Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 22–56

УДК 512.643+519.171

В. М. Бондаренко

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Е. Н. Тертичная

(Киевский нац. экономический ун-т им. Вадима Гетьмана)

Линейные идемпотентные операторы в конечномерных векторных пространствах

vit-bond@imath.kiev.ua, olena-tertychna@mail.ru

In this paper we consider the problem on similarity of families of linear idempotent operators in finite-dimensional vector spaces.

В этой статье рассматривается задача о подобии наборов линейных идемпотентных операторов, действующих в конечномерных векторных пространствах

Хорошо известна каноническая форма пары взаимноаннулирующих операторов и пары самоаннулирующих операторов, действующих в конечномерных векторных пространствах над произвольным полем (И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев [1] и В. М. Бондаренко [2] соответственно). В этой статье рассматривается подобная задача для наборов идемпотентных операторов $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих некоторым равенствам вида $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$. Мы покажем, что при выполнении естественного условия конечности, в каждой конкретной ситуации задача о канонической форме таких наборов сводится к аналогичной задаче для представлений некоторого ориентированного графа. В качестве следствия получим описание ручных и диких случаев для этой задачи.

Заметим, что большинство излагаемых здесь результатов уже опубликованы авторами, но в терминах представлений полугрупп (см., в частности, [3, 4, 5]). Однако нам кажется интересным рассмотреть указанную задачу внутри линейной алгебры, для которой задачи о канонических формах различных операторов и матриц являются приоритетными. При этом мы следуем традициям классической линейной алгебры и поэтому не используем категорный язык, который широко используется в современной теории представлений.

1. Основные понятия и постановка задачи.

На протяжении всей статьи k обозначает произвольное алгебраически замкнутое поле. Все векторные пространства являются конечномерными k-пространствами.

Пусть $\mathcal{O}_k(n)$ обозначает множество всех упорядоченных наборов линейных операторов $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, действующих в одном и том же векторном k-пространстве.

Два набора линейных операторов $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ и $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_n\}$, действующих соответственно в векторных пространствах V и V', называем *подобными*, если существует обратимое линейное отображение $\mathcal{X} : V \to V'$ такое, что

$$\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{X} = \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}_n\mathcal{X} = \mathcal{A}'_n.$$

Прямой суммой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ называется набор действующих в $V \oplus V'$ операторов

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}' = \{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{A}'_n\}.$$

Набор операторов $\mathcal{A}$, действующих в пространстве $V \neq 0$, называется *разложимым*, если он подобен прямой сумме наборов операторов, действующих в ненулевых пространствах, и *неразложимым* в противном случае. В случае $V = 0$ набор операторов считается разложимым.

Хорошо известно, что любой набор операторов однозначно, с точностью до подобия и перестановки слагаемых, раскладываются в прямую сумму неразложимых операторов.

В этой статье изучаются наборы идемпотентных операторов.

Читатель, интересующийся в первую очередь прикладными задачами, может считать поле k полем комплексных чисел. Все результаты статьи верны и для произвольного алгебраически незамкнутого поля, однако в этом случае некоторые определения, формулировки утверждений и их доказательства нужно модифицировать стандартным образом.

См., напр., [6, §5.4]

Положим $[1,n] = \{1,2,\dots,n\}$, $[1,n]^2 = [1,n] \times [1,n]$ и

$$[1,n]_0^2 = [1,n]^2 \setminus \{(i,i) \,|\, i \in [1,n]\},$$

где n — натуральное число. Для подмножества $J \subset [1,n]_0^2$ через $\mathcal{O}_k(n,J)$ обозначим множество всех наборов операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_n\}$ из $\mathcal{O}_k(n)$ таких, что

1) $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ для всех i;

2) $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ для всех $(i,j) \in J$.

Будем говорить, что задача об описании (с точностью до подобия) наборов операторов $\mathcal{P} \in \mathcal{O}_k(n,J)$ имеет *конечный тип*, если с точностью до подобия существует только конечное число неразложимых наборов, и *бесконечный тип* в противном случае.

Задача бесконечного типа может быть ручного или дикого типа в зависимости от того, покрываются ли неразложимые наборы операторов в каждой размерности конечным числом однопараметрических семейств наборов (среди которых могут быть "вырожденные" наборы) или существует двухпараметрическое семейство наборов с определенными свойствами. Дадим точные для нашей задачи определения ручного и дикого типов.

Определение множества $\mathcal{O}_k(n,J)$ легко обобщается на случай произвольной (не обязательно конечномерной) k-алгебры Γ: $\mathcal{O}_\Gamma(n,J)$ — это множество наборов $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_n\}$ эндоморфизмов $\mathcal{G}_i : M \to M$ свободного Γ-модуля M конечного ранга, таких, что $\mathcal{G}_i^2 = \mathcal{G}_i$ для всех i и $\mathcal{G}_i\mathcal{G}_j = 0$ для всех $(i,j) \in J$. Существует, очевидно, естественное взаимно однозначное соответствие между наборами эндоморфизмов из $\mathcal{O}_\Gamma(n,J)$ и Γ-представлениями (представлениями эндоморфизмами свободного Γ-модуля) полугруппы $S(n,J)$ с образующими элементами $0, e_1,\dots,e_n$ и определяющими соотношениями $e_i^2 = e_i$ для всех i, $e_ie_j = 0$ для всех $(i,j) \in J$. С другой стороны, как хорошо известно, существует естественное взаимно однозначное соответствие между представлениями полугруппы и представлениями ее полугрупповой алгебры, в данном случае между Γ-представлениями полугруппы $S(n,J)$ и Γ-представлениями полугрупповой алгебры $\Gamma S(n,J)$.

Знак $\times$ обозначает знак декартового произведения.

Относительно ручных и диких задач в общем случае, в частности для алгебр, см. п. 4.

Как обычно в подобной ситуации, мы отождествляем нулевой элемент алгебры

Нас интересует только случай, когда Γ является свободной k-алгеброй $K_m = k\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ с образующими $x_1, \ldots, x_m$ (да и то лишь при $m = 1, 2$); k-представление этой алгебры однозначно задаются набором операторов $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\} \in \mathcal{O}_k(m)$. Под тензорным произведением $\mathcal{G} \otimes \mathcal{A}$ набора эндоморфизмов $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n\} \in \mathcal{O}_{K_m}(n, J)$ и набора операторов $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\} \in \mathcal{O}_k(m)$ мы понимаем набор операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$, который соответствует представлению $\overline{\mathcal{G}} \otimes_{K_m} \overline{\mathcal{A}}$ алгебры $kS(n, J)$, где $\overline{\mathcal{G}}$ — K_m-представление алгебры $K_mS(n, J)$, соответствующее набору $\mathcal{G}$, и $\overline{\mathcal{A}}$ — k-представление свободной алгебры K_m, соответствующее набору $\mathcal{A}$.

Будем говорить, что задача об описании (с точностью до подобия) наборов операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ имеет *ручной тип* (или является *ручной*), если для любого натурального числа d существует конечное число наборов эндоморфизмов $\mathcal{G}^{(i)} \in \mathcal{O}_{K_1}(n, J)$, $i \in I_d$, таких, что каждый неразложимый набор операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$, действующий в векторном пространстве размерности d, подобен набору операторов вида $\mathcal{G}^{(i)} \otimes \mathcal{A}$ для некоторых $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_k(1)$ и $i \in I_d$.

Отметим, что задачи ручного типа представляют интерес именно в классе задач бесконечного типа, но поскольку задачи ручного типа формально включают в себя задачи конечного типа, то мы не будем исключать задачи конечного типа из задач ручного типа, как это иногда делается.

Будем говорить, что задача об описании (с точностью до подобия) наборов операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ имеет *дикий тип* (или является *дикой*), если в $\mathcal{O}_{K_2}(n, J)$ существует набор эндоморфизмов $\mathcal{G}^{(0)}$ такой, что выполняются следующие условия:

a) если $\mathcal{P}$ — неразложимый набор операторов из $\mathcal{O}_k(2)$, то набор операторов $\mathcal{G}^{(0)} \otimes \mathcal{A}$ также является неразложимым;

b) если наборы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ из $\mathcal{O}_k(2)$ не подобны, то наборы операторов $\mathcal{G}^{(0)} \otimes \mathcal{A}$ и $\mathcal{G}^{(0)} \otimes \mathcal{A}'$ также не подобны.

В настоящей статье мы рассматриваем задачу об описании наборов $\mathcal{O}_k(n, J)$ конечного, ручного и дикого типов.

2. Формулировка основных результатов.

Сопоставим каждой паре (n, J) ориентированный граф с множеством вершин $\Lambda_0 = [1, n] = \{1, \ldots, n\}$ и множеством стрелок

$$\Lambda_1 = \{i \to j \mid (i, j) \in J\}.$$

$\Gamma S(n, J)$ с нулевым элементом полугруппы $S(n, J)$.

Граф $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1)$, который будем обозначать через $\Lambda(n, J)$, является "графом соотношений" для операторов всех наборов из $\mathcal{O}_k(n, J)$. Однако основную роль в нашей теории, как будет видно в дальнейшем, играет не граф $\Lambda(n, J)$, а граф $\overline{\Lambda}(n, J) := \Lambda(n, \overline{J})$, где $\overline{J} = [1, n]_0^2 \setminus J$. Другими словами, $\overline{\Lambda}(n, J)$ — ориентированный граф, дополняющий граф $\Lambda(n, J)$ до полного графа (без петель), т. е. $\overline{\Lambda}(n, J) = (\overline{\Lambda}_0, \overline{\Lambda}_1)$, где $\overline{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, а $i \to j$ принадлежит $\overline{\Lambda}_1$ тогда и только тогда, когда $i \to j$ не принадлежит Λ_1 и при этом $i \neq j$.

Очевидно, что $\overline{\overline{\Lambda}}(n, J) = \Lambda(n, J)$. Отметим еще, что множество J однозначно восстанавливается и по графу $\Lambda(n, J)$, и по графу $\overline{\Lambda}(n, J)$.

Теорема 1. *Задача об описании с точностью до подобия наборов операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ имеет конечный представленческий тип.*

Теорема 2. *Если ориентированный граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ ацикличный, то задача об описании с точностью до подобия наборов операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ имеет ручной (соответственно дикий) тип тогда и только тогда, когда граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ имеет ручной (соответственно дикий) представленческий тип.*

Напомним, что ориентированный граф называется *ацикличным*, если он не имеет ориентированных циклов. Условие ацикличности графа $\overline{\Lambda}(n, J)$ означает, что операторы $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ любого набора $\mathcal{P} \in \mathcal{O}_k(n, J)$ порождают конечную полугруппу (см. п. 3).

Относительно определения представлений ориентированных графов и описания графов конечного, ручного и дикого представленческих типов см. п. 4.

3. *Sem*-конечные наборы операторов.

В этой части статьи мы выясним, что означает условие ацикличности графа $\overline{\Lambda}(n, J)$ в иных терминах и, в частности, в терминах операторов.

Напомним (см. п. 1), что паре (n, J) мы сопоставляем полугруппу $S(n, J)$ с образующими элементами $0, e_1, \ldots, e_n$ и определяющими соотношениями $e_i^2 = e_i$ для всех i, $e_i e_j = 0$ для всех $(i, j) \in J$.

Набор линейных операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, действующих в конечномерном векторном k-пространстве V, будем называть *sem-конечным*, если они порождают конечную полугруппу в алгебре $\operatorname{End}_k V$.

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны:*

a) ориентированный граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ *ацикличен;*

b) полугруппа $S(n, J)$ *конечна;*

c) любой набор операторов $\mathcal{P} \in \mathcal{O}_k(n, J)$ *sem-конечен.*

Доказательство. Импликация a) $\Rightarrow$ *b).* Зафиксируем в полугруппе $S(n, J)$ ненулевой элемент $x = x_1 x_2 \dots x_m$, где x_i — некоторые стандартные образующие: $x_i = e_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Очевидно, что $x = 0$, если (α_i, α_{i+1}) не является стрелкой в графе $\overline{\Lambda}(n, J)$ (для некоторого $1 \leq i < m$). Значит, чтобы элемент x не был нулевым, необходимо, чтобы в графе $\overline{\Lambda}(n, J)$ существовал ориентированный путь из вершины α_1 в вершину α_m, проходящий через вершины $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$. Поскольку граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ не имеет ориентированных циклов, то число всех его ориентированных путей конечно, а значит полугруппа $S(n, J)$ конечна.

Импликация b) $\Rightarrow$ *c).* Поскольку представление полугруппы $S(n, J)$ (или ее полугрупповой алгебры), соответствующее набору операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\} \in \mathcal{O}_k(n, J)$, сопоставляет образующим полугруппы $e_i, i > 0$, операторы $\mathcal{P}_i$, то из конечности полугруппы $S(n, J)$ следует *sem*-конечность набора операторов $\mathcal{P}$.

Импликация c) $\Rightarrow$ *a).* Мы рассмотрим равносильную импликацию $\overline{a}) \Rightarrow \overline{c})$, где $\overline{a})$ и $\overline{c})$ — отрицание условий *a)* и *c)*. Итак, пусть граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ не является ацикличным. Зафиксируем в нем минимальный ориентированный цикл $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{m-1}, i_m), (i_m, i_1)$ (т. е. такой, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$); в силу определения графа $\overline{\Lambda}(n, J)$ имеем, что $m \geq 2$.

Введем следующие идемпотентные операторы $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$, действующие в m-мерном векторном пространстве V с базисом $v_1, \dots, v_m$: $v_s \mathcal{C}_{i_s} = v_s + v_{s+1}$ при $1 \leq s < m$, $v_m \mathcal{C}_{i_m} = a v_1 + v_m$, где $a \in k$, и $v_t \mathcal{C}_q = 0$ во всех остальных случаях; в частности, $\mathcal{C}_i$ — нулевой оператор, если $i \neq i_1, \dots, i_m$. Легко видеть, что $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n\} \in \mathcal{O}_k(n, J)$. Положим $\mathcal{Q} = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \cdots \mathcal{C}_n$. Простые непосредственные вычисления показывают, что для любого натурального числа s оператор $\mathcal{Q}^s$ действует на базисных векторах следующим образом: $v_1 \mathcal{Q}^s = a^s v_1 + a^{s-1} v_m$ и $v_i \mathcal{Q}^s = 0$ при $i \neq 1$. Если теперь в качестве a взять ненулевой элемент, не являющийся корнем из единицы, то элементы $a, a^2, a^3, \dots$ поля k попарно различны и следовательно попарно различными являются и операторы $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^2$, $\mathcal{Q}^3, \dots$. Значит набор операторов $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n\}$ не является *sem*-конечным.

Предложение 1 доказано.

Возвращаемся к ситуации, которая возникла при рассмотрении импликации $c) \Rightarrow a)$. Для простоты будем считать, что минимальный цикл графа $\overline{\Lambda}(n,J)$ имеет вид $(1,2)$, $(2,3), \ldots, (m-1,m), (m,1)$. Тогда операторы $\mathcal{C}_{m+1}, \ldots, \mathcal{C}_n$ являются нулевыми, а операторы $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$, $\mathcal{C}_m$, действуют на базисных векторах $v_1, \ldots, v_m$ следующим образом:

$v_1\mathcal{C}_1 = v_1 + v_2$, $v_s\mathcal{C}_1 = 0$ при $s \neq 1$,

$v_2\mathcal{C}_2 = v_2 + v_3$, $v_s\mathcal{C}_2 = 0$ при $s \neq 2$,

. . . .

$v_{m-1}\mathcal{C}_{m-1} = v_{m-1} + v_m$, $v_s\mathcal{C}_{m-1} = 0$ при $s \neq m-1$,

$v_m\mathcal{C}_m = av_1 + v_m$, $v_s\mathcal{C}_m = 0$ при $s \neq m$.

Так как теперь мы будем рассматривать эти операторы при любом $a \in k$ (в отличии от доказательства импликации $c) \Rightarrow a)$, где нас интересовало только одно, выбранное специальным образом, значение a, то вместо $\mathcal{C}_m$ будем писать $\mathcal{C}_m^a$, а набор операторов обозначаем через $\mathcal{C}^a$.

Для $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$, $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_1, \ldots, \mathcal{P}'_n\}$ из $\mathcal{O}_k(n,J)$ положим

$$Hom(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \{\mathcal{X} \in \mathcal{O}_k(1) \,|\, \mathcal{P}_1\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{P}_n\}.$$

Очевидно, что $Hom(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ является векторным пространством, а при $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ алгеброй (над k), которую назовем *алгеброй эндоморфизмов набора* $\mathcal{P}$.

Лемма 1. $Hom(\mathcal{C}^{a_1}, \mathcal{C}^{a_2}) = 0$, *если* $a_1 \neq a_2$.

Лемма 2. $Hom(\mathcal{C}^a, \mathcal{C}^a) = \{x\mathcal{E} \,|\, x \in k\}$, *где* $\mathcal{E} : V \to V$ *— единичный оператор.*

Обе леммы будем доказывать одновременно.

Пусть $\mathcal{X} \in Hom(\mathcal{C}^{a_1}, \mathcal{C}^{a_2})$ и пусть для $i \in [1,n]$

$$v_i\mathcal{X} = x_{i1}v_1 + x_{i2}v_2 + \cdots + x_{in}v_n.$$

Если $i \in [1,m]$, $j \in [1,m-1]$ и при этом $i \neq j$, то

$$0 = v_i\mathcal{C}_j = (v_i\mathcal{C}_j)\mathcal{X} = (v_i\mathcal{X})\mathcal{C}_j =$$
$$= (x_{i1}v_1 + x_{i2}v_2 + \cdots + x_{in}v_n)\mathcal{C}_j =$$
$$= x_{ij}(v_j\mathcal{C}_j) = x_{ij}(v_j + v_{j+1}),$$

откуда $x_{ij} = 0$. Далее, при $i \in [1, m-1]$

$$0 = v_i \mathcal{C}_m^{a_1} = (v_i \mathcal{C}_m^{a_1})\mathcal{X} = (v_i \mathcal{X})\mathcal{C}_m^{a_2} =$$
$$= (x_{i1}v_1 + x_{i2}v_2 + \dots + x_{in}v_n)\mathcal{C}_m^{a_2} =$$
$$= x_{im}(v_m \mathcal{C}_m^{a_2}) = x_{im}(a_2 v_1 + v_m),$$

откуда $x_{im} = 0$. Итак, оператор $\mathcal{X}$ является диагональным.

Применяя к обеим частям равенства $v_i \mathcal{C}_i = v_i + v_{i+1}$, $i \in [1, m-1]$, оператор $\mathcal{X}$ и учитывая равенство $\mathcal{C}_i \mathcal{X} = \mathcal{X} \mathcal{C}_i$, последовательно имеем $(v_i \mathcal{X})\mathcal{C}_i = v_i \mathcal{X} + v_{i+1}\mathcal{X}$, $(x_{ii}v_i)\mathcal{C}_i = x_{ii}v_i + x_{i+1,i+1}v_{i+1}$, $x_{ii}v_i + x_{ii}v_{i+1} = x_{ii}v_i + x_{i+1,i+1}v_{i+1}$, откуда $x_{ii} = x_{i+1,i+1}$; итак, $x_{11} = \dots = x_{mm}$, т. е. $X = x_{11}\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор. Сделаем теперь то же самое с равенством $v_m \mathcal{C}_m^{a_1} = a_1 v_1 + v_m$, учитывая уже равенство $\mathcal{C}_m^{a_1}\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{C}_m^{a_2}$: $(v_m \mathcal{X})\mathcal{C}_m^{a_2} = a_1 v_1 \mathcal{X} + v_m \mathcal{X}$, $(x_{mm}v_m)\mathcal{C}_m^{a_2} = a_1 x_{11} v_1 + x_{mm} v_m$, $x_{mm}(a_2 v_1 + v_m) = a_1 x_{11} v_1 + x_{mm} v_m$, откуда (учитывая, что $x_{11} = x_{mm}$) имеем $(a_2 - a_1)x_{11} = 0$. И если $a_2 = a_1$, то последнее равенство является тождеством, а в противном случае $x_{11} = 0$ и следовательно $\mathcal{X} = 0$.

Обе леммы доказаны.

Из лемм 1 и 2 имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Если граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ не является ацикличным, то задача об описании с точностью до подобия наборов операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ имеет бесконечный тип.*

Действительно, из леммы 2 следует, что набор $\mathcal{C}^a$ неразложим для любого $a \in k$ как набор с локальной алгеброй эндоморфизмов, а из леммы 1 следует, что наборы $\mathcal{C}^{a_1}$ и $\mathcal{C}^{a_2}$ не подобны, если $a_1 \neq a_2$. И остается лишь воспользоваться бесконечностью поля k.

4. Представления ориентированных графов. Поскольку при изучении ориентированных графов представители разных школ накладывали на них различные ограничения, то, в связи с введением представлений графов [7], П. Габриель предложил называть ориентированный граф без всяких ограничений иным словом; в переводе на русский язык это слово "колчан". Мы в этой статье используем оба термина.

Пусть $Q = (Q_0, Q_1)$ — колчан с множеством вершин Q_0 и множеством стрелок Q_1, который в дальнейшем всегда предполагается

См., напр., [6, §5.2]

конечным (т. е. Q_0 и Q_1 — конечные множества). Кроме того, можно считать, без ограничения общности, что $Q_0 = \{1, 2, \dots, q\}$. Начальную и конечную вершины стрелки λ будем обозначать соответственно $s(\lambda)$ и $t(\lambda)$. Если λ — стрелка с начальной вершиной $s(\lambda) = x$ и конечной вершиной $t(\lambda) = y$, то будем также писать $\lambda : x \to y$ или (если колчан не имеет кратных стрелок) $\lambda = (x, y)$.

Представление колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k — это пара $R = (U, \gamma)$, которая состоит из семейства

$$U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$$

конечномерных векторных k-пространств U_x и семейства $\gamma = \{\gamma_\alpha\}$ линейных отображений $\gamma_\alpha : U_{s(\alpha)} \to U_{t(\alpha)}$, где α пробегает множество Q_1 . Множество всех таких представлений обозначаем через $\mathrm{rep}_k\, Q$.

Вектор

$$\overline{d} = \overline{d}(R) = (d_x), x \in Q_0,$$

где $d_x = \dim_k U_x$, называется *вектор-размерностью* представления R, а сумма

$$d = \sum_{x \in Q_0} d_x$$

— его *размерностью. Носителем* представления R называется подмножество в Q_0, состоящее из тех x, для которых $d_x \neq 0$. Представление называется *точным*, если его носитель совпадает с Q_0.

Представление колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ размерности 0 называется *нулевым*. Его носителем является пустое множество.

Два представления $R = (U, \gamma)$ и $R' = (U', \gamma')$ колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ называются *эквивалентными*, если существует семейство

$$\lambda = \{\lambda_x \,|\, x \in Q_0\}$$

линейных биективных отображений $\lambda_x : U_x \to U'_x$ такое, что для каждой стрелки $\alpha : x \to y$ из Q_1 диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "\gamma_\alpha"] \arrow[d, "\lambda_x"'] & U_y \arrow[d, "\lambda_y"] \\ U'_x \arrow[r, "\gamma'_\alpha"] & U'_y \end{tikzcd}$$

Если говорить более точно, то нужно было бы назвать такие представления конечномерными. Однако случай бесконечномерных пространств в этой статье не рассматривается.

является коммутативной, т. е. $\gamma_\alpha \lambda_y = \lambda_x \gamma'_\alpha$.

Прямая сумма $R' \oplus R''$ *представлений* $R' = (U', \gamma')$ и $R'' = (U'', \gamma'')$ колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ — это представление $(U' \oplus U'', \gamma' \oplus \gamma'')$, где $\gamma' \oplus \gamma''$ обозначает семейство линейных отображений

$$\{\gamma'_\alpha \oplus \gamma''_\alpha : U'_x \oplus U''_x \to U'_y \oplus U''_y\},$$

$\alpha : x \to y$ пробегает множество Q_1.

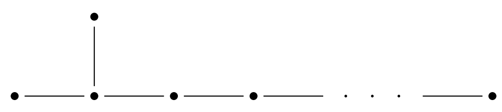
Ненулевое представление R называется *разложимым*, если оно эквивалентно прямой сумме двух ненулевых представлений, и *неразложимым* в противном случае. Нулевое представление считается разложимым.

Для представлений колчанов стандартным образом доказывается теорема Крулля-Шмидта об однозначности разложения произвольного представления в прямую сумму неразложимых представлений (с точностью до эквивалентности и перестановки слагаемых).

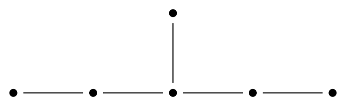
Говорят, что колчан Q имеет *конечный представленческий тип* над полем k, если он имеет, с точностью до эквивалентности, конечное число неразложимых представлений. Колчаны конечного представленческого типа описаны П. Габриелем в работе [7]. Очевидно, что несвязный колчан имеет конечный представленческий тип в том и только в том случае, когда такой тип имеет каждая его связная компонента.

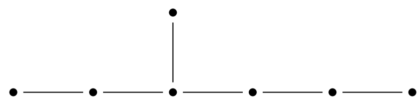
Теорема 4. *Связный колчан имеет конечный представленческий тип над полем k тогда и только тогда, когда соответствующий ему неориентированный граф является диаграммой Дынкина, т. е. имеет один из следующих видов:*

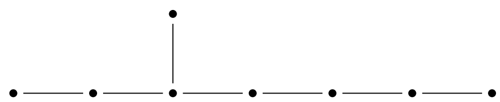
A_n $(n \geq 1)$

D_n  $(n \geq 4)$

См., напр., [6, §5.2], [8, 9].

E_6 

E_7 

E_8 

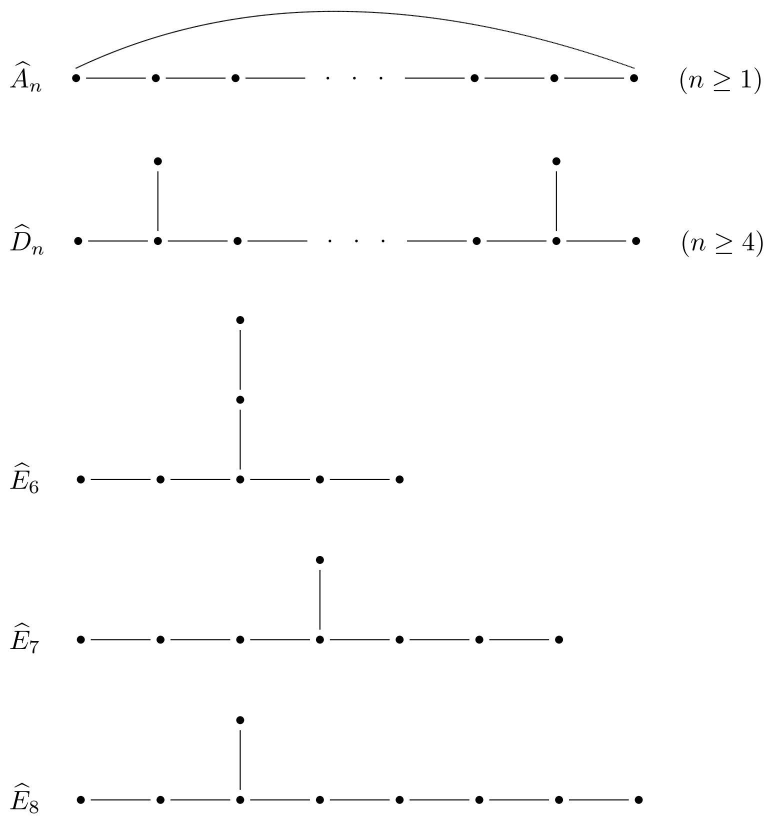
(*число вершин графа равно нижнему индексу в его обозначении*).

Говорят, что колчан Q имеет *ручной* (соответственно *дикий*) *представленческий тип* или является *ручным* (соответственно *диким*) над полем k, если задача об описании его представлений над k является ручной (соответственно дикой). Точные определения ручных и диких матричных задач над полем k , которые включают в себя представления конечномерных алгебр (а также задачи об описании представлений колчанов, частично упорядоченных множеств и т. п.) приведены в работах [10, 11]. При этом в работе [10] доказано, что задача не может быть одновременно ручной и дикой, а в работе [11] доказано, что любая матричная задача (из точно указанного общего класса) либо ручная, либо дикая. Первый из этих результатов естественно учитывается нами при формулировании основных теорем этой статьи; второй из этих результатов мы не используем (в силу специфики доказательства ручности и дикости). Если говорить о точных определениях колчанов ручного и дикого типов, то они аналогичны соответствующим определениям для наборов операторов (см. п. 1), если только полугрупповую алгебру заменить алгеброй путей колчана.

Колчаны ручного и дикого представленческих типов над полем k описаны независимо в роботах [12] и [13].

Как и в случае конечного представленческого типа, несвязный колчан имеет, очевидно, ручной (дикий) представленческий тип в том и только в том случае, когда такой тип имеет каждая его связная компонента.

Теорема 5. *Связный колчан бесконечного представленческого типа является ручным над полем k тогда и только тогда, когда соответствующий ему неориентированный граф есть расширенной диаграммой Дынкина, т. е. имеет один из следующих видов:*



(*число вершин графа на единицу больше нижнего индекса в его обозначении*). *В противном случае связный колчан является диким.*

Из приведенных теорем следует, что в общем случае колчан имеет ручной представленческий тип тогда и только тогда, когда он является непересекающимся объединением подколчанов, неориентированный граф каждого из которых есть обычная или расширенная диаграмма

Дынкина. Если при этом расширенные схемы Дынкина отсутствуют, то колчан имеет конечный представленческий тип.

5. Связь с представлениями колчанов. Схема доказательства теорем 1 и 2.

Напомним, что множество всех представлений колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k обозначается через $\operatorname{rep}_k Q$, а множество всех наборов операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$ из $\mathcal{O}_k(n)$ таких, что $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ для всех i и $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ для всех $(i,j) \in J$, — через $\mathcal{O}_k(n, J)$.

Мы отождествляем линейное отображение α из векторного пространства $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_p$ в векторное пространство $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_q$ с матрицей (α_{ij}), $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, где $\alpha_{ij} : U_i \to V_j$ — линейные отображения, индуцированные отображением (тогда сумма и композиция отображений задается правилами сложения и умножения матриц). Тождественный оператор, действующий на пространстве V, обозначаем $\mathbf{1}_V$.

Определим отображение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(n, J) : \operatorname{rep}_k \overline{\Lambda}(n, J) \to \mathcal{O}_k(n, J),$$

считая, что операторы $\mathcal{P}_1(R), \dots, \mathcal{P}_n(R)$ набора $R\mathcal{F}$, где $R = (U, \gamma) \in \operatorname{rep}_k \overline{\Lambda}(n, J)$, действуют на пространстве $U = \oplus_{i=1}^n U_i$ и задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(R)_{jj} &= \mathbf{1}_{U_j}, && \text{если } i = j, \\ \mathcal{P}_i(R)_{ij} &= \gamma_{ij}, && \text{если } (i,j) \in \overline{J}, \\ \mathcal{P}_i(R)_{js} &= 0 && \text{во всех остальных случаях.} \end{aligned}$$

В частности, (это видно хотя бы по тому, что размерность пространства U, в котором действуют операторы набора $\mathcal{F}(R)$, совпадает с размерностью представления R), нулевому представлению колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$ отображение $\mathcal{F}$ сопоставляет набор операторов, действующих в 0-мерном векторном пространстве. А вот набор нулевых операторов, действующий в векторном пространстве ненулевой размерности, не представим в виде $R\mathcal{F}$, поскольку из определения отображения $\mathcal{F}$ следует, что оператор $\mathcal{P}_1(R) + \dots + \mathcal{P}_n(R)$ является обратимым.

Нулевым набором операторов назовем произвольный набор нулевых операторов, действующих в некотором векторном пространстве V. Если при этом $V = 0$, то набор называем *тривиальным*; в противном случае нулевой набор называем *нетривиальным*.

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 2. *Отображение $\mathcal{F} = \mathcal{F}(n, J)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

a) *наборы операторов $R\mathcal{F}$ и $R'\mathcal{F}$ подобны тогда и только тогда, когда эквивалентны представления R и R';*

b) *набор операторов $R\mathcal{F}$ неразложим тогда и только тогда, когда неразложимо представление R.*

Предложение 3. *Если ориентированный граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ ацикличный, то каждый набор операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$, не содержащий нетривиальных нулевых прямых слагаемых, подобен набору вида $R\mathcal{F}$.*

Заметим, что эти предложения позволяют описывать все, с точностью до подобия, неразложимые наборы операторов из $\mathcal{O}_k(n, J)$ в ручном случае (см. п. 7). При этом как сами предложения, так и их доказательства дословно переносятся на случай произвольного поля (см. в связи с этим примечание 1).

В следующем пункте мы приведем доказательства этих утверждений, причем будем пользоваться матричным языком, который является более наглядным.

Из теоремы 3 и предложений 2, 3 следует, очевидно, теорема 1. Теорема 2 выводится из предложений 2 и 3 стандартным образом.

Таким образом, осталось доказать предложения 2 и 3; как уже говорилось, это будет сделано в следующем пункте.

6. Матричные доказательства предложений 2 и 3.

6.1. Матричные представления колчанов. Определения, связанные с представлениями колчанов, можно переформулировать на матричном языке, если всем линейным отображениям, которые при этом встречаются, сопоставить матрицы, предварительно зафиксировав базисы в соответствующих векторных пространствах. Но на этом естественном пути возникают некоторые формальные нюансы.

При изложении этого материала мы пользуемся монографией [14]. Рассмотрим сначала случай, который, понятно, является главным,

---

Доказательство предложения 2 в терминах представлений полугруппы $S(n, J)$ приведено в [4]. Это же касается и предложения 3, однако в этой статье мы используем несколько другую идею доказательства.

В данном случае отображение $\mathcal{F}(n, J)$ нужно "поднять" до алгебр K_1 и K_2 и воспользоваться вытекающей из предложений 2 и 3 связью между теми наборами эндоморфизмов свободных модулей и представлениями графов над алгебрами, которые указаны в определениях наборов операторов и графов ручного и дикого типов.

считая, когда колчан $Q = (Q_0, Q_1)$ не имеет изолированных вершин (т. е. таких, которые не являются ни начальной, ни конечной вершиной какой-либо стрелки). Число строк и столбцов матрицы A будем обозначать соответственно $r(A)$ и $c(A)$.

В этом случае *матричное представление колчана* Q над полем k — это семейство матриц

$$T = \{T_\alpha \mid \alpha : x \to y \ \text{ пробегает } \ Q_1\}$$

с элементами из поля k такое, что выполняются следующие условия:

а) матрицы T_α и T_β имеют одинаковое число строк, если начальная вершина стрелки α совпадает с начальной вершиной стрелки β;

б) матрицы T_α и T_β имеют одинаковое число столбцов, если конечная вершина стрелки α совпадает с конечной вершиной стрелки β;

в) число строк матрицы T_α равно числу столбцов матрицы T_β, если начальная вершина стрелки α совпадает с конечной вершиной стрелки β.

Для матричного представления T и вершины $x \in Q_0$ положим $d_x(T) = r(T_\alpha)$, если существует стрелка $\alpha = \{x \to y\}$, и $d_x(T) = c(T_\alpha)$, если существует стрелка $\alpha = \{z \to x\}$.

Тогда *вектор-размерность* матричного представления T колчана Q — это вектор

$$\overline{d} = \overline{d}(T) = (d_x), x \in Q_0,$$

где $d_x = d_x(T)$, а *размерность* — это число

$$d = \sum_{x \in Q_0} d_x.$$

Два матричных представления T и T' называются *эквивалентными*, если существует семейство обратимых матриц $N = \{N_x \mid x \in Q_0\}$, которые удовлетворяют следующие условия:

г) $r(N_x) = d_x(T)$ і $c(N_x) = d_x(T')$;

д) $T_\alpha N_y = N_x T'_\alpha$ для каждой стрелки $\alpha : x \to y$.

Прямая сумма и неразложимость матричных представлений колчана определяются естественным образом.

Как уже отмечалось (в общих чертах) выше, если в каждом векторном пространстве U_x представления $R = (U, \gamma)$ колчана Q (без изолированных вершин) зафиксировать некоторый базис и выписать матрицы T_α, соответствующие отображениям γ_α, то получим матричное представление $T = \{T_\alpha\}$. Очевидно, что два представления эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им матричные представления; это же касается и неразложимости представлений.

Напомним, что все вышеизложенное о матричных представлениях колчанов касается случая, когда колчан не имеет изолированных вершин. Чтобы было полное соответствие между представлениями в терминах линейных отображений и матричными представлениями в общем случае, мы поступим следующим образом (этот способ предложен в монографии [14]).

Итак, пусть $Q = (Q_0, Q_1)$ — колчан. Его *матричным представлением* Q назовем пару $(\overline{d}, T)$, состоящую из семейства целых неотрицательных чисел

$$\overline{d} = (d_x), x \in Q_0,$$

и семейства матриц

$$T = \{T_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \ \text{ пробегает } \ Q_1\}$$

таких, что T_α имеет размер $d_x \times d_y$ для каждой стрелки $\alpha : x \to y$. Множество всех матричных представлений колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k обозначаем через $\operatorname{Rep}_k Q$.

Два таких представления $(\overline{d}, T)$ и $(\overline{d'}, T')$ назовем *эквивалентными*, если $\overline{d} = \overline{d'}$ и существует семейство обратимых матриц $N = \{N_x \,|\, x \in Q_0\}$ таких, что

а) N_x имеет размер $d_x \times d'_x$ для произвольной вершины x;

б) $T_\alpha N_y = N_x T'_\alpha$ для произвольной стрелки $\alpha : x \to y$.

Очевидно, что в этом случае $\overline{d} = \overline{d'}$.

Прямая сумма представлений $(\overline{d}, T)$ і $(\overline{d'}, T')$ — это представление

$$(\overline{d} + \overline{d'}, T \oplus T'),$$

где

$$T \oplus T' = \{T_\alpha \oplus T'_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \ \text{ пробегает } \ Q_1\}.$$

И мы видим, что если, например, колчан состоит только из одной изолированной вершины, то его матричное представление — это пара $(d, \varnothing)$, т. е. по сути произвольное целое неотрицательное число d; при этом число 0 задает нулевое представление, а число 1 — единственное неразложимое представление.

6.2. Отображение $\mathcal{F}(n, J)$ в матричном виде. Для подмножества $J \subset [1, n]_0^2$ через $M_k(n, J)$ обозначим множество всех наборов квадратных матриц $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$ одинакового размера таких, что $P_i^2 = P_i$ для всех i и $P_i P_j = 0$ для всех $(i, j) \in J$. Тогда отображению $\mathcal{F} = \mathcal{F}(n, J)$ соответствует отображение

$$F = F(n, J) : \mathrm{Rep}_k \overline{\Lambda}(n, J) \to M_k(n, J).$$

Укажем это отображение в явном виде (на матричном языке).

Пусть $(\overline{d}, T) \in \mathrm{Rep}_k \overline{\Lambda}(n, J)$. Тогда матрицы $P_1, \cdots, P_n$ набора $P = (\overline{d}, T)F$ из $M_k(n, J)$ удовлетворяют следующие условия:

1) все матрицы P_i разбиты на n горизонтальных и n вертикальных полос, причем i-ая горизонтальная (соответственно вертикальная) полоса каждой из них состоит из d_i строк (соответственно столбцов);

2) в матрице P_i стоящий на месте (i, i) блок — единичная матрица; остальные ее диагональные блоки — нулевые;

3) недиагональный блок матрицы P_i, стоящий на месте (i, j), $j \neq i$, равен $T_{(i,j)}$, если в графе $\overline{\Lambda}(n, J)$ существует стрелка $i \to j$ и является нулевым в противном случае.

Во всех условиях i и j пробегают числа $1, \ldots, n$. Под блоком, стоящим на месте (i, j), подразумевается блок, стоящий на пересечении i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос.

В дальнейшем матрицу $T_{(i,j)}$ представления колчана (соответствующую стрелке $i \to j$) будем часто обозначать просто через T_{ij}.

6.3. Доказательство предложения 2 на языке матриц. Переходим к доказательству предложения 2, используя определение отображения $\mathcal{F}(n, J)$ в матричном виде (см. 6.2), которое обозначается $F = F(n, J)$.

Нам нужно доказать, что

a') наборы матриц $(\overline{d}, T)F$ и $(\overline{d'}, T')F$ подобны тогда и только тогда, когда эквивалентны матричные представления $(\overline{d}, T)$ и $(\overline{d'}, T')$;

b') набор матриц $(\overline{d}, T)F$ неразложим тогда и только тогда, когда неразложимо матричное представление $(\overline{d}, T)$.

Докажем сначала утверждение a').

Достаточность. Покажем, что два набора матриц $P = \{P_1, \dots, P_n\} = (\overline{d}, T)F$ и $P' = \{P'_1, \dots, P'_n\} = (\overline{d'}, T')F$ подобны, если эквивалентны матричные представления $(\overline{d}, T)$ и $(\overline{d'}, T')$ колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$.

Пусть $(\overline{d}, T)$ и $(\overline{d'}, T')$ — эквивалентные матричные представления колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$. Это означает, что $\overline{d} = \overline{d'}$ и существуют обратимые матрицы $X_1, \dots, X_n$ такие, что выполняются равенства

$$T_{ij}X_j = X_iT'_{ij}$$

для каждой стрелки $i \to j$ колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$. Тогда легко видеть, что блочно-диагональная матрица C вида

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & X_n \end{array}\right)$$

задает подобие наборов матриц $P = \{P_1, \dots, P_n\} = (\overline{d}, T)F$ и $P' = \{P'_1, \dots, P'_n\} = (\overline{d'}, T')F$, т. е. выполняется равенство $P_iC = CP'_i$ для каждого $i = 1, \dots, n$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T_{i1} & \cdots & T_{i,i-1} & E & T_{i,i+1} & \cdots & T_{in} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} X_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & X_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & X_i & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & X_{i+1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & X_n \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} X_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & X_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & X_i & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & X_{i+1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & X_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T'_{i1} & \cdots & T'_{i,i-1} & E & T'_{i,i+1} & \cdots & T'_{in} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

(напомним, что блок T_{ij} матрицы P_i, стоящий на месте (i,j), — это матрица представления T колчана $\overline{\Lambda}(n,J)$, если в нем существует стрелка $i \to j$, и нулевая матрица в противном случае; это же касается, естественно, и блоков T'_{ij}).

Необходимость. Пусть $P = \{P_1, \dots, P_n\} = (\overline{d}, T)F$ и $P' = \{P'_1, \dots, P'_n\} = (\overline{d'}, T')F$ — подобные наборы матриц. Тогда $\overline{d} = \overline{d'}$ и существует обратимая матрица

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{array}\right)$$

такая, что выполняются равенства $P_iC = CP'_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, т. е. имеют место следующие матричные равенства

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} E & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} E & T'_{12} & T'_{13} & \cdots & T'_{1n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right), \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T_{21} & E & T_{23} & \cdots & T_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) = \tag{2}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T'_{21} & E & T'_{23} & \cdots & T'_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

. . . .

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline T_{n1} & \cdots & T_{n,n-1} & E \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & \cdots & C_{1,n-1} & C_{1n} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline C_{n-1,1} & \cdots & C_{n-1,n-1} & C_{n-1,n} \\ \hline C_{n1} & \cdots & C_{n,n-1} & C_{nn} \end{array}\right) =$$

$$(n)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & \cdots & C_{1,n-1} & C_{1n} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline C_{n-1,1} & \cdots & C_{n-1,n-1} & C_{n-1,n} \\ \hline C_{n1} & \cdots & C_{n,n-1} & C_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline T'_{n1} & \cdots & T'_{n,n-1} & E \end{array}\right).$$

Обозначим через (i, j) (блочное) равенство, которое получается после умножения i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос в обеих частях выписанного выше матричного равенства (j). Тогда имеем, в частности, следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} (2,1): & 0 = C_{21}, \\ (3,1): & 0 = C_{31}, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ (n,1): & 0 = C_{n1}; \\ & \\ (1,2): & 0 = C_{12}, \\ (3,2): & 0 = C_{32}, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ (n,2): & 0 = C_{n2}; \\ & \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1,n):&\quad 0 = C_{1n},\\ (2,n):&\quad 0 = C_{2n},\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\ (n-1,n):&\quad 0 = C_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем, что

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right).$$

Тогда равенства (1) – (n) будут иметь такой вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} E & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{33} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{33} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} E & T'_{12} & T'_{13} & \cdots & T'_{1n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T_{21} & E & T_{23} & \cdots & T_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{33} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{33} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline T'_{21} & E & T'_{23} & \cdots & T'_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

. . . .

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{n,n-1} & E
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
C_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & C_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & C_{n-1,n-1} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{nn}
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
C_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & C_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & C_{n-1,n-1} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{nn}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
T'_{n1} & T'_{n2} & \cdots & T'_{n,n-1} & E
\end{array}\right).
$$

Первое из этих матричных уравнений эквивалентно равенствам

$$
\begin{array}{ll}
(1,2): & T_{12}C_{22} = C_{11}T'_{12}, \\
(1,3): & T_{13}C_{33} = C_{11}T'_{13}, \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
(1,n): & T_{1n}C_{nn} = C_{11}T'_{1n},
\end{array}
$$

второе — равенствам

$$
\begin{array}{ll}
(2,1): & T_{21}C_{11} = C_{22}T'_{21}, \\
(2,3): & T_{23}C_{33} = C_{22}T'_{23}, \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
(2,n): & T_{2n}C_{nn} = C_{22}T'_{2n},
\end{array}
$$

. . . .
. . . .
. . . .

последнее (n-ое) — равенствам

$$
\begin{array}{rl}
(n,1): & T_{n1}C_{11} = C_{nn}T'_{n1}, \\
(n,2): & T_{n2}C_{22} = C_{nn}T'_{n2}, \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
(n,n-1): & T_{n,n-1}C_{n-1,n-1} = C_{nn}T'_{n,n-1}
\end{array}
$$

или, другими словами, выполняются равенства

$$T_{ij}C_{jj} = C_{ii}T'_{ij}$$

для всех пар (i, j) таких, что в колчане $\overline{\Lambda}(n, J)$ существует стрелка $i \to j$. А это и означает эквивалентность представлений $(\overline{d}, T)$ и $(\overline{d'}, T')$ колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$ (обратимость матриц $C_{11}, \ldots, C_{nn}$ следует из обратимости матрицы C).

Утверждение a') доказано.

Переходим к доказательству утверждения b'). Мы докажем, что набор матриц $(\overline{d}, T)F$ разложим тогда и только тогда, когда разложимо матричное представление $(\overline{d}, T)$.

Если матричное представление $R = (\overline{d}, T)$ разложимо, то оно эквивалентно прямой сумме некоторых ненулевых представлений $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, а тогда согласно утверждению a') наборы матриц RF и $(R^{(1)} \oplus R^{(2)})F$ подобны; и поскольку из определения отображения F следует, что $(R^{(1)} \oplus R^{(2)})F = R^{(1)}F \oplus R^{(2)}F$, то отсюда имеем, что набор операторов RF разложим (так как размерности пространств, на которых действуют операторы наборов $R^{(1)}F$ и $R^{(2)}F$, совпадают соответственно с размерностями представлений $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, то эти пространства ненулевые).

Предположим теперь, что разложимо матричное представление $(\overline{d}, T)F$. Из доказательства утверждения a') следует (если положить $P = P'$), что алгебра эндоморфизмов $\operatorname{End} P = \{C \,|\, P_1C = CP_1, \ldots, P_nC = CP_n\}$ набора $P = \{P_1, \ldots, P_n\} = (\overline{d}, T)F$ состоит из матриц вида

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & C_{22} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & C_{nn} \end{array}\right),$$

где набор диагональных блоков $\overline{C} = \{C_{11}, \ldots, C_{nn}\}$ является эндоморфизмом представления $R = (\overline{d}, T)$ (т. е. задает эквивалентность представления с самим собой).

Применим эту зависимость к нашему случаю.

В силу разложимости представления $(\overline{d}, T)F$ существует идемпотентная матрица $C \in \operatorname{End} P$, отличная от нулевой и единичной (так как такая матрица существует для любой прямой суммы наборов операторов); значит соответствующий набор $\overline{C}$ является нетривиальным идемпотентным элементом алгебры эндоморфизмов представления $(\overline{d}, T)$, а следовательно она не является локальной. Отсюда имеем, что представление $(\overline{d}, T)$ разложимо.

6.4. Доказательство предложения 3 на языке матриц. Докажем, что если ориентированный граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ ацикличный, то каждый набор матриц $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$ из $M_k(n, J)$, не содержащий нетривиальных нулевых прямых слагаемых, подобен набору вида $(\overline{d}, T)F$.

Доказательство будем проводить индукцией по n. При $n = 1$ граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ состоит из одной вершины (без стрелок), а набор P состоит из одной единичной матрицы P_1; следовательно, если P_1 — матрица размера $m \times m$, то $P = (m, \varnothing)F$ (см. 6.1).

Предположим теперь, что наше утверждение верно при $m = n-1 > 0$ и докажем, что оно верно при $m = n$.

Итак, пусть $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$ — набор матриц из $M_k(n, J)$, не содержащий нетривиального нулевого прямого слагаемого (т. е. набора нулевых матриц размера $s \times s$ при $s > 0$). Зафиксируем в графе $\overline{\Lambda}(n, J)$ вершину i, в которую не входит ни одна стрелка (существование такой вершины следует из ацикличности графа); будем считать, что $i = 1$ (иначе перенумеруем вершины графа $\overline{\Lambda}(n, J)$).

Рассмотрим теперь матрицы $P_{1'}, \ldots, P_{m'}$, где $1' = 2, \ldots, m' = n$. Очевидно, что набор $\widehat{P} = \{P_{1'}, \ldots, P_{m'}\}$ принадлежит $M_k(m', J')$, где $J' = J \cap ([m'] \times [m'])$; здесь $[m'] = \{1', \ldots, m'\}$. При этом граф $\overline{\Lambda}(m', J')$ получается из графа $\overline{\Lambda}(n, J)$ выбрасыванием вершины 1 и всех связанных с ней стрелок (с последующей перенумерацией вершин элементами из $[m']$).

Перейдем от набора матриц $\widehat{P}$ к подобному набору матриц $0 \oplus Q = \{0_s \oplus Q_{1'}, \ldots, 0_s \oplus Q_{m'}\}$, равному прямой сумме нулевого набора 0 из нулевых матриц размера $s \times s$ ($s \geq 0$), и набора $Q = \{Q_{1'}, \ldots, Q_{m'}\}$ без нулевых прямых слагаемых. В силу индукционного предположения существует матричное представление $(\overline{d'}, T')$ колчана $\overline{\Lambda}(m', J')$ такое, что набор $Q \in M_k(m', J')$ подобен набору $(\overline{d'}, T')F'$, где $F' = F(m', J')$.

Пусть $(\overline{d'}, T')F' = U = \{U_{1'}, \ldots, U_{m'}\}$ и пусть X — обратимая матрица такая, что $X^{-1}Q_{1'}X = U_{1'}, \ldots, X^{-1}Q_{m'}X = U_{m'}$. Тогда обратимая матрица $E_s \oplus X$, где E_s — единичная матрица размера $s \times s$, осуществляет подобие наборов матриц $0 \oplus Q$ и $0 \oplus U$. И сле-

См., напр., [6, §5.2]

довательно набор матриц $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$ подобен набору матриц $V = \{V_1, V_{1'}, \dots, V_{m'}\}$, где V_1 — некоторая матрица и $V_{i'} = 0_s \oplus U_{i'}$ для любого $i' = 1', \dots, m'$, т. е. (учитывая, что $1' = 2, \dots, m' = n$) набору матриц $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ следующего вида:

$$V_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & W \\ \hline B & C \end{array} \right),$$

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array} \right), \dots, V_n = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array} \right).$$

Поскольку $\{U_2, \dots, U_n\} = (\overline{d'}, T')F'$, то матрицы $U_2, \dots, U_n$ разбиты на $n-1$ горизонтальных и $n-1$ вертикальных полос, и следовательно матрицы $V_2, \dots, V_n$ также являются блоковыми, с n горизонтальными и n вертикальными полосами (после продления разбиений матриц $U_2, \dots, U_n$); естественно считать, что и матрица V_1 разбита на полосы таким же образом. Так как (согласно выбору вершины 1) граф $\overline{\Lambda}(n, J)$ не содержит стрелок, входящих в 1, то $V_i V_1 = 0$ для любого $i \neq 1$, а значит $(V_2 + \cdots + V_n)V_1 = 0$, откуда имеем (учитывая обратимость матрицы $U_2 + \cdots + U_n$), что блоки B и C матрицы V_1 — нулевые. Итак,

$$V_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & W \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Покажем, что A — обратимая матрица. Предположим противное. Поскольку $A^2 = A$, то существует обратимая матрица Y такая, что

$$Y^{-1} A Y = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где 2-ая горизонтальная и вертикальная полосы не пустые. Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)^{-1} V_1 \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} E & 0 & W_1 \\ 0 & 0 & W_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)^{-1} V_i \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & U_i \end{array} \right)$$

при $i = 2, \ldots, n$. И поскольку из $V_1^2 = V_1$ следует, что $W_2 = 0$, то, таким образом, имеем, что набор матриц V, а значит и набор матриц P, содержит (нетривиальное) нулевое прямое слагаемое, что противоречит выбору набора P.

Итак, идемпотентная матрица A обратимая, а следовательно является единичной. Тогда

$$V_1 = \left(\begin{array}{c|c} E & W \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

и, напоминаем,

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array} \right), \ldots, V_n = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array} \right).$$

Осталось учесть равенство $V_1 V_j = 0$ для всех j таких, что в графе $\overline{\Lambda}(n, J)$ не существует стрелки $1 \to j$. Такое равенство означает, что блок W_{1j} матрицы V_1, стоящий на пересечении 1-ой горизонтальной полосы с j-ой вертикальной полосой, является нулевым.

Теперь легко видеть, что $V = (\overline{d}, T)F(n, J)$, где $(\overline{d}, T)$ — следующее матричное представление колчана $\overline{\Lambda}(n, J)$:

a) ограничение $(\overline{d}, T)$ на подколчан $\overline{\Lambda}(m', J')$ совпадает с представлением $(\overline{d'}, T')$;

b) $d_1 = s$;

c) стрелке вида $1 \to j$ соответствует матрица W_{1j}.

Предложение 3 доказано.

7. Примеры.

7.1. Рассмотрим задачу об описании с точностью до подобия наборов идемпотентных операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4\}$, таких что $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0$ для любых i, j, кроме $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$. В этом случае $J = [1, 4]_0^2 \setminus \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ и граф $\overline{\Lambda}(4, J)$ имеет следующий вид:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$

Следовательно согласно теоремам 1 и 4 рассматриваемая задача об операторах имеет конечный тип.

Выпишем все (с точностью до подобия) неразложимые наборы операторов, пользуясь предложениями 2 и 3. Из этих предложений следует, что если зафиксировать полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений колчана

$\overline{\Lambda}(4,J)$ и применить к ним отображение $\mathcal{F} = \mathcal{F}(4,J)$, то вместе с единственным нулевым неразложимым набором получим полную систему неразложимых попарно неподобных наборов операторов.

Для каждого связного подграфа $Q = (Q_0, Q_1)$ графа $\overline{\Lambda}(4,J)$ (включая сам граф и пустой подграф) рассмотрим представление R_Q графа $\overline{\Lambda}(4,J)$, сопоставляющее вершине $s \in Q_0$ одномерное пространство k, вершине $s \notin Q_0$ нулевое пространство и стрелке $i \to j$ подграфа Q тождественное отображение. Представлениями вида R_Q исчерпываются все (с точностью до эквивалентности) неразложимые представления колчана $\overline{\Lambda}(4,J)$ [7].

Легко видеть, что указанные ниже наборы операторов 1) – 11) образуют полную систему неразложимых попарно неподобных наборов операторов из $\mathcal{O}_k(4,J)$ (операторы записываются в матричном виде):

1) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

2) $P_1 = 1,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

3) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 1,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

4) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 1,\ \ P_4 = 0;$

5) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 1;$

6) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

7) $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

8) $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

9) $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

Согласно [7] этот результат является верным для любого колчана типа A_n (т. е. колчана, сопутствующим неориентированным графом которого есть диаграмма Дынкина A_n).

Операторы, соответствующие этим матрицам, выписываются естественным образом в стандартных базисах векторных пространств, задаваемых в виде k^m.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

10) $$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

11) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2. Рассмотрим задачу об описании с точностью до подобия наборов идемпотентных операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4\}$, таких что $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ для любых i, j, кроме $(i,j) = (1,2), (1,3), (1,4)$. В этом случае $J = [1,4]_0^2 \setminus \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ и граф $\overline{\Lambda}(4, J)$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & & \uparrow & & \\ 2 & \leftarrow & 1 & \rightarrow & 4 \end{array}$$

Следовательно согласно теоремам 1 и 4 рассматриваемая задача об операторах имеет конечный тип.

Описание всех (с точностью до подобия) неразложимых наборов операторов из $\mathcal{O}_k(4, J)$ будем проводить по той же схеме, что и в 7.1.

Неразложимые представления колчана $\overline{\Lambda}(4, J)$ исчерпываются (с точностью до эквивалентности) представлениями вида R_Q (см. 7.1) и представлением $R_1 = (U, \gamma)$, где $U_1 = k \oplus k$, $U_2 = U_3 = U_4 = k$, $\gamma_{(1,2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1_k \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma_{(1,3)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1_k \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma_{(1,4)} = \left(\begin{smallmatrix} 1_k \\ 1_k \end{smallmatrix}\right)$ [7].

Легко видеть, что указанные ниже наборы операторов 1) – 13) образуют полную систему неразложимых попарно неподобных наборов операторов из $\mathcal{O}_k(4, J)$ (операторы записываются в матричном виде):

1) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

2) $P_1 = 1,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

3) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 1,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 0;$

4) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 1,\ \ P_4 = 0;$

5) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0,\ \ P_4 = 1;$

6) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

7) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

8) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

9) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

10) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

11) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

12) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

13) $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3. Рассмотрим задачу об описании с точностью до подобия наборов идемпотентных операторов $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$, таких что $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ для любых i, j, кроме $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (1, 3)$. В этом случае $J = [1, 3]_0^2 \setminus \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ и граф $\overline{\Lambda}(3, J)$ имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd}$$

Согласно теоремам 1 и 4 рассматриваемая задача об операторах имеет бесконечный тип, а согласно теоремам 2 и 5 она имеет ручной тип.

Описание всех (с точностью до подобия) неразложимых наборов операторов из $\mathcal{O}_k(3, J)$ будем проводить по той же схеме, что и в 7.1.

Неразложимые представления колчана $\overline{\Lambda}(3,J)$ можно получить из неразложимых представлений цикла длины 4 без ориентированных путей длины 2 (описанных в матричном виде в [15]), если ограничиться представлениями с обратимыми отображениями для фиксированной стрелки . Мы не будем выписывать указанных представлений (читатель, интересующийся этой тематикой, может это легко сделать и сам), а сразу укажем полную систему неразложимых попарно неподобных наборов операторов из $\mathcal{O}_k(3,J)$ (записывая операторы в матричном виде):

1) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0;$

2) $P_1 = 1,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 0;$

3) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 1,\ \ P_3 = 0;$

4) $P_1 = 0,\ \ P_2 = 0,\ \ P_3 = 1;$

5) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

6) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

7) $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

8) $$P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{n+1} & E_{n+1} & \begin{matrix} E_n \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0_{n+1} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_{n,n+1} & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n+1} & E_{n+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_n \end{matrix} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_{n,n+1} & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n+1} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_{n,n+1} & E_n \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

Задачу об описании неразложимых представлений цикла любой длины (и, в частности, цикла длины 3) можно свести к аналогичной задаче для циклов длины 2 (см. [12, стр.764]), решение которой изложено в [16], если обе стрелки имеют одинаковое направление, и в [17], если стрелки имеют противоположное направление. Ее можно также рассматривать как задачу об описании некоторой связки цепей [18].

$$9)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & E_n & E_n\,\overline{0} \\ \hline 0_n & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_n & E_n & \overline{0}\,E_n \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_n & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1,n} & E_{n+1} \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

$$10)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{n+1} & \begin{matrix} E_n \\ \widetilde{0} \end{matrix} & E_{n+1} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \\ \hline 0_{n,n+1} & E_n & \overline{0}\,E_n \\ \hline 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & E_{n+1} \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

$$11)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & E_n\,\overline{0} & E_n \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_n & 0_{n,n+1} & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_{n,n+1} & 0_n \\ \hline 0_{n+1,n} & E_{n+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_n \end{matrix} \\ \hline 0_n & 0_{n,n+1} & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_{n,n+1} & 0_n \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_n & 0_{n,n+1} & E_n \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

$$12)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{n+1} & \begin{matrix} E_n \\ \widetilde{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_n \end{matrix} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_n \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n,n+1} & E_n & E_n \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1,n} \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & 0_n \\ \hline 0_{n,n+1} & 0_n & E_n \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

$$13)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & E_n\,\overline{0} & \overline{0}\,E_n \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1} \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_{n,n+1} & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & E_{n+1} & E_{n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1} \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_{n,n+1} & 0_{n,n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & 0_{n+1} \\ \hline 0_{n+1,n} & 0_{n+1} & E_{n+1} \end{array}\right),\ n \geq 1;$$

$$14)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & E_n & E_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & E_n & J_n(0) \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & E_n \end{array}\right), n \geq 1;$$

$$15)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & J_n(0) & E_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & E_n & E_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & E_n \end{array}\right), n \geq 1;$$

$$16)\ P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} E_n & E_n & J_n(a) \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right), P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & E_n & E_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & E_n \end{array}\right), a \in k,\ n \geq 1.$$

Здесь E_i (соответственно 0_i) обозначает единичную (соответственно нулевую) матрицу размера $i \times i$, $0_{ij}, i \neq j$, — нулевую матрицу размера $i \times j$ и $J_i(b)$ — клетку Жордана размера $i \times i$ с собственным числом b. Через $\overline{0}$ и $\widetilde{0}$ обозначается соответственно нулевой столбец и нулевая строка.

Заметим, что указанный ответ остается верным и для алгебраически незамкнутого поля, если в 16) вместо клеток Жордана рассматривать неразложимые клетки Фробениуса.

Список литературы

[1] *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.

[2] *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.

[3] *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23–44.

[4] *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15–22.

[5] *Тертична О. М.* Матричні зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням: дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 – К., 2009 (наук. керівник В. М. Бондаренко). – 167 с.

[6] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. // М.: Мир, 1986. – 543 с.

[7] *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103.

[8] *Дрозд Ю. А.* Матричные задачи и категории матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 144–153.

[9] *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. - Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.

[10] *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.

[11] *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

[12] *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.

[13] *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

[14] *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів // Видавництво Ін-ту математики НАН України, Київ, 2005. – 228 с.

[15] *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР. – 1967. – **31**, № 6. – С. 1361–1378.

[16] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. // М: Наука, 1966. – 576 с.

[17] *Добровольская Н. М., Пономарев В. А.* Пара встречных операторов // УМН. – 1965. – **20 (126)**, вып. 6. – С. 81–86.

[18] *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38–61.