Збiрник праць Iн-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 126–138

УДК 517.984, 517.923

А. С. Горюнов

(Институт математики НАН Украины, Киев)

О многоинтервальных краевых задачах для дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями

goriunov@imath.kiev.ua

The paper studies the multi-interval boundary value problems of Shrödinger type with distributional potentials. For the corresponding symmetric operators boundary triplets are found and constructive descriptions of all self-adjoint, maximal dissipative and maximal accumulative extensions and generalized resolvents in terms of homogeneous boundary conditions are given. Real extensions and extensions given by local boundary conditions are described as well.

В работе изучены многоинтервальные краевые задачи для дифференциальных уравнений типа Шредингера с коэффициентами-распределениями. Для соответствующих симметрических операторов построены пространства граничных значений, даны конструктивные описания всех самосопряженных, максимальных диссипативных и максимальных аккумулятивных расширений, а также обобщенных резольвент в терминах краевых условий. Также отдельно выделены вещественные расширения и расширения, заданные локальными краевыми условиями.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ и $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ — разбиение конечного интервала $[a, b]$ на n частей. Пусть также числа $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_j < \dfrac{m}{2}$, и на каждом подинтервале (a_{j-1}, a_j), $j \in \{1, \dots, n\}$ задано формальное дифференциальное выражение порядка m

$$l_j(y) = i^m y^{(m)}(t) + q_j(t)y(t), \tag{1}$$

где потенциалы-распределения q_j удовлетворяют условия

$$\begin{aligned} &q_j = Q_j^{(k_j)}, \\ &Q_j \in L_1([a_{j-1}, a_j], \mathbb{R}), \end{aligned} \tag{2}$$

а производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Для случая $n = k_0 = 1$ краевые задачи, связанные с формальным дифференциальным выражением (1) при условиях (2) изучались в [1]. Случай $n = 1$, $1 \leq k_0 \leq m/2$, был исследован в работе [2]. Целью данной работы является обобщение результатов [1, 2] на случай $n \geq 2$.

Введем, следуя [2], на каждом интервале (a_{j-1}, a_j) квазипроизводные

$$\begin{aligned} &D_j^{[r]} y = y^{(r)}, \qquad 0 \leq r \leq m - k_j - 1; \\ &D_j^{[m-k_j+s]} y = (D_j^{[m-k_j+s-1]} y)' + i^{-m}(-1)^s \binom{k_j}{s} Q_j D_j^{[s]} y, \ 0 \leq s \leq k_j, \end{aligned}$$

где $\binom{k}{s}$ — биномиальные коэффициенты.

Введем обозначения

$$\widehat{y}_j(t) = \left(D_j^{[0]} y(t), D_j^{[1]} y(t), \dots, D_j^{[m-1]} y(t) \right) \in \mathbb{C}^m.$$

Тогда в гильбертовых пространствах $L_2\left((a_{j-1}, a_j), \mathbb{C}\right)$ определены максимальные и минимальные операторы

$$L_{j,1} : y \to l_j[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{j,1}) := \left\{ y \in L_2 \,\middle|\, D_j^{[0]} y, \ldots, D_j^{[m-1]} y \in AC,\, D_j^{[m]} y \in L_2 \right\},$$

$$L_{j,0} : y \to l_j[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{j,0}) := \{ y \in \mathrm{Dom}(L_{j,1}) \,|\, \widehat{y}_j(a_{j-1}) = \widehat{y}_j(a_j) = 0 \}.$$

Как показано в работе [2], операторы $L_{j,1}$, $L_{j,0}$ замкнуты и плотно определены в пространстве $L_2([a_{j-1}, a_j], \mathbb{C})$. Оператор $L_{j,0}$ является симметрическим с индексом дефекта (m, m) и

$$L_{j,0}^* = L_{j,1}, \quad L_{j,1}^* = L_{j,0}.$$

Напомним, что *пространством граничных значений* симметрического оператора T с равными дефектными числами называется тройка (H, Γ_1, Γ_2), где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 — линейные отображения из $\mathrm{Dom}(T^*)$ в H, такие, что:

1. для любых $f, g \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$
$$(T^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, T^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H,$$
2. для любых $g_1, g_2 \in H$ существует вектор $f \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$ такой, что $\Gamma_1 f = g_1$ и $\Gamma_2 f = g_2$.

В работе [2] показано, что для любого $j = 1, \ldots, n$ тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_{1,j}, \Gamma_{2,j})$, где $\Gamma_{1,j}, \Gamma_{2,j}$ — линейные отображения из $\mathrm{Dom}(L_{j,1})$ на $\mathbb{C}^m$, такие, что

$$\Gamma_{1,j} y := i^{2l} \begin{pmatrix} -D_j^{[2l-1]} y(a_{j-1}), \\ \ldots, \\ (-1)^l D_j^{[l]} y(a_{j-1}), \\ D_j^{[2l-1]} y(a_j), \\ \ldots, \\ (-1)^{l-1} D_j^{[l]} y(a_j) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{2,j} y := \begin{pmatrix} D_j^{[0]} y(a_{j-1}), \\ \ldots, \\ D_j^{[l-1]} y(a_{j-1}), \\ D_j^{[0]} y(a_j), \\ \ldots, \\ D_j^{[l-1]} y(a_j) \end{pmatrix}$$

при $m = 2l$ и

$$\Gamma_{1,j}y := i^{2l+1}\begin{pmatrix} -D_j^{[2l]}y(a_{j-1}), \\ ..., \\ (-1)^l D_j^{[l+1]}y(a_{j-1}), \\ D_j^{[2l]}y(a_j), \\ ...., \\ (-1)^{l-1}D_j^{[l+1]}y(a_j), \\ \alpha D_j^{[l]}y(a_j)+\beta D_j^{[l]}y(a_{j-1}) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{2,j}y := \begin{pmatrix} D_j^{[0]}y(a_{j-1}), \\ ..., \\ D_j^{[l-1]}y(a_{j-1}), \\ D_j^{[0]}y(a_j), \\ ..., \\ D_j^{[n-1]}y(a_j), \\ \gamma D_j^{[l]}y(a_j)+\delta D_j^{[l]}y(a_{j-1}) \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{(-1)^l}{2}+i, \quad \delta = \frac{(-1)^{l+1}}{2}+i$$

при $m = 2l+1$, является пространством граничных значений для оператора $L_{j,0}$.

Рассмотрим пространство $L_2\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ как прямую сумму $\oplus_{j=1}^{n}L_2\left([a_{j-1},a_j],\mathbb{C}\right)$, состоящую из вектор-функций $f=\oplus_{j=1}^{n}f_j$ таких, что $f_j \in L_2\left([a_{j-1},a_j],\mathbb{C}\right)$. В этом пространстве рассмотрим операторы $L_{\max}=\oplus_{j=1}^{n}L_{j,1}$ и $L_{\min}=\oplus_{j=1}^{n}L_{j,0}$.

Легко видеть, что операторы $L_{\max}$, $L_{\min}$ замкнуты и плотно определены в пространстве $L_2\left([a,b],\mathbb{C}\right)$, а также, что оператор $L_{\min}$ является симметрическим с индексом дефекта (nm, nm) и

$$L_{\min}^* = L_{\max}, \quad L_{\max}^* = L_{\min}.$$

Теорема 1. *Тройка* $(\mathbb{C}^{nm}, \Gamma_1, \Gamma_2)$*, где* Γ_1, Γ_2 *— линейные отображения*

$$\Gamma_1 y := (\Gamma_{1,1}y, \Gamma_{1,2}y, \ldots, \Gamma_{1,n}y)\,,\ \Gamma_2 y := (\Gamma_{2,1}y, \Gamma_{2,2}y, \ldots, \Gamma_{2,n}y)\,, \tag{3}$$

из $Dom(L_{max})$ *на* $\mathbb{C}^{nm}$ *является пространством граничных значений для оператора* L_{min}.

Доказательство. Проверим, что выполняются оба условия определения пространства граничных значений.

1) Пусть $y = \oplus_{j=1}^{n} y_n$, $z = \oplus_{j=1}^{n} z_n$ — две произвольные функции из $\mathrm{Dom}(L_{\max})$. Тогда

$$\begin{aligned}(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) =& \sum_{j=1}^{n}(L_{j,1}y_j, z_j) - \sum_{j=1}^{n}(y_j, L_{j,1}z_j) = \\ =& \sum_{j=1}^{n}(\Gamma_{1,j}y_j, \Gamma_{2,j}z_j) - \sum_{j=1}^{n}(\Gamma_{2,j}y_j, \Gamma_{1,j}z_j) = \\ =&(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z) - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z).\end{aligned}$$

2) Пусть $g_1, g_2 \in \mathbb{C}^{nm}$, то есть $g_1 = (g_{1,1}, \ldots, g_{1,n})$, $g_2 = (g_{2,1}, \ldots, g_{2,n})$, где $g_{ij} \in \mathbb{C}^m$. Тогда для всех $j = 1, \ldots, n$ существуют функции $y_j \in \mathrm{Dom}(L_{j,1}$ такие, что $\Gamma_{1,j}y_j = g_{1,j}$, $\Gamma_{2,j}y_j = g_{2,j}$, откуда сразу следует требуемое утверждение. □

Обозначим через L_K сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих краевому условию

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{4}$$

где K — ограниченный оператор в пространстве $\mathbb{C}^p$.

Аналогично обозначим через L^K сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих краевому условию

$$(K - I)\,\Gamma_1 y - i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{5}$$

где K – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^{nm\times nm}$.

Конструктивное описание различных классов расширений оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 2. *Для любого оператора сжатия K в пространстве $\mathbb{C}^p$ сужение L_K оператора L_{max} является максимальным диссипативным расширением оператора L_{min}. Аналогично, сужение L^K оператора L_{max} является максимальным аккумулятивным расширением L_{min}.*

Обратно, для любого максимального диссипативного (максимального аккумулятивного) расширения $\widetilde{L}$ оператора L_{min} существует единственный оператор сжатия K такой, что $\widetilde{L} = L_K$ (соответственно, $\widetilde{L} = L^K$).

Расширения L_K и L^K самосопряжены тогда и только тогда, когда K является унитарным оператором в $\mathbb{C}^p$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и теоремы 1.6 гл. 3 монографии [3] для пространств граничных значений абстрактного симметрического оператора. □

Напомним, что линейный оператор T в пространстве $L_2([a,b],\mathbb{C})$ называется *вещественным*, если:

1. Для произвольной функции f из $\mathrm{Dom}(T)$ комплексно сопряженная функция $\overline{f}$ также принадлежит $\mathrm{Dom}(T)$.

2. Оператор T переводит комплексно сопряженные функции в комплексно сопряженные функции, то есть $T(\overline{f}) = \overline{T(f)}$.

В случае вещественности минимального оператора естественно возникает вопрос о выделении среди его расширений тех, которые сами являются вещественными операторами. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть число m — четное и все $Q_j \in L_2([a_{j-1},a_j],\mathbb{R})$. Тогда соответствующие минимальный и максимальный квазидифференциальные операторы L_{max} и L_{min} вещественны.*

Все вещественные максимальные диссипативные и максимальные аккумулятивные расширения минимального оператора L_{min} самосопряжены. Самосопряженные расширения L_K или L^K вещественны тогда и только тогда, когда унитарная матрица K симметрична.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что вещественны все операторы $L_{j,1}$ и $L_{j,0}$. Поэтому операторы $L_{\max}$ и $L_{\min}$ вещественны, как их прямые суммы.

Пусть теперь L_K — максимальное диссипативное вещественное расширение $L_{\min}$. Поскольку коэффициенты квазипроизводных вещественны, легко видеть, что $\Gamma_1\overline{y} = \overline{\Gamma_1 y}$ и $\Gamma_2\overline{y} = \overline{\Gamma_2 y}$. Тогда для любой функции $y \in \mathrm{Dom}(L_K)$ имеем

$$(K - I)\,\Gamma_1\overline{y} + i\,(K + I)\,\Gamma_2\overline{y} = 0,$$

то есть

$$\left(\overline{K} - I\right)\Gamma_1 y - i\left(\overline{K} + I\right)\Gamma_2 y = 0,$$

иными словами, $L_K \subset L^{\overline{K}}$. Таким образом, максимальное диссипативное расширение L_K является также аккумулятивным, следовательно, оператор L_K самосопряжен, и тогда $L_K = L^{\overline{K}}$.

Из замечания 4.3 работы [2] следует, что $L_K = L^{\overline{K}}$ тогда и только тогда, когда $K^{-1} = \overline{K}$. Поскольку матрица K унитарна, $K^{-1} = \overline{K^T}$, поэтому имеем $K = K^T$.

Аналогично показывается, что максимальное аккумулятивное расширение вещественно тогда и только тогда, когда оно самосопряжено и $K = K^T$. □

Все функции из $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ и их квазипроизводные до порядка $m-1$ принадлежат $\oplus_{j=1}^{n} AC\left([a_{j-1}, a_j], \mathbb{C}\right)$. Следовательно, нижеследующие обозначения корректны.

Будем обозначать через $\mathbf{f_{a-}}$ росток слева, а через $\mathbf{f_{a+}}$ росток справа непрерывной функции f в точке a. По аналогии с работой [2] будем говорить, что краевые условия, определяющие оператор $L \subset L_{\max}$ называются локальными, если для любой функции $y \in \mathrm{Dom}(L)$ и функций $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, из того, что $\mathbf{y_{ja_j-}} = \mathbf{y_{a_j-}}$, $\mathbf{y_{ja_j+}} = \mathbf{y_{a_j+}}$ и $\mathbf{y_{ja_k-}} = \mathbf{y_{ja_k+}} = 0$, $k \neq j$, следует, что $y_j \in \mathrm{Dom}(L)$. Для $j = 0$ и $j = n$ рассматриваются соответственно только правый и левый ростки.

Следующее утверждение дает в случае выражения четного порядка $m = 2l$ описание расширений L_K и L^K, заданных локальными краевыми условиями.

Теорема 4. *Краевые условия* (4) *и* (5)*, задающие соответственно расширения* L_K *и* L^K*, являются локальными тогда и только тогда, когда матрица* K *имеет вид*

$$K = \begin{pmatrix} K_{a_0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K_{a_1} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & K_{a_n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где K_{a_1} *и* $K_{a_n} \in \mathbb{C}^{l \times l}$*, а остальные* $K_{a_j} \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Доказательство. Рассмотрим расширение L_K, заданное краевыми условиями вида (4).

Заметим сначала, что для $f, g \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ из $\mathbf{f_{a_j-}} = \mathbf{g_{a_j-}}$ следует, что $\mathbf{D_j^{[k]}} \mathbf{f_{a_j-}} = \mathbf{D_j^{[k]}} \mathbf{g_{a_j-}}$, $k = 0, \ldots, m-1$, а из $\mathbf{f_{a_j+}} = \mathbf{g_{a_j+}}$ следует $\mathbf{D_{j+1}^{[k]}} \mathbf{f_{a_j+}} = \mathbf{D_{j+1}^{[k]}} \mathbf{g_{a_j+}}$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Поскольку порядок выражения $m = 2l$, можно ввести обозначения

$$\Gamma_{1,j} = (\Gamma_{1,j,a_{j-1}}, \Gamma_{1,j,a_j}), \quad \Gamma_{2,j} = (\Gamma_{2,j,a_{j-1}}, \Gamma_{2,j,a_j}).$$

Тогда из $\mathbf{f_{a_j-}} = \mathbf{g_{a_j-}}$ следует, что $\Gamma_{1,j,a_j} f = \Gamma_{1,j,a_j} g$, и $\Gamma_{2,j,a_j} f = \Gamma_{2,j,a_j} g$, а из $\mathbf{f_{a_j+}} = \mathbf{g_{a_j+}}$ следует, что $\Gamma_{1,j+1,a_j} f = \Gamma_{1,j+1,a_j} g$ и $\Gamma_{2,j+1,a_j} f = \Gamma_{2,j+1,a_j} g$.

Если K имеет вид (6), то краевые условия (4) можно записать как систему

$$\begin{cases} (K_{a_0}-I)\Gamma_{1,1,a_0}y + i(K_{a_0}+I)\Gamma_{2,1,a_0}y = 0, \\ (K_{a_1}-I)\begin{pmatrix}\Gamma_{1,1,a_1}y \\ \Gamma_{1,2,a_1}y\end{pmatrix} + i(K_{a_1}+I)\begin{pmatrix}\Gamma_{2,1,a_1}y \\ \Gamma_{2,2,a_1}y\end{pmatrix} = 0, \\ \dots \\ (K_{a_n}-I)\Gamma_{1,n,a_n}y + i(K_{a_n}+I)\Gamma_{2,n,a_n}y = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что такие краевые условия являются локальными.

Обратно, пусть краевые условия (4) локальные. Запишем матрицу K в виде

$$K = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,2n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{2n,1} & K_{2n,2} & \dots & K_{2n,2n} \end{pmatrix},$$

где блоки $K_{r,j} \in \mathbb{C}^{l\times l}$. Нам нужно показать, что $K_{rj} = 0$ за исключением таких случаев: $r = j = 1$; $r = j = 2n$; $r = 2p+1$, $j \in \{r, r+1\}$, $p = 0,\dots,n-1$; $r = 2p$, $j \in \{r-1, r\}$, $p = 1,\dots,n-1$.

Краевые условия (4) принимают вид системы из $2n$ уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(K_{2p+1,2j-1}\Gamma_{1,j,a_{j-1}}y + K_{2p+1,2j}\Gamma_{1,j,a_j}y\right) - I\Gamma_{1,p+1,ap} + \\ \quad + i\sum_{j=1}^{n} \left(K_{2p+1,2j-1}\Gamma_{2,j,a_{j-1}}y + K_{2p+1,2j}\Gamma_{2,j,a_j}y\right) + iI\Gamma_{2,p+1,ap} = 0, \\ \qquad r = 2p+1,\ p = 0,\dots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} \left(K_{2p,2j-1}\Gamma_{1,j,a_{j-1}}y + K_{2p,2j}\Gamma_{1,j,a_j}y\right) - I\Gamma_{1,p,ap} + \\ + i\sum_{j=1}^{n} \left(K_{2p,2j-1}\Gamma_{2,j,a_{j-1}}y + K_{2p,2j}\Gamma_{2,j,a_j}y\right) + iI\Gamma_{2,p,ap} = 0, \\ \qquad r = 2p, p = 1,\dots,n \end{cases}$$

Согласно определению локальных краевых условий, любая функция y_s, такая, что $\mathbf{y_{sa_s-}} = \mathbf{y_{a_s-}}$, $\mathbf{y_{sa_s+}} = \mathbf{y_{a_s+}}$ и $\mathbf{y_{sa_k-}} = \mathbf{y_{sa_k+}} = 0$, $k \neq s$, также удовлетворяет этой системе. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &K_{r,2s+1}\Gamma_{1,s+1,a_s}y + K_{r,2s}\Gamma_{1,s,a_s}y + \\ &\qquad + iK_{r,2s+1}\Gamma_{2,s+1,a_s}y + iK_{r,2s}\Gamma_{2,s,a_s}y = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &K_{r,2s+1}\left(\Gamma_{1,s+1,a_s}y + i\Gamma_{2,s+1,a_s}y\right) + \\ &\qquad + K_{r,2s}\left(\Gamma_{1,s,a_s}y + i\Gamma_{2,s,a_s}y\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $r = 1, \ldots, 2n$, а s пробегает все значения от 1 до $n-1$, $s \neq p$, где $r = 2p$ либо $r = 2p+1$. Таким образом данные уравнения содержат все K_{rs}, для которых надо показать, что они равны 0.

Перепишем теперь условия (4) в параметрической форме. Для произвольного вектора $F \in \mathbb{C}^{nm}$, $F = (F_1, \ldots, F_{2n})$, $F_j \in \mathbb{C}^l$ рассмотрим векторы $-i(K+I)F$ и $(K-I)F$. Из определения пространства граничных значений следует, что существует функция $y_F \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ такая, что

$$\begin{cases} -i\,(K+I)\,F = \Gamma_1 y_F, \\ \quad (K-I)\,F = \Gamma_2 y_F. \end{cases}$$

Легко видеть, что такая функция y_F удовлетворяет краевым условиям (4) и, следовательно, $y_F \in \mathrm{Dom}(L_K)$. Перепишем последнюю систему в терминах блоков $K_{r,j}$ матрицы K:

$$\begin{cases} -i\sum_{j=1}^{2n} K_{r,j}F_j - iF_r = \Gamma_{1,p,a_p}y_F, \quad r=2p+1,\ p=0,\dots,n, \\ -i\sum_{j=1}^{2n} K_{r,j}F_j - iF_r = \Gamma_{1,p+1,a_p}y_F, \quad r=2p,\ p=1,\dots,n, \\ -i\sum_{j=1}^{2n} K_{r,j}F_j - F_r = \Gamma_{2,p,a_p}y_F, \quad r=2p+1,\ p=0,\dots,n, \\ -i\sum_{j=1}^{2n} K_{r,j}F_j - F_r = \Gamma_{2,p+1,a_p}y_F, \quad r=2p,\ p=1,\dots,n, \end{cases}$$

откуда имеем, что $\Gamma_{1,p,a_p}y + i\Gamma_{2,p,a_p}y = -2iF_{2p}$ и $\Gamma_{1,p+1,a_p}y + i\Gamma_{2,p+1,a_p}y = -2iF_{2p+1}$ для произвольных $F_j \in \mathbb{C}^l$.

Применяя это представление к (7) и варьируя F_j, получаем, что $\operatorname{Ker}(K_{rs}) = \mathbb{C}^l$ для всех K_{rs}, входящих в (7), что завершает доказательство теоремы. □

Напомним, что обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора L в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется операторная функция $\lambda \mapsto R_\lambda$, заданная на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, которая может быть представлена в виде

$$R_\lambda f = P^+ \left(L^+ - \lambda I^+\right)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ — какое-либо самосопряженное расширение L с выходом в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}^+ \supset \mathcal{H}$, I^+ — единичный оператор в $\mathcal{H}^+$, а P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$. Известно, что операторная функция R_λ является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ — обобщенная спектральная функция оператора L, т. е. операторная функция $\mu \mapsto F_\mu$, определенная на $\mathbb{R}$ такая, что

1. При $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором.

2. $F_{\mu+} = F_\mu$ при всех вещественных μ.

3. При любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu\to-\infty} ||F_\mu x||_{\mathcal{H}} = 0, \quad \lim_{\mu\to+\infty} ||F_\mu x - x||_{\mathcal{H}} = 0.$$

Следующая теорема дает описание обобщенных резольвент симметрического оператора $L_{\min}$.

Теорема 5. 1) *Каждая обобщенная резольвента R_λ оператора L_{min} в полуплоскости $Im\lambda < 0$ задается формулой $R_\lambda h = y$, где y — решение краевой задачи вида*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_1 f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_2 f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2([a,b],\mathbb{C})$ и $K(\lambda)$ — голоморфная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве $\mathbb{C}^p$ такая, что $||K(\lambda)|| \le 1$.

2) *В полуплоскости $Im\lambda > 0$ каждая обобщенная резольвента оператора L_{min} задается формулой $R_\lambda h = y$, где y — решение краевой задачи вида*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_1 f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_2 f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2([a,b],\mathbb{C})$ и $K(\lambda)$ — голоморфная в верхней полуплоскости операторная функция в пространстве $\mathbb{C}^p$ такая, что $||K(\lambda)|| \le 1$.

Эта параметризация обобщенных резольвент операторными функциями $K(\lambda)$ биективна.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и теоремы 1 работы [4]. □

Список литературы

[1] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukrainian Math. J. — 2011. — **63**, № 9. — P. 1190–1205.

[2] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Diff. Equ. — 2013. — № 101. — P. 1–16.

[3] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984 – 284 с.

[4] *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сборник. — 1976. —**100(142)**, № 2(6). — С. 210–216.