j \rangle$. Безпосередньо перевіряється, що для довільного ребра $\gamma_{ij} \in E'$ виконується рівність $\langle b_{ij} x_j, x_i \rangle = \langle b'_{ij} x'_j, x'_i \rangle$, отже $\Delta_{\gamma_{ij}} = \langle b'_{ij} x'_j, x'_i \rangle + \langle b'_{ji} x'_i, x'_j \rangle$, якщо $\gamma_{ij} \in E'$. Враховуючи, що

$$|x'_k|^2 = \nu |x_k|^2 = |x_k|^2 - \sum_{i \in \mathcal{V}} \tau_{ik}^2 |x_k|^2,$$

отримуємо рівності

$$\begin{aligned} &\langle B_{\Gamma,\tau,\varphi}\, x, x \rangle - \langle B_{\Gamma',\tau',\varphi}\, x', x' \rangle \\ &\qquad = \left(\sum_{i \in V} |x_i|^2 + \sum_{\gamma_{ij} \in E} \Delta_{\gamma_{ij}} \right) - \left(\sum_{i \in V'} |x'_i|^2 + \sum_{\gamma_{ij} \in E'} \Delta_{\gamma_{ij}} \right) \\ &\qquad = |x_k|^2 - |x'_k|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V}} |x_i|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V}} \Delta_{\gamma_{ik}} \\ &\qquad = \sum_{i \in \mathcal{V}} \left(|\tau_{ik} x_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \tau_{ik} x_k, x_i \rangle + |x_i|^2 \right) \\ &\qquad = \sum_{i \in \mathcal{V}} |x_i - \tau_{ik} x_k|^2. \end{aligned}$$

(C) Нехай $\nu > 0$ і матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$ невід'ємно визначена, тоді для довільного вектора x права частина рівності (2) невід'ємна, а отже матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є невід'ємно визначеною.

Навпаки, нехай матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є невід'ємно визначеною. Ми вже показали в (A), що в цьому випадку $\nu > 0$. Розглянемо довільний вектор x' і визначимо вектор x формулою

$$x_i = \begin{cases} x'_i, & i \in V' \setminus \{k\}, \\ \nu^{-1/2} x'_k, & i = k, \\ \tau_{ik} x_k, & i \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Тоді, відповідно до доказаної в пункті (B) рівності, маємо

$$\langle\, B_{\Gamma',\tau',\varphi} x', x' \,\rangle = \langle\, B_{\Gamma,\tau,\varphi}\, x, x \,\rangle \geqslant 0,$$

отже матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$ є невід'ємно визначеною. □

3. Друга лема є безпосереднім наслідком щойно доведеної. Вона дозволяє перейти від уніциклічного графа Γ до такого, що отримаємо, якщо прибрати зовнішній шар графа Γ цілком.

Лема 5. *Нехай*

$$d = d(\Gamma) = \max_{i \in V} d(i) > 0.$$

Тоді матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

(i) числа

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_j} \tau_{ij}^2, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1},$$

є додатніми;

(ii) невід'ємно визначеною є матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$, де граф $\Gamma' = (V', E')$ отримуємо з графа Γ видаленням всіх вершин шару $\mathcal{L}_d$ і відповідних ребер, а τ' визначено на решті ребер рівністю

$$\tau'_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}, & i, j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_j^{-1/2} \tau_{ij}, & i \notin \mathcal{L}_{d-1},\ j \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_i^{-1/2} \tau_{ij}, & j \notin \mathcal{L}_{d-1},\ i \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_i^{-1/2} \nu_j^{-1/2} \tau_{ij}, & i, j \in \mathcal{L}_{d-1}. \end{cases}$$

Доведення. Зауважимо, що $\nu_j = 1$ у випадку, коли $\mathcal{V}_j$ є порожньою множиною. Отже, твердження леми отримаємо, якщо для кожної вершини $j \in \mathcal{L}_{d-1}$ такої, що множина $\mathcal{V}_j$ не є порожньою, по черзі (не важливо в якому порядку) застосуємо лему 4 ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$, $k = j$). □

4. Тепер ми готові довести основну теорему.

Доведення Теореми 3. Випадок, коли граф Γ співпадає з циклом C, є тривіальним, бо для всіх $j \in V$ виконується рівність $\nu_j = 1$ і $B_{\Gamma,\tau,\varphi} = B_{C,\mu,\varphi}$.

Отже, далі розглядаємо випадок $d = \max\limits_{i \in V} d(i) > 0$.

Доведемо твердження теореми індукцією по d.

(A) *Базис індукції.* $d = 1$. Твердження теореми є безпосереднім наслідком леми 5.

(B) *Крок індукції.* Нехай теорема є вірною для довільного графа Γ, такого, що $d(\Gamma) = d - 1 > 0$.

За лемою 5 матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

(i) числа

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \tau_{ij}^2 = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i}, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1},$$

є додатніми;

(ii) невід'ємно визначеною є матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$, де граф $\Gamma' = (V', E')$ отримуємо з графа Γ видаленням всіх вершин шару $\mathcal{L}_d$ і відповідних ребер, а τ' визначено на решті ребер рівністю

$$\tau'_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}, & i, j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \\ \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\nu_j}} & i \notin \mathcal{L}_{d-1},\ j \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\nu_i}} & i \in \mathcal{L}_{d-1},\ j \notin \mathcal{L}_{d-1}. \end{cases}$$

З іншого боку, за індуктивним припущенням матриця $B_{\Gamma',\tau',\varphi}$ є невід'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

(i) для всіх вершин $j \in V'$ числа

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} \frac{{\tau'}^2_{ij}}{\nu'_i}$$

є додатніми;

(ii) матриця $B_{C,\mu',\varphi}$, де μ' визначено на ребрах E_0 рівністю

$$\mu'_{ij} = \frac{\tau'_{ij}}{\sqrt{\nu'_i \nu'_j}},$$

є невід'ємно визначеною.

Для вершин j з шару $\mathcal{L}_{d-1}$ множини $\mathcal{V}_{\Gamma',j}$ є порожніми, таким чином $\nu'_j = 1$. Тоді для $j \in \mathcal{L}_{d-2}$ маємо

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} {\tau'}^2_{ij} = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau^2_{ij}}{\nu_i} = \nu_j,$$

а для вершин $j \in \mathcal{L}_{d-3} \cup \cdots \cup \mathcal{L}_0$ рекурентно отримаємо

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} \frac{{\tau'}^2_{ij}}{\nu'_i} = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau^2_{ij}}{\nu_i} = \nu_j.$$

Тоді

$$\mu'_{ij} = \frac{\tau'_{ij}}{\sqrt{\nu'_i \nu'_j}} = \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\nu_i \nu_j}} = \mu_{ij}$$

і теорему доведено. □

3. Приклади

1. Розглянемо декілька прикладів систем, що пов'язані з уніциклічними графами, такими, що параметри τ_{ij} є однаковими для всіх ребер графу, тобто $\tau_{ij} = \tau$.

Нагадаємо опис з точністю до унітарної еквівалентності всіх незвідних систем, що пов'язані з циклом C, таких що всі параметри τ_{ij} є однаковими (див. [5], а також [3, розділ 3.4]).

1. Якщо $0 < \tau \leqslant \frac{1}{2}$, то для довільного $\varphi \in [0, 2\pi)$ існує проста система підпросторів $S_{\tau,\varphi}$.

2. Якщо $\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$, то система підпросторів $S_{\tau,\varphi}$ існує для всіх $\varphi \in [n\alpha, 2\pi - n\alpha]$, де α є рішенням рівняння

$$\tau = \frac{1}{2\cos\alpha} \tag{3}$$

на інтервалі $(0, \frac{\pi}{n})$.

3. Якщо $\tau = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$, то система підпросторів $S_{\tau,\varphi}$ існує тільки для $\varphi = \pi$.

4. При $\tau > \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$ жодної нетривіальної системи $S_{\tau,\varphi}$ не існує.

2. Далі розглянемо такі уніциклічні графи, коли для кожної пари вершин циклу, $k_1, k_2 \in V_0$, існує ізоморфізм $f : V_{k_1} \to V_{k_2}$ дерев Γ_{k_1} та Γ_{k_2}, такий, що $f(k_1) = k_2$. Зважаючи на те, що всі параметри τ_{ij} є однаковими для всіх ребер, то числа ν_i по формулі (1) достатньо підрахувати тільки для вершин одного з дерев, бо $\nu_{f(i)}$ та ν_i співпадають, або не визначені одночасно, $i \in V_{k_1}$. Отже, для всіх вершин циклу $k \in V_0$ або всі числа ν_k не визначені, або вони співпадають між собою, тобто $\nu_k = \nu$. Якщо $\nu > 0$, то для довільного ребра

$$\mu_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\nu_i \nu_j}} = \frac{\tau}{\nu(\tau)} = \mu(\tau).$$

Таким чином, за умов, що $\nu_i(\tau) > 0$, $i \in V_1$, знайдемо значення τ, для яких виконується одна з наступних двох нерівностей

$$0 < \mu(\tau) \leqslant \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2} < \mu(\tau) \leqslant \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{m}}.$$

Це дає опис всіх незвідних $*-$зображень вихідної алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Приклад 1. Нехай кожний граф Γ_k є деревом, що складається з двох вершин та одного ребра. Тоді $d = 1$ і $\nu(\tau) = 1 - \tau^2$ є визначеним і додатнім для довільного $\tau \in (0, 1)$. Отже:

1. система $S_{\tau,\varphi}$ існує для кожного $\varphi \in [0, 2\pi)$, якщо
$$0 < \mu(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau^2} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{тобто} \quad \tau \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right];$$
2. система $S_{\tau,\varphi}$ існує для кожного $\varphi \in [n\alpha, 2\pi - n\alpha]$, якщо
$$\frac{1}{2} < \mu(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau^2} \leqslant \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{m}},$$
тобто
$$\tau \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{m}}+\cos\frac{\pi}{m}}\right].$$

Приклад 2. Нехай кожний граф Γ_k є деревом, що складається з $s+1$ вершин та s ребер, таким, що кожне ребро Γ_k з'єднує вершину k з якоюсь іншою вершиною дерева Γ_k. Тоді $d = 1$ і $\nu(\tau) = 1 - s\tau^2$ є визначеним і додатнім для $\tau \in (0, \frac{1}{\sqrt{s}})$. Отже:

1. система $S_{\tau,\varphi}$ існує для кожного $\varphi \in [0, 2\pi)$, якщо
$$0 < \mu(\tau) = \frac{\tau}{1-s\tau^2} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{тобто} \quad \tau \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{s+1}+1}\right];$$
2. система $S_{\tau,\varphi}$ існує для кожного $\varphi \in [n\alpha, 2\pi - n\alpha]$, якщо
$$\frac{1}{2} < \mu(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau^2} \leqslant \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{m}},$$
тобто
$$\tau \in \left(\frac{1}{\sqrt{s+1}+1}, \frac{1}{\sqrt{s+\cos^2\frac{\pi}{m}}+\cos\frac{\pi}{m}}\right].$$

Зауважимо, що умова $\tau < \frac{1}{\sqrt{s}}$ виконується автоматично, якщо
$$\tau \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{m}}+\cos\frac{\pi}{m}}.$$

Література

[1] *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space // Hilbert space operators and operator algebras (Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970). — Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 5, North-Holland, Amsterdam, 1972. — Pp. 163–237.

[2] *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // *Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР.* — 1972. — Т. 28. — С. 5—31.

[3] *Самойленко Ю. С., Стрелець А. В.* О простых n-ках подпространств гильбертова пространства // *Укр. мат. журнал.* — 2009. — Т. 61, № 12. — С. 1668–1703.

[4] *Власенко М. А., Попова Н. Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // *Укр. мат. журнал.* — 2004. — Т. 56, № 5. — С. 606–615.

[5] *Popova N. D.* On finite-dimensional representations of one algebra of Temperley–Lieb type // *Methods of Funct. Anal. and Topology.* — 2001. — Vol. 7, no. 3. — Pp. 80—92.

[6] *Grushevoy R. V., Samoilenko Y. S.* Systems of one-dimensional subspaces of a Hilbert space // *Methods of Funct. Anal. and Topology.* — 2010. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 131-139.