Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 2, 205–229

УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,3]***, Г. С. Пасічник***[2,3]

(*[1] Національний технічний університет України "КПІ", Київ;*
[2] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці;
[3] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів

ivasyshen_sd@mail.ru, pasichnyk@mail.ru

For a degenerate parabolic equation of the second order with constant coefficients in senior terms and with growing coefficients in minor terms, we prove the representation theorems in the form of the Poisson integrals for the solutions of the Cauchy problem and for the solutions defined in an open layer and beloning to a special weight L_p-spaces.

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших членів, доведено теореми про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші та визначених у відкритому шарі розв'язків зі спеціальних вагових L_p-просторів.

1. Вступ

У попередніх статтях авторів [1, 2] розглянуто ультрапараболічне рівняння типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів. Для такого рівняння знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), вивчено його властивості та властивості породжених ним інтегралів Пуассона. На основі цих властивостей доведено теореми про розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані належать до спеціальних вагових просторів $L_p^{\vec{a}}$ функцій чи просторів $M^{\vec{a}}$ узагальнених мір. Цим самим у зазначених статтях для розглянутого рівняння реалізована частина описаного в [3, 4] підходу С.Д. Ейдельмана та першого співавтора, який дає можливість отримати точні результати про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші. У цій статті реалізується інша частина вказаного підходу, яка стосується інтегрального зображення розв'язків.

2. Попередні відомості та формулювання результатів

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$; $n := n_1+n_2+n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$.

У шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядатимемо рівняння

$$(Lu)(t,x) := \Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$

$$-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1,...,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11},...,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

Будемо використовувати позначення, означення просторів та інформацію про ФРЗК для рівняння (1) із праць [1, 2]. Тому спочатку наведемо необхідні відомості з цих праць.

Нехай $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – ФРЗК для рівняння (1). Для нього справджуються, зокрема, оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3}G(t,x;\tau,\xi)| \leq$$
$$\leq C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2}\,E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де k_l і m_l – довільні мультиіндекси розмірності n_l, $l \in \{1,2,3\}$, C і c – додатні сталі, причому C залежить від k_l і m_l. Тут і далі

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{-c\,\Big(\frac{|e^{bt}X_1(t)-\xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)}\Big)\Big\},$$
$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1,$$
$$X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1',$$

де для $t > 0$

$$\alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{2bt}-1}{2b} & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases},$$

$$p_2(t) := \begin{cases} 12\left(\dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)}\right), & b \neq 0, \\ t^3, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} 720\left(\dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2}{b^3}\dfrac{e^{bt}+1}{2(e^{bt}-1)}\right), & b \neq 0, \\ t^5, & b = 0. \end{cases}$$

Для функції G правильна формула згортки

$$G(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\gamma,z)G(\gamma,z;\tau,\xi)\,dz,$$
$$0 \leq \tau < \gamma < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

і функція

$$G^*(\tau,\xi;t,x) := G(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \leq \tau < \gamma < t \leq T, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

є ФРЗК для спряженого до (1) рівняння

$$(L^*v)(\tau,\xi) := -\partial_\tau v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} v(\tau,\xi) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} v(\tau,\xi) - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}} v(\tau,\xi) +$$
$$+ b\sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\Big(\xi_{1j} v(\tau,\xi)\Big) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)}. \tag{5}$$

Щоб означити простори функцій та узагальнених мір, уведемо набори визначених для $t \in [0,T]$ функцій

$$\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)),$$
$$k_1(t,a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bt}}{c_0 - a_1 p_1(t)},\ k_l(t,a_l) := \frac{c_0 a_l}{c_0 - a_l p_l(t)}, \quad l \in \{2,3\};$$
$$\vec{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$
$$\vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t), \ldots, s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1,2,3\},$$
$$s_{1j}(t) := k_1(t,a_1) + 2\theta(n_2 - j)(\alpha_b(t))^2 k_2(t,a_2) +$$
$$+4\Big(\frac{\alpha_b(t) - t}{b}\Big)^2 \theta(n_3 - j) k_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_1\},$$
$$s_{2j}(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2\theta(n_3 - j)k_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_2\},$$
$$s_{3j}(t) := 4k_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_3\},$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (2), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T) < c_0/a_l$, $l \in \{1,2,3\}$, $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$, а також вагові функції

$$\Phi_\nu(t,x) := \exp\Big\{\ \nu \sum_{l=1}^{3} k_l(t,a_l)|X_l(t)|^2\ \Big\},$$

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\Big\{\ \nu \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\ \Big\},$$

$$(t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} := \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$t \in [0,T], \quad p \in [1,\infty].$$

Використовуватимемо такі простори: $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ – простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $L_p^{\vec{a}} := L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$; $M^{\vec{a}}$ – простір узагальнених борелівських мір $\mu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що

$$\|\mu\|^{\vec{a}} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0,x)\ d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелівських множин простору $\mathbb{R}^n$ і $|\mu|$ – повна варіація μ; $L_1^{-\vec{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$; $C_0^{-\vec{s}(T)}$ – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що

$$|\psi(x)|\Psi_1(T,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ФРЗК G породжує інтеграли Пуассона відповідно функції φ та узагальненої міри μ за формулами

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6}$$

та

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{7}$$

Основні результати цієї статті містяться в наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, і $\mu \in M^{\vec{a}}$. Тоді правильні такі твердження:*

1) розв'язок u рівняння (1)*, який задовольняє умови*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0,T] : \quad \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C, \tag{8}$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} = 0 \tag{9}$$

і при $p = \infty$

$$\forall\, \psi \in L_1^{-\vec{s}(T)} : \ \lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(t,x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x) dx, \tag{10}$$

зображується у вигляді (6)*;*

2) для розв'язку u рівняння (1)*, для якого виконується нерівність* (8) *з* $p = 1$ *і співвідношення*

$$\forall\, \psi \in C_0^{-\vec{s}(T)} : \quad \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, u(t,x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\ d\mu(x), \tag{11}$$

правильне зображення (7)*.*

Теорема 2. *Нехай* u *– розв'язок рівняння* (1) *в шарі* $\Pi_{(0,T]}$*, який задовольняє умову*

$$\exists\, C > 0 \quad \exists\, p \in [1,\infty] \quad \forall\, t \in (0,T] : \quad \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C. \tag{12}$$

Тоді при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$*, а при* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\vec{a}}$*, такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (6) *і* (7)*.*

Зауважимо, що з теореми 1 випливає єдиність розв'язку задачі Коші, що завершує доведення теореми з [2] про коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (1). Теорема 2 є в певному розумінні оберненою до теореми 1.

3. Доведення теореми 1

1) Нехай u – розв'язок, який задовольняє умови (8), (9) або (10); $V_R := (0,T] \times B_R$, де B_R – куля в просторі $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат; ζ – досить гладка на $[0,\infty)$ функція така, що $\zeta = 1$ на $[0,1/2]$, $\zeta = 0$ на $[3/4,\infty)$ і $\zeta' \le 0$; $\zeta_R(\xi) := \zeta(|\xi|/R)$; (t,x) – фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – задане число.

Скористаємось такою формулою Гріна–Остроградського з [1]:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{B_R} (v\,Lu - u\,L^*v)(\tau,\xi)\,d\xi = \int\limits_{B_R} (uv)(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{\Gamma_R} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(v\,\partial_{\xi_{1l}}u - u\,\partial_{\xi_{1l}}v)(\tau,\xi)\mu_{1j}\,dS_\xi -$$

$$-b\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} (vu)(\tau,\xi)\xi_{1j}\mu_{1j}\,dS_\xi -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{\Gamma_R} \Big(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\mu_{2j} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\mu_{3j}\Big)(vu)(\tau,\xi)\,dS_\xi, \qquad (13)$$

де $t_1 < t_2$, Γ_R — межа кулі B_R,

$$(\mu_{11},...,\mu_{1n_1},\mu_{21},...,\mu_{2n_2},\mu_{31},...,\mu_{3n_3})$$

є орт зовнішньої нормалі до Γ_R, L і L^* — диференціальні вирази з (1) і (5).

Покладемо у формулі (13) замість t_1, t_2, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi)$ відповідно h, $t-\varepsilon$, $u(\tau,\xi)$ і $G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi)$, де $R \geq R_0$, $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$, а u – взятий нами розв'язок рівняння (1). Використовуючи властивості функції ζ_R та рівність (4), одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-\varepsilon,\xi)\,\zeta_R(\xi)\,u(t-\varepsilon,\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\,\zeta_R(\xi)\,u(h,\xi)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{h}^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} u(\tau,\xi)\,L^*(G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi))\,d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ прийдемо до рівності

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\,\zeta_R(\xi)\,u(h,\xi)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_h^t d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} u(\tau,\xi)\,L^*(G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi))\,d\xi =$$

$$=: I_1^{(R)} + I_2^{(R)}, \tag{14}$$

Перейдемо в (14) до границі при $R \to \infty$. Доведемо, що при цьому інтеграл $I_1^{(R)}$ прямує до інтеграла

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\,u(h,\xi)\,d\xi.$$

За допомогою оцінки (2) маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| = \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)(1-\zeta_R(\xi))u(h,\xi)d\xi \Big| \le$$

$$\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-h))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t-h,x,\xi) \times$$

$$\times \Big(E_{c_0}(t-h,x,\xi)\Phi_1(h,\xi) \Big)\Big(|u(h,\xi)|\Phi_{-1}(h,\xi) \Big)\, d\xi. \tag{15}$$

Використовуватимемо нерівності

$$E_{c_0}(t-h,x,\xi)\,\Phi_1(h,\xi) \le E_{c_0}(t-h,x,\xi)\,\Psi_1(h,\xi) \le$$

$$\le \exp\Big\{ \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} k_{lj}(t-h,s_{lj}(h))\ |X_{lj}(t-h)|^2 \Big\} \le c_1, \tag{16}$$

h – досить мале число таке, що $0 < t - h \leq T$, $p_l(T) < H(h) := \min\limits_{l,j} \dfrac{c_0}{s_{lj}(h)}$, $x \in B_{R_0/4}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$E_{c_0}(t-h,x,\xi) \leq \exp\Big\{ -c_0 \frac{(R/4)^2}{q(t-h)} \Big\},$$
$$0 < t-h \leq T, \quad x \in B_{R_0/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}, \tag{17}$$

де $c_1 > 0$, R – досить велике число, R_0 – фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$, $q(t) := \max\limits_{l \in \{1,2,3\}} p_l(t)$.

Друга нерівність із (16) доводиться так само, як нерівність (7) з [2], а перша та третя – очевидні на підставі означення функцій s_{lj}. Доведення нерівності (17) аналогічне до доведення нерівності (22) з [2]. Як і там, використовуючи позначення

$$\tilde{X}(t) := (e^{bt}x_1, X_2(t), X_3(t))),$$
$$Y(t) := ((1-e^{bt})x_1, -\alpha_b(t)\hat{x}_1, -tx_2' - x_1'(\alpha_b(t)-t)/b),$$

маємо

$$\frac{|e^{b(t-h)}x_1 - \xi_1|^2}{p_1(t-h)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t-h)-\xi_l|^2}{p_l(t-h)} \geq$$
$$\geq \frac{1}{q(t-h)}|\tilde{X}(t-h)-\xi|^2 \geq \frac{1}{q(t-h)} \Big(|\xi| - |\tilde{X}(t-h)| \Big)^2,$$

$$|\tilde{X}(t-h)| = |x - Y(t-h)| \leq |x| + |Y(t-h)| \leq$$
$$\leq |x| + \Big((1-e^{b(t-h)})^2|x_1|^2 + (\alpha_b(t-h))^2|\hat{x}_1|^2 +$$
$$+ (t-h)^2|x_2'|^2 + \Big(\frac{\alpha_b(t-h)-(t-h)}{b} \Big)^2 |x_1'|^2 \Big)^{1/2} \leq$$
$$\leq |x| + \Big((\alpha_b(T)b)^2|x_1|^2 + (\alpha_b(T))^2|\hat{x}_1|^2 + T^2|x_2'|^2 +$$
$$+ \Big(\frac{\alpha_b(T)+T}{b} \Big)^2 |x_1'|^2 \Big)^{1/2} \leq (1+c_2)|x| \leq$$
$$\leq (1+c_2)R_0/4,$$

і, отже,

$$\frac{|e^{b(t-h)}x_1-\xi_1|^2}{p_1(t-h)}+\sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(t-h)-\xi_l|^2}{p_l(t-h)}\geq$$
$$\geq\frac{1}{q(t-h)}\left(\frac{R}{2}-(1+c_2)\frac{R_0}{4}\right)^2\geq\frac{1}{q(t-h)}\left(\frac{R}{4}\right)^2$$

для всіх $R>(1+c_2)R_0$.

З нерівностей (15) – (17) випливає, що

$$|I_1-I_1^{(R)}|\leq$$
$$\leq C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-h))^{-n_l/2}\exp\left\{-((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-h)}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{(c-c_0)/2}(t-h,x,\xi)\Big(|u(h,\xi)|\Phi_{-1}(h,\xi)\Big)\,d\xi. \qquad (18)$$

Якщо $p=1$, то звідси зразу випливає, що для фіксованого h

$$|I_1-I_1^{(R)}|\leq C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-h))^{-n_l/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-h)}\right\}\|u(h,\cdot)\|_1^{\vec{k}(h,\vec{a})}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Якщо $p\in(1,\infty)$, то з допомогою нерівності Гельдера отримуємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\leq C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-h))^{-n_l/(2p)}\times$$
$$\times\exp\left\{-((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-h)}\right\}\|u(h,\cdot)\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{p'(c-c_0)/2}(t-h,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-h))^{-n_l/2}d\xi\right)^{1/p'}\leq$$

$$\le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-h))^{-n_l/(2p)}\exp\Big\{-((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-h)}\Big\}\times$$
$$\times\|u(h,\cdot)\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$$

при фіксованому h. Тут $p' := p/(p-1)$ і використано те, що згідно з нерівністю (12) із [2] інтеграл обмежений. Для $p=\infty$ при фіксованому h маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \le$$
$$\le C\|u(h,\cdot)\|_\infty^{\vec{k}(h,\vec{a})}\exp\Big\{-((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-h)}\Big\}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$. Для цього зазначимо, що

$$L^*\Big(G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi)\Big)=\zeta_R(\xi)L^*G^*(\tau,\xi;t,x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\,G^*(\tau,\xi;t,x)\,\partial_{\xi_{2j}}\zeta_R(\xi)+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\,G^*(\tau,\xi;t,x)\times$$
$$\times\partial_{\xi_{3j}}\zeta_R(\xi)-\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}\Big(\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R(\xi)\;\partial_{\xi_{1s}}G^*(\tau,\xi;t,x)+$$
$$+\partial_{\xi_{1j}}G^*(\tau,\xi;t,x)\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)\Big)-\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}G^*(\tau,\xi;t,x)\times$$
$$\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)+b\sum_{j=1}^{n_1}\xi_{1j}\,G^*(\tau,\xi;t,x)\,\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R(\xi). \tag{19}$$

Оскільки при $\tau<t$ $L^*G^*(\tau,\xi;t,x)=0$, то перший доданок з (19) рівний нулю, а на підставі властивостей функції ζ_R усі вирази з (19) в $\mathbb{R}^n\setminus(B_{3R/4}\setminus B_{R/2})$ дорівнюють нулю. Використовуючи рівність (4), оцінки (2) і те, що для $\xi\in B_{3R/4}\setminus B_{R/2}$

$$|\xi_{1j}\,\partial_{\xi_{2j}}\zeta_R(\xi)|\le C,\quad |\xi_{2j}\,\partial_{\xi_{3j}}\zeta_R(\xi)|\le C,$$
$$|\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R(\xi)|\le C/R,\quad |\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)|\le C/R^2,$$

при $R \geq 1$ маємо

$$L^* \Big(G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi) \Big) \leq$$
$$\leq C\,(p_1(t-\tau))^{-(n_1+1)/2} \prod_{l=2}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2} E_c(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою цієї оцінки так само, як вище для $I_1 - I_1^{(R)}$, встановлюємо, що

$$\Big| \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} L^* \Big(G^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi) \Big)\, u(\tau,\xi) d\xi \Big| \leq C\times$$
$$\times \|u(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} \exp\Big\{ -((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-\tau)} \Big\} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-k_l},$$

де $k_1 = (n_1+1)/2$, $k_l = n_l/2$, $l \in \{2,3\}$, при $p=1$, $k_1 = n_1/(2p) + 1/2$, $k_l = n_l/(2p)$, $l \in \{2,3\}$, при $1 < p < \infty$ і $k_1 = 1/2$, $k_l = 0$, $l \in \{2,3\}$, при $p = \infty$. Звідси, використовуючи нерівність

$$\exp\Big\{ -((c-c_0)/2)\frac{(R/4)^2}{q(t-\tau)} \Big\} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-k_l} \leq$$
$$\leq C \exp\Big\{ -\varepsilon \frac{R^2}{q(t-\tau)} \Big\}, \quad 0 \leq \tau < t, \;\; R \geq 1, \;\; \varepsilon > 0,$$

і умову (8), дістаємо

$$|I_2^{(R)}| \leq C \exp\Big\{ -\varepsilon \frac{R^2}{q(t)} \Big\} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, після переходу в (14) до границі при $R \to \infty$ отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\, u(h,\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

У рівності (20) перейдемо до границі при $h \to 0$ і доведемо, що

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\,u(h,\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{21}$$

Звідси випливатиме правильність зображення (6).

Запишемо різницю

$$\Delta_h := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

у вигляді

$$\Delta_h = J_1^{(h)} + J_2^{(h)}, \tag{22}$$

де

$$J_1^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^0 G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi, \tag{23}$$

а

$$J_2^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,(u(h,\xi)-\varphi(\xi))d\xi, \tag{24}$$

якщо $p \in [1,\infty)$, і

$$J_2^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)u(h,\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

при $p=\infty$. Тут

$$\Delta_h^0 G(t,x;h,\xi) := G(t,x;h,\xi) - G(t,x;0,\xi).$$

Для $p \in \{1,\infty\}$ безпосередньо, а для $p \in (1,\infty)$ з допомогою нерівності Гельдера маємо

$$|J_1^{(h)}| \le J_{1p}^{(h)} \|u\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}, \tag{25}$$

$$J_{1p}^{(h)} := \|\Delta_h^0 G(t,x;h,\xi)\,\Phi_1(h,\xi)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

де $p' = \infty$ для $p = 1$, $p' = p/(p-1)$ для $p \in (1, \infty)$ і $p' = 1$ для $p = \infty$. Аналогічно для $p \in [1, \infty)$ отримуємо

$$|J_2^{(h)}| \leq J_{2p}^{(h)} \, \|u(h, \cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(h)}, \tag{26}$$
$$J_{2p}^{(h)} := \|G(t, x; 0, \cdot) \, \Psi_1(h, \cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n))}.$$

Доведемо, що

$$J_l^{(h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad l \in \{1, 2\}. \tag{27}$$

На підставі (8) співвідношення (27) для $l = 1$ буде доведено, якщо встановимо, що

$$J_{1p}^{(h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{28}$$

При доведенні цього співвідношення використовуватимемо наступне твердження: для довільно фіксованих $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ існують такі сталі $C_1 > 0$, $c_1 \in (c_0, c)$ (c – стала з оцінки (2), а c_0 – стала з означення функцій k_l) і $h_0 > 0$, що для довільних $h \in (0, h_0)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ правильна нерівність

$$|G(t, x; h, \xi)| \leq C_1 \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_c(t, x, \xi), \tag{29}$$

Доведемо це твердження. На підставі оцінки (2) і монотонного зростання функцій p_l маємо

$$|G(t, x; h, \xi)| \leq C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} \times$$
$$\times \exp\Big\{ - c \, \Big(\frac{|e^{b(t-h)} X_1(t-h) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t-h) - \xi_l|^2}{p_l(t)} \Big) \Big\}.$$

Оскільки для $c > 0$ існують сталі $C_1 > 0$ і $c_1 \in (c_0, c)$ такі, що для довільних $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$, $|v| \leq 1$, правильна нерівність

$$\exp\{-c|u - v|^2\} \leq C_1 \exp\{-c_1 |u|^2\},$$

то

$$\exp\Big\{-c\frac{|e^{b(t-h)}X_1(t-h)-\xi_1|^2}{p_1(t)}\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{-c\frac{|(e^{bt}X_1(t)-\xi_1)-be^{bt}\alpha_{-b}(h)x_1|^2}{p_1(t)}\Big\}\leq$$

$$\leq C_1\exp\Big\{-c_1\frac{|e^{bt}X_1(t)-\xi_1|^2}{p_1(t)}\Big\},$$

якщо h брати таким, щоб $be^{bt}\alpha_{-b}(h)|x_1|(p_1(t))^{-1/2}\leq 1$;

$$\exp\Big\{-c\frac{|X_2(t-h)-\xi_2|^2}{p_2(t)}\Big\}=$$

$$\exp\Big\{-c\frac{|(X_2(t)-\xi_2)-e^{bt}\alpha_{-b}(h)\hat{x}_1|^2}{p_2(t)}\Big\}\leq$$

$$\leq C_1\exp\Big\{-c_1\frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{p_2(t)}\Big\},$$

якщо h брати таким, щоб $e^{bt}\alpha_{-b}(h)|\hat{x}_1|(p_2(t))^{-1/2}\leq 1$, і

$$\exp\Big\{-c\frac{|X_3(t-h)-\xi_3|^2}{p_3(t)}\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{-c\frac{|(X_3(t)-\xi_3)-\frac{e^{bt}\alpha_{-b}(h)-h}{b}\hat{x}_1-hx_2'|^2}{p_2(t)}\Big\}\leq$$

$$\leq C_1\exp\Big\{-c_1\frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{p_3(t)}\Big\},$$

якщо h брати таким, щоб $(|\hat{x}_1|(e^{bt}\alpha_{-b}(h)-h)/b+h|x_2'|)(p_3(t))^{-1/2}\leq 1$,

На підставі оцінок (2), (29) і нерівностей, які відрізняються від (16) заміною $t-h$ на t, маємо

$$|\Delta_h^0 G(t,x;h,\xi)\,\Phi_1(h,\xi)|\leq$$

$$\le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}E_c(t,x,\xi)\,\Phi_1(h,\xi)\le$$

$$\le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}E_{c-c_0}(t,x,\xi)E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Psi_1(h,\xi)\le$$

$$\le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}E_{c-c_0}(t,x,\xi),$$

де h – довільне число з $(0,h_0)$ таке, що виконується нерівність $p_l(T)<H(h)$ ($H(h)$ з (16)). Враховуючи цю нерівність і те, що на підставі неперервності функції G

$$\Delta_h^0 G(t,x;h,\xi)\,\Phi_1(h,\xi)\underset{h\to 0}{\to}0,$$

з допомогою теореми Лебега про мажорантну збіжність отримуємо співвідношення (28) для $p\in[1,\infty]$.

Співвідношення (27) для $l=2$ і $p\in[1,\infty)$ випливає з рівності (9) і того, що на підставі нерівностей (2), (16) та обмеженості інтеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}E_\gamma(t,x,\xi)\,d\xi,\quad \gamma>0,$$

(див. (12) з [2]) правильні такі нерівності для всіх досить малих h:

$$J_{2p}^{(h)}\le C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{p'(c-c_0)}(t,x,\xi)E_{p'c_0}(t,x,\xi)\Psi_{p'}(h,\xi)\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_lp'/2}d\xi\Bigg)^{1/p'}\le\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2p}\times$$

$$\times\exp\Big\{\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}k_l(t,s_{lj}(h))|X_{lj}(t)|^2\Big\}\le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/(2p)},$$

$$p\in(1,\infty);$$

$$J_{2p}^{(h)} \le C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big(\prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi) E_{c_0}(t,x,\xi) \times$$

$$\times \Psi_1(h,\xi) \Big) \le C \exp \Big\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} k_l(t, s_{lj}(h)) \; |X_{lj}(t)|^2 \Big\} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} \le C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2}, \quad p = 1.$$

Оскільки при $0 < t \le T_0$, $p_l(T_0) < H(T)$, $T_0 \le T$, функція

$$\psi(\xi) := G(t,x;0,\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

на підставі оцінки (2) і нерівності

$$E_{c_0}(t,x,\xi) \Psi_1(T,\xi) \le \exp \Big\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} k_l(t, s_{lj}(T)) |X_{lj}(t)|^2 \Big\}$$

задовольняє нерівність

$$|\psi(\xi)| \Psi_1(T,\xi) \le C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{-c_0}(t,x,\xi) \times$$

$$\times \exp \Big\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} k_l(t, s_{lj}(T)) |X_{lj}(t)|^2 \Big\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{30}$$

і, тому, $\psi \in L_1^{-\vec{s}(T)}$, то на підставі умови (10) отримуємо при $0 < t \le T_0$ і $p = \infty$ рівність

$$\lim_{h \to 0} J_2^{(h)} = 0. \tag{31}$$

З (22), (27), (31) випливає співвідношення (21) і, як наслідок, формула (6) для довільної точки (t,x) шару $\Pi_{(0,T]}$ у випадку $p \in [1,\infty)$ і шару $\Pi_{(0,T_0]}$ при $p = \infty$. Щоб переконатись у правильності цієї формули при $p = \infty$ для довільної точки $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, потрібно скористатись формулою (20) для $h \leq T_0$, формулою (6) при $t = h$ і формулою згортки (3).

2) Якщо розв'язок рівняння (1) задовольняє умову (8) з $p = 1$, то, як встановлено при доведенні першої частини теореми, для нього правильна формула (20). Перейдемо в ній до границі при $h \to 0$. Для цього розглянемо різницю

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)d\mu(\xi) = J_1^{(h)} + J_3^{(h)}, \quad (32)$$

де $J_1^{(h)}$ визначається формулою (23), а

$$J_3^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)u(h,\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)d\mu(\xi).$$

Для $J_1^{(h)}$ виконується співвідношення (27). З нерівності (30) випливає, що при $t \in (0, T_0]$ функція $\psi(\xi) := G(t,x;0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, належить до простору $C_0^{-\vec{s}(T)}$. Тому на підставі умови (11) виконується співвідношення $\lim\limits_{h\to 0} J_3^{(h)} = 0$, з якого та з (20), (27) і (32) випливає правильність формули (7) для $(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}$. Ця формула правильна для довільної точки$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Це випливає з формул (20) для $h \leq T_0$, (7) при $t = h$ і (3).

4. Доведення теореми 2

Нехай $p \in (1, \infty]$. З умови (12) випливає, що послідовність функцій

$$\Big\{ \, u(1/\nu, x)\Phi_{-1}(1/\nu, x), \ x \in \mathbb{R}^n : \nu \geq 1 \, \Big\} \quad (33)$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, $p' = p/(p-1)$. Згідно з теоремою про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі послідовність (33) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Тому існує її підпослідовність

$$\left\{ \, u(1/\nu(r), x)\Phi_{-1}(1/\nu(r), x), \;\; x \in \mathbb{R}^n : r \geq 1 \, \right\} \tag{34}$$

і функція $\chi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ такі, що для довільних $\psi \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\, \Phi_{-1}(1/\nu(r), \xi)\, u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\chi(\xi)\, d\xi. \tag{35}$$

Покладемо $\varphi(\xi) := \chi(\xi)\Phi_1(0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ і співвідношення (34) записується у вигляді

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\, \Phi_{-1}(1/\nu(r), \xi)\, u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\Phi_{-1}(0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{36}$$

Нехай (t,x) – фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$ і

$$\psi(\xi) := G(t,x;0,\xi)\Phi_1(0,\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{37}$$

З оцінки

$$|\psi(\xi)| \leq C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\Phi_1(t,x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{38}$$

яка отримується з допомогою нерівностей (2) і (7) з [2], випливає, що $\psi \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Тому на підставі рівності (36) маємо

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\, \Phi_{-1}(1/\nu(r), \xi)\, \Phi_1(0,\xi) u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{39}$$

Припустимо, що $1/\nu(r) \le t/2$, $r \ge 1$. Згідно з формулою (20)

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;1/\nu(r),\xi)u(1/\nu(r),\xi)\,d\xi. \tag{40}$$

На підставі цієї рівності маємо

$$\begin{gathered} u(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^0 G(t,x;h,\xi)\,\Big|_{h=1/\nu(r)} u(1/\nu(r),\xi)\,d\xi + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\Big(\,1 - \Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\Phi_1(0,\xi)\,\Big)\,u(1/\nu(r),\xi)d\xi + \\ + \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\Phi_1(0,\xi)u(1/\nu(r),\xi)\,d\xi - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Bigg) =: \sum_{j=1}^{3} K_j^{(r)}, \quad r \ge 1. \end{gathered} \tag{41}$$

Щоб отримати зображення (6), досить довести, що для $j \in \{1,2,3\}$

$$\lim_{r\to\infty} K_j^{(r)} = 0. \tag{42}$$

З (39) випливає (42) для $j = 3$. Доведемо (42) для $j = 2$. За допомогою нерівності Гельдера та умови (12) маємо

$$\begin{gathered} |K_2^{(r)}| \le \|u(1/\nu(r),\,\cdot\,)\|_p^{\vec{k}(1/\nu(r),\vec{a})} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi\Bigg)^{1/p'} \le \\ \le C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi\Bigg)^{1/p'}, \end{gathered} \tag{43}$$

де

$$F_r(\xi) := \Big| \, G(t,x;0,\xi) \, \Big|^{p'} \Big(\, \Phi_1(1/\nu(r),\xi)\Phi_{-1}(0,\xi) \, \Big)^{p'},$$
$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad r \geq 1.$$

Вивчимо властивості функцій F_r, $r \geq 1$. З оцінки (2) і нерівності (7) з [2] випливають нерівності

$$(F_r(\xi))^{1/p'} \leq C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi) \times$$
$$\times E_{c_0}(t,x,\xi) \, \Psi_1(1/\nu(r),\xi) \, \Phi_1(0,\xi) \leq$$
$$\leq C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi) \, \Phi_1(1/\nu(r),x) \, \Phi_1(t,x).$$

Тут $r \geq r_0$, де r_0 взято так, щоб $p_l(t) < H(1/\nu(r_0))$. Оскільки для довільних $r \geq r_0$, $j \in \{1,...,n_l\}$, і $l \in \{1,2,3\}$

$$k_l(t, s_{lj}(1/\nu(r))) \leq k_l(t, s_{lj}(1/\nu(r_0))),$$

то

$$(F_r(\xi))^{1/p'} \leq C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi) \, \Phi_1(t,x) \times$$
$$\times \exp\Big\{ \, \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} k_l(t, s_{lj}(1/\nu(r_0))) \, |X_{lj}|^2 \, \Big\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad r \geq r_0,$$

звідки випливає існування в підпослідовності $\{F_r, r \geq r_0\}$ інтегровної мажоранти. А оскільки для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{r\to\infty} F_r(\xi) = 0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi) d\xi = 0.$$

Звідси з урахуванням (43) отримуємо (42) для $j = 2$.

Рівність (42) для $j = 1$ випливає зі співвідношення (27) для $l = 1$, оскільки $K_1^{(r)} = J_1^{(h)}\Big|_{h=1/\nu(r)}$.

Розглянемо випадок $p = 1$. З умови (12) випливає, що послідовність (33) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, однак він вкладається в простір M всіх скінченних узагальнених мір, визначених на σ-алгебрі $\mathcal{B}$ борелівських множин простору $\mathbb{R}^n$. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ усіх неперервних функцій, які прямують до нуля на нескінченності. З обмеженості в $L_1(\mathbb{R}^n)$ послідовності (33) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір простору M і, отже, слабка компактність останньої. Тому існує підпослідовність (34) та узагальнена міра $\mu \in M^{\vec{a}}$, що для довільної функції $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ справджується рівність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\,\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\,u(1/\nu(r),\xi)\,d\xi = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\Phi_{-1}(0,\xi)\,d\mu(\xi). \tag{44}$$

З оцінки (38) випливає, що функція (37) належить до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ для довільної фіксованої точки $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Тому на підставі (44) отримуємо, що

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\,\Phi_1(0,\xi)u(1/\nu(r),\xi)\,d\xi = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi). \tag{45}$$

Подальші міркування такі самі, як у випадку $p > 1$. За допомогою формули (40) записуємо рівність

$$u(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi) = K_1^{(r)} + K_2^{(r)} + \tilde{K}_3^{(r)}, \tag{46}$$

де $K_1^{(r)}$ і $K_2^{(r)}$ ті самі, що й в (41), а

$$\tilde{K}_3^{(r)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\, \Phi_1(0,\xi)\, u(1/\nu(r),\xi)\, d\xi - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi).$$

Враховуючи рівність (42) для $j \in \{1,2\}$ і те, що на підставі (45) $\lim\limits_{r\to\infty} \tilde{K}_3^{(r)} = 0$, із (46) отримуємо зображення (7).

Отже, доведено існування функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ при $p \in (1,\infty]$ і узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ при $p = 1$ таких, що заданий розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову (12), є інтегралом Пуассона відповідно функції φ чи узагальненої міри μ. Єдиність функції φ та узагальненої міри μ безпосередньо випливає з теореми із [2].

5. Висновки

З теореми із [2] і теореми 2 випливає, що простори $L_p^{\vec{a}}$, $p \in (1,\infty]$, і $M^{\vec{a}}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (12) відповідно з $p \in (1,\infty]$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною і достатньою для зображення розв'язку у вигляді (6) і (7).

Задача про знаходження умов на визначені в області розв'язки рівняння, які гарантують існування граничних значень цих розв'язків на межі області, є важливою класичною задачею теорії аналітичних і гармонічних функцій. Ця задача для розв'язків рівняння (1), які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$ і належать для кожного

$t \in (0, T]$ до вагових просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, розв'язана в статтях [1, 2] і в цій статті.

Література

[1] *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, №2. – С. 126–153.

[2] *Івасишен С., Пасічник Г.* Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. – 2014. – **11**. – С. 73–87.

[3] *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

[4] *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, №2. – С. 172–181.