Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 2, 250–275

УДК 517.95

А. О. Лопушанський, Г. П. Лопушанська

(Інститут математики Жешівського університету, Жешів, Польща; Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів)

Розв'язок задачі Коші зі значеннями в уточнених просторах беселевих потенціалів

alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

For the Cauchy problem

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

with the regularized fractional derivative $D_t^\beta u$ of order $\beta \in (0,1)$, we establish the existence and uniqueness of the solutions that are classical in time and that take values in certain refined spaces of Bessel potentials.

Для задачі Коші

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

з регуляризованою похідною $D_t^\beta u$ порядку $\beta \in (0,1)$ доведено існування та єдиність розв'язків, класичних за змінною t та зі значеннями в деяких уточнених просторах беселевих потенціалів.

1. Вступ

Еліптичні й параболічні крайові задачі з узагальненими функціями із соболєвських чи гельдерових просторів у правих частинах достатньо повно досліджені (див [1–3] та бібліографію). Е. Хермандером [4] та Д.Р. Волєвічем і В.П. Панеяхом [5] введені певні вагові функціональні простори, характер регулярності функцій із яких визначається деякою функцією – простори узагальненої гладкості. Такі простори містять як окремий випадок простори беселевих потенціалів. У [6] побудована теорія еліптичних, а у [7] – параболічних крайових задач в уточнених та узагальнених гільбертових шкалах просторів Хермандера-Волєвіча-Панеяха (у гільбертовому випадку простори Хермандера та Волєвіча-Панеяха збігаються). Відоме розширення класів даних, за яких задача Коші для параболічних рівнянь допускає регулярні при $t > 0$ розв'язки (див. [8, с. 137–148], [9]).

У [9–18] та інших роботах було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь з регуляризованою дробовою похідною ([19, 20]) за часом. У [21] доведено розв'язність задачі Коші для таких рівнянь у просторах узагальнених функцій.

Фундаментальні розв'язки рівнянь відіграють важливу роль у вивченні задачі Коші та крайових задач у класах гладких та узагальнених функцій. Деякі зображення, оцінки та інші властивості фундаментальних розв'язків рівнянь із дробовими похідними за часом та функцій Гріна задач Коші для таких рівнянь одержані в [9–18], [21–25] та інших працях. Використовуючи властивості функції Гріна, автор [26] показав однозначну розв'язність задачі Коші

$$\begin{gathered} D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \quad a^2 = \mathrm{const} > 0, \\ u(x,0) = F_1(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in (0,T] \end{gathered} \tag{1}$$

у класах

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \quad (s \in \mathbb{R})$$

функцій зі значеннями в просторах беселевих потенціалів та класичних за часом. Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є:

$$\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^{\alpha}\mathfrak{F}[\psi(x)].$$

У цій статті доводимо існування та єдиність розв'язку задачі (1), класичного за часом та зі значеннями в уточнених (по аналогії до [6]) шкалах банахових просторів беселевих потенціалів – поширюємо результат [26] на випадок таких вагових просторів.

Ця робота складається з п'яти пунктів. Пунктом 1 є вступ. У пункті 2 наведено позначення та означення, які використовуються в роботі. У пункті 3 сформульовано та доведено основні результати роботи. У пункті 4 показано шлях поширення цих результатів на випадок рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Заключний пункт 5 містить висновки до роботи.

2. Основні позначення та означення

Надалі вважаємо, що $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $n = 1, 2, \dots$, $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ та $D(Q_T)$ – простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в $\mathbb{R}^n$ та Q_T [27, с. 13], $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій,

$$C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0, 1, \dots\},$$

$D(\bar{Q}_T)$ – підпростір простору $C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, що містить фінітні за просторовими змінними функції; $S'(\mathbb{R}^n)$, $D'(\mathbb{R}^n)$, $D'(\bar{Q}_T)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $S(\mathbb{R}^n)$, $D(\mathbb{R}^n)$, $D(\bar{Q}_T)$, (f,φ) – значення $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ $(f \in D'(\mathbb{R}^n)$, $f \in D'(\bar{Q}_T))$ на основній функції $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ (відповідно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$),

$$D'_+(\mathbb{R}) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \quad \text{при} \quad t < 0\}.$$

Позначаємо через $f{*}g$ згортку узагальнених функцій f та g.

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(\mathbb{R})$:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0 \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \leq 0 \end{cases},$$

де $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ — Гамма-функція. Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувілля порядку $\beta > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

регуляризована похідна дробового порядку $\beta \in (0,1)$

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\beta}\Big] =$$
$$= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0).$$

Позначаємо через $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$ клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$ з неперервними функціями $(-\Delta v)^{\alpha/2}$, $D_t^\beta v$ в Q_T.

Нехай

$$(Lv)(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t) + a^2(-\Delta v)^{\alpha/2}(x,t),$$
$$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^\beta v(x,t) + a^2(-\Delta v)^{\alpha/2}(x,t),$$
$$(x,t) \in Q_T.$$

Означення [11]. Вектор-функцією Гріна задачі Коші (1), а також задачі Коші для більш загального рівняння зі змінними коефіцієнтами, називається така вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$, що при достатньо гладких $F_0(x,t)$, $F_1(x)$ (обмежених, неперервних, що задовольняють умову Гельдера за просторовими змінними $x \in \mathbb{R}^n$) функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)dy, \ (x,t) \in Q_T \tag{2}$$

є класичним (із $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$) розв'язком цієї задачі.

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$$L^{reg}G_0(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau),$$
$$L^{reg}G_1(x,t,y) = 0, \ \ (x,t),(y,\tau) \in Q_T,$$

$$G_1(x,0,y) = \delta(x-y),$$
$$G_1(x,t,y) = \int\limits_0^t f_{1-\beta}(\tau)G_0(x,t,y,\tau)d\tau,$$
$$x,y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T].$$

Тут δ — дельта-функція Дірака. Для задачі (1) зі сталим коефіцієнтом у рівнянні використовуємо

$$(G_0(x-y,t-\tau), G_1(x-y,t)) \quad \text{замість} \quad (G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y)).$$

Існування вектор-функції Гріна та однозначна розв'язність задачі (1) у класах $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$ та $D'(\bar{Q}_T)$ випливає з результатів [10, 11, 18] та [21], відповідно. Розв'язок можна подати у вигляді

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + F_1(x) * G_1(x,t), \\ (x,t) \in Q_T. \tag{3}$$

Зауважимо, що

$$L(F_0 * G_0)(x,t) = F_0(x,t),$$
$$L(F_1 * G_1)(x,t) = F_1(x) \cdot f_{1-\beta}(t),$$
$$L^{reg}(F_1 * G_1)(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in Q_T.$$

Якщо

$$(F_0 * G_0)(x,0) = 0, \tag{4}$$

то

$$(F_0 * G_0)_t^{(\beta)}(x,t) = D_t^{\beta}(F_0 * G_0)(x,t), \; (x,t) \in Q_T.$$

Нехай $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$, Φ — такий клас додатних функцій $\varphi(z)$, $z \in [1,+\infty)$, що функція

$$\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$$

є ваговою для кожного значення $s \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c(1+|\xi-\eta|)^r, \quad r > 0,$$

де стала c не залежить від ξ та η. Прикладом функцій класу Φ є клас SV визначених на додатній півосі $[b,+\infty)$ повільно змінних на безмежності за Караматою [28] функцій $\varphi(z)$, тобто, згідно з означенням 1.6 ([6, с. 45]), вимірних за Борелем на $[b_0,+\infty)$ для кожного $b_0 \geq b$ функцій, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(z)} = 1 \quad \forall \lambda > 0.$$

У [6], с. 61 показано, що при $\varphi \in SV$ функція $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ є ваговою із $r = |s|+1$ для кожного значення $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{x\to\xi}$ – оператор перетворення Фур'є за просторовими змінними $x \in \mathbb{R}^n$, $\quad s \in \mathbb{R}$, $p > 1$,

$$H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \Phi :$$

$$||v||_{s,\varphi,p} = ||\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[v]\big]||_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

– уточнена шкала просторів беселевих потенціалів – підпростори просторів Волєвіча-Панеяха (див. [5]), які у випадку $\varphi(z) \equiv 1$, $z \in [b, +\infty)$ є просторами беселевих потенціалів,

$$C\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) = \{v : \|v\|_{C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)} =$$

$$= \max_{t\in[0,T]} \big\|v(\cdot,t)\big\|_{H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

– простір неперервних функцій

$$v\colon [0,T] \ni t \longmapsto v(\cdot,t) \in H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n),$$

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) = \{v \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) :$$
$$D_t^{\beta} v, (-\Delta)^{\alpha/2} v \in C\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)\},$$
$$\|v\|_{C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)} = \max\{\|v\|_{C\big([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)},$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} v\|_{C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)}, \|D_t^{\beta} v\|_{C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)}\}.$$

На базі властивостей вектор-функції Гріна покажемо розв'язність задачі (1) у всій шкалі просторів $H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)$ за просторовими змінними.

3. Розв'язок задачі

Використовуємо функцію Міттаг-Леффлера [20]

$$E_{\beta,\mu}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\mu)}.$$

Функція $E_{\beta,\mu}(-z)$ $(z > 0)$ нескінченно диференційовна та компактно монотонна при $\beta \in (0,1)$, $\mu \geq \beta$:

$$(-1)^k \big(\frac{d}{dz}\big)^k E_{\beta,\mu}(-z) \geq 0,\ z > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

має оцінку

$$E_{\beta,\mu}(-z) \le \frac{r_\mu}{1+z}, \quad z>0, \quad r_\mu = \mathrm{Const} > 0.$$

Лема 1. *При* $\varrho \le \alpha$, $\mu > 0$ *функція*

$$g_{\beta,\mu}(\xi,t,\varrho) = \langle\xi\rangle^{\varrho}\, E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^{\alpha}t^{\beta})$$

неперервна та обмежена за змінними $\xi \in \mathbb{R}^n$ *для кожного* $t \in (0,T]$, *існує така додатна стала* $c = c(p,\mu)$, *що для довільних* $p>1$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0,T]$

$$\big\|\mathfrak{F}^{-1}\big[g_{\beta,\mu}(\xi,t,\varrho)\mathfrak{F}[f]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le cw(t,\varrho)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5}$$

де $w(t,\varrho) = \max\big\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\big\}$.

Лема випливає з леми 1 [26].

Зауваження 1. Функція $g_{\beta,\mu}(\xi,t,0)$ обмежена в $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Функція $g_{\beta,\mu}(\xi,t,\varrho)$ інтегровна за t для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$, якщо $\varrho < \frac{\alpha}{\beta}$, тобто для кожного $\beta \in (0,1]$, якщо $\varrho < \alpha$, для кожного $\beta \in (0,1)$, якщо $\varrho = \alpha$.

Теорема 1. *Нехай*

$$\beta \in (0,1),\ \alpha > \beta,\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \Phi,\ \theta \in (0,1),\ 1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta},$$
$$F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big), \qquad F_1 \in H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n).$$

Тоді існує єдиний розв'язок

$$u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

задачі (1). Він визначений формулою (3) та правильні оцінки

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ &\le C_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq \\ \leq b_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + b_1\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{7}$$

із деякими додатними сталими C_0, C, b_0, b_1.

Доведення. Згідно з методом побудови (див. [12, 15]),

$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_0(x,t)] = t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta),$$
$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_1(x,t)] = E_{\beta,1}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta).$$

Для довільних $t\in[0,T]$, $s\in\mathbb{R}$ обчислюємо

$$\big\|(F_1*G_1)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} = \\ = \left\|\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_1*G_1](\xi,t)\big]\,\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \\ = \left\|\mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\times \\ \times\mathfrak{F}_{z\to\xi}[G_1(z,t)]\mathfrak{F}_{y\to\xi}[F_1(y)]\Big]\,\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Оскільки
$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_1(x,t)] = g_{\beta,1}(\xi,t,0)$$
і, згідно з лемою 1, для кожного $t\in(0,T]$ функція $g_{\beta,1}(\xi,t,0)$ є мультиплікатором у $L_p(\mathbb{R}^n)$ (задовольняє (5) для довільних $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $t\in(0,T]$), функція
$$f = \mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_1](\xi)\big] \in L_p(\mathbb{R}^n),$$

то

$$\big\|(F_1*G_1)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} = \\ = \left\|\mathfrak{F}^{-1}\Big[g_{\beta,1}(\xi,t,0)\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^{-1}[\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\times \\ \times\mathfrak{F}[F_1](\xi)]\big]\Big]\,\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq c\big\|\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_1](\xi)\big]\,\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \\ = c\big\|F_1\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t\in[0,T],$$

а тоді,

$$\begin{aligned} &\big\|F_1 * G_1\big\|_{C\big([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)} \leq \\ &\leq C\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad C = const > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Тепер для кожного $t \in [0,T]$ оцінимо

$$\begin{aligned} &\big\|(F_0 * G_0)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \Big\|\mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}_{x\to\xi}[F_0 * G_0]\Big]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned} &\Big\|\mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\times \\ &\times\mathfrak{F}_{\cdot\to\xi}\Big[\int\limits_0^t F_0(\cdot,\tau) * G_0(\cdot,t-\tau)d\tau\Big]\Big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \Big\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\int\limits_0^t \mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\times \\ &\mathfrak{F}_{\cdot\to\xi}\big[F_0(\cdot,\tau) * G_0(\cdot,t-\tau)\big]\Big]d\tau\Big|^p dx\Big\}^{1/p} \leq \\ &\leq t^{1-\frac{1}{p}}\Big\{\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|h(x,t,\tau)|^p dx\Big)d\tau\Big\}^{1/p}, \end{aligned}$$

де

$$h(x,t,\tau) = \mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\times$$
$$\times\mathfrak{F}_{z\to\xi}[G_0(z,t-\tau)]\cdot\mathfrak{F}_{y\to\xi}[F_0(y,\tau)]\Big] =$$
$$= \mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{\alpha-\alpha\theta}\,\mathfrak{F}_{z\to\xi}[G_0(z,t-\tau)]\times$$
$$\times\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha\theta}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}_{y\to\xi}[F_0(y,\tau)]\Big] =$$
$$= (t-\tau)^{\beta-1}\mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[\,\langle\xi\rangle^{\alpha-\alpha\theta}\,E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^{\alpha}(t-\tau)^{\beta})\times$$
$$\times\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha\theta}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_0](\xi,\tau)\,\big]\,.$$

З леми 1 випливає, що функція

$$\langle\xi\rangle^{\alpha-\alpha\theta}\,E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^{\alpha}(t-\tau)^{\beta}) = g_{\beta,\beta}(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)$$

є мультиплікатором у $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. Тому що

$$\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha\theta}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_0](\xi,\tau)\big] \in L_p(\mathbb{R}^n) \quad \forall\tau\in[0,T],$$

то

$$\|h(\cdot,t,\tau)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c(t-\tau)^{\beta-1}w(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\times$$
$$\times\Big\|\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha\theta}\,\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[F_0](\xi,\tau)\big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

а з попередніх результатів одержуємо, що за припущень щодо p для всіх $t\in[0,T]$ існує згортка

$$\big(F_0 * G_0\big)(\cdot,t) = \int\limits_0^t F_0(\cdot,\tau) * G_0(\cdot,t-\tau)d\tau$$

зі значеннями в $H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)$, яка задовольняє умову (4) та

$$\begin{gathered}
\big\|(F_0 * G_0)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} \le \\
\le ct^{1-\frac{1}{p}}\Big\{\int\limits_0^t (t-\tau)^{p(\beta-1)} w^p(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\times \\
\times \|F_0(\cdot,\tau)\|^p_{H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\Big\}^{1/p} \le \\
\le C_0\big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \quad \forall t\in[0,T],
\end{gathered}$$

де $C_0 = const > 0$. Отож,

$$\begin{gathered}
\big\|F_0 * G_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\
\le C_0\big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Тоді, згідно з формулою (3) і беручи до уваги оцінки (8), (9), одержуємо оцінку (6).

Тому що

$$\begin{gathered}
\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\,\big] = \\
= \mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)|\xi|^\alpha\mathfrak{F}[u]\,\big] = \\
= \mathfrak{F}^{-1}\Big[\frac{|\xi|^\alpha}{\langle\xi\rangle^\alpha}\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[u]\,\Big], \\
\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[u](\xi,t)\big] \in L_p(\mathbb{R}^n) \quad \forall t\in[0,T],
\end{gathered}$$

а функція $\frac{|\xi|^\alpha}{\langle\xi\rangle^\alpha}$ є мультиплікатором у $L_p(\mathbb{R}^n)$, для кожного $t \in [0,T]$ матимемо

$$\begin{gathered}
\Big\|\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u](\cdot,t)\big]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \\
\le c_1\big\|\mathfrak{F}^{-1}\big[\,\langle\xi\rangle^{s+\alpha}\varphi(\langle\xi\rangle)\mathfrak{F}[u](\cdot,t)\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \\
= c_1\big\|u(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{gathered}$$

Тут і далі c_i $(i = 1, 2, \dots)$ – певні додатні сталі. Отож,

$$\begin{gathered}\big\|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\big\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ \le c_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.\end{gathered} \tag{10}$$

Згідно з вище наведеними формулами,

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0,$$

якщо u визначена формулою (3). Вже було доведено, що

$$a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u \in C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big).$$

За припущенням теореми

$$F_0 \in C\big([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) \subset C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Отож,

$$D_t^\beta u \in C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Використовуючи оцінку (10), одержуємо

$$\begin{gathered}\big\|D_t^\beta u\big\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ \le c_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + \big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ \le c_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + \\ + c_3\big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.\end{gathered}$$

Звідси та з (6), (10) випливає оцінка (7).

Зауваження 2. Теорема 1 також правильна при $\beta = 1 < \alpha$, якщо вважати $D_t^1 u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Теорема 2. *Нехай*

$$\beta \in (0,1), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \quad p \in (1, 1/\beta),$$

$$F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad f \in C\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big),$$
$$F_1 \in H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n).$$

Тоді задача (1) однозначно розв'язна у $C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)$*, розв'язок и визначений формулою*

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + F_1(x) * G_1(x,t), \\ (x,t) \in Q_T \tag{11}$$

та

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)} \le \\ \le k_0 \|f\|_{C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)} + k_1 \|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{12}$$

із деякими додатними сталими k_0, k_1.

Доведення. За припущень теореми

$$(F_0 * G_0)(x,t) = \\ = f_{1-\beta}(t) * f(x,t) * f_{\beta-1}(t) * G_1(x,t) = \\ = (f * G_1)(x,t),$$

якщо остання згортка існує. Як при доведенні теореми 1, при кожному $t \in [0,T]$ оцінюємо $\int\limits_0^t f(\cdot,z) * G_1(\cdot,t-z)dz$ у просторі $H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)$. Беручи до уваги зауваження 1, одержуємо, що для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $g_{\beta,1}(\xi,t,\alpha)$ інтегровна за t. Тому, як при доведенні теореми 1, знаходимо

$$\big\|(f * G_1)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le c_4 t^{1-\frac{1}{p}} \Big[\int\limits_0^t w^p(t-z,\alpha)dz\Big]^{1/p} \|f\|_{C\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)}$$

та $w^p \in L_1(0,T)$ при $p < 1/\beta$. Звідси випливає існування

$$F_0 * G_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

та оцінка

$$\left\|F_0 * G_0\right\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq$$

$$\leq c_5 \left\|f\right\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Далі, як при доведенні теореми 1, одержуємо розв'язність задачі у $C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінку (12).

4. Розв'язність задачі Коші для рівняння зі змінними коефіцієнтами

При певних властивостях вектор-функції Гріна одержані в попередньому пункті теореми поширюються на випадок рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Використовуючи властивість перетворення Фур'є операції композиції узагальнених функцій (наведену в наступній лемі 2), продемонструємо такий результат на прикладі задачі Коші для рівняння одновимірної фрактальної дифузії, властивості функції Гріна якої детально вивчені у [11].

Нехай $V' \cap V = V'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap V(\mathbb{R}^n)$ – простір узагальнених функцій $\omega(x,y)$ із $V'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, які належать до $V(\mathbb{R}^n)$ за другим набором аргументів (y), тобто ([29, с. 209])

$$(\omega(x,\cdot),\psi(x)) \in V(\mathbb{R}^n) \quad \forall\psi \in V(\mathbb{R}^n).$$

Узагальнена функція

$$\omega_F = F(y)\, o\, \omega(\cdot,y) \in V'(\mathbb{R}^n),$$

визначена як

$$(\omega_F,\psi) = \Big(F(y), \big(\omega(x,y),\psi(x)\big)\Big) \quad \forall\psi \in V(\mathbb{R}^n),$$

називається [30] *композицією* узагальнених функцій $F \in V'(\mathbb{R}^n)$ та $\omega \in V'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap V(\mathbb{R}^n)$.

Якщо $\omega(x,y)=\omega_1(x-y)$, то

$$F(y)\,o\,\omega(x,y)=(F*\omega_1)(x)$$

(композиція F та ω збігається зі згорткою F та ω_1).

Позначимо через $M_S=M_S(\mathbb{R}^n)$ клас таких функцій $\psi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, що $\psi\eta\in S(\mathbb{R}^n)$ для довільної $\eta\in S(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, клас ϑ_M ([29, с. 151]) функцій, які на безмежності зростають не швидше полінома, належить $M_S(\mathbb{R}^n)$.

Лема 2. *Якщо $F\in S'(\mathbb{R}^n)$, $\omega\in S'\cap S$, то*

$$\mathfrak{F}[F(y)\,o\,\omega(\cdot,y)]=F(y)\,o\,\mathfrak{F}[\omega(\cdot,y)].$$

Якщо, крім того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(x,y)e^{i(x,\cdot)}dx\in M_S(\mathbb{R}^n)\quad\forall y\in\mathbb{R}^n,$$

де (x,ξ) – скалярний добуток векторів $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $i^2=-1$, то

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{x\to\xi}[F(y)\,o\,\omega(x,y)]&=F(y)\,o\,\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)]=\\&=\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\cdot\mathfrak{F}_{y\to\xi}[F(y)].\end{aligned}\tag{13}$$

Доведення. За означенням перетворення Фур'є узагальнених функцій для кожної $\psi\in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&\big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[F(y)\,o\,\omega(x,y)],\psi(\xi)\big)=\\&=\big(F(y)\,o\,\omega(x,y),\mathfrak{F}[\psi](x)\big)=\\&=\Big(F(y),\big(\omega(x,y),\mathfrak{F}[\psi](x)\big)\Big)=\\&=\Big(F(y),\big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)],\psi(\xi)\big)\Big)=\\&=\big(F(y)\,o\,\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)],\psi(\xi)\big).\end{aligned}$$

Звідси одержуємо правильність першого твердження леми.

За додаткової умови леми для довільного $y \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S'(\mathbb{R}^n)$ можна визначати перетворення Фур'є функції $\omega(x,y)$ як

$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x,\xi)} dx.$$

Справді, у цьому випадку для довільних $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ визначено

$$\begin{aligned}
&\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x,\xi)} dx, \psi(\xi) \Big) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x,\xi)} dx \Big) \psi(\xi) d\xi = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) \mathfrak{F}[\psi](x) dx = \\
&= \Big(\omega(x,y), \mathfrak{F}[\psi](x) \Big) = \\
&= \Big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)], \psi(\xi) \Big).
\end{aligned}$$

Також

$$\begin{aligned}
&\big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)], \psi(\xi) \big) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x-y,\xi)} dx \Big) \psi(\xi) e^{i(y,\xi)} d\xi = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(y+x,y) e^{i(x,\xi)} dx \Big) \psi(\xi) e^{i(y,\xi)} d\xi = \\
&= \mathfrak{F}_{\xi\to y} \Big[\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi) \Big] \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Тоді для кожної $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{gathered}\big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[F(y)\, o\, \omega(x,y)], \psi(\xi)\big) = \\ = \Big(F(y), \big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)], \psi(\xi)\big)\Big) = \\ = \Big(F(y), \mathfrak{F}_{\xi\to y}\Big[\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi)\Big]\Big) = \\ = \Big(\mathfrak{F}_{y\to\xi}[F(y)], \mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi)\Big) = \\ = \Big(\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)] \cdot \mathfrak{F}_{y\to\xi}[F(y)], \psi(\xi)\Big).\end{gathered}$$

Згідно з припущенням леми, функція

$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)] = \mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)]e^{-i(y,\xi)}$$

за змінними $\xi \in \mathbb{R}^n$ належить класу M_S, а тому добуток

$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)] \cdot \mathfrak{F}_{y\to\xi}[F(y)]$$

визначений у $S'(\mathbb{R}^n)$. Отож, одержали правильність (13).

Розглядаємо задачу Коші

$$\begin{gathered}D_t^\beta v(x,t) - (Av)(x,t) = F_0(x,t),\ \ (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{14}$$

де $Q_T = \mathbb{R} \times (0,T]$, $\beta \in (0,1)$,

$$(Av)(x,t) = a(x,t)v_{xx}(x,t) + b(x,t)v_x(x,t) + c(x,t)v(x,t),$$

$$a,b,c \in C^\infty(\bar{Q}_T), \qquad \inf_{(x,t)\in\bar{Q}_T} a(x,t) = a_0 > 0.$$

Існування та диференціальні властивості вектор-функції Гріна

$$(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$$

цієї задачі вивчені в [11]. Доведемо ще одну її властивість.

Лема 3. *Для довільнх* $0 \leq \tau \leq t \leq T$

$$G_0(\cdot, t, *, \tau) \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R}),$$
$$G_1(\cdot, t, *) \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R}).$$

Доведення. Згідно з [11],

$$|G_0(x, t, y, \tau)| \leq \hat{c}_0 (t - \tau)^{-\beta/2} exp(-c_0 r(x - y, t - \tau)),$$
$$|G_1(x, t, y)| \leq \hat{c}_1 t^{-1+\beta/2} exp(-c_0 r(x - y, t))$$

де

$$r(x - y, t - \tau) = \Big(\frac{|x - y|}{(t - \tau)^{\beta/2}} \Big)^{\frac{2}{2-\beta}},$$

$\hat{c}_0, \hat{c}_1, c_0$ – певні додатні сталі.

Позначимо

$$(\hat{\mathcal{G}}_0 \psi)(y, t, \tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x, t, y, \tau) \psi(x) dx,$$
$$(\hat{\mathcal{G}}_1 \psi)(y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x, t, y) \psi(x) dx, \quad \psi \in S(\mathbb{R}),$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y} G_0(x, t, y, \tau) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x} G_0(x, t, y, \tau) + \big(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\big) G_0(x, t, y, \tau),$$

і подібно для похідних вищого порядку, то, за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_m(y, t, \tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x, t, y, \tau) \psi^{(m)}(x) dx$$

для довільних $\psi \in S(\mathbb{R})$, $m = 0, 1, \ldots$, матимемо

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k (\hat{\mathcal{G}}_0\psi)(y,t,\tau) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} c_{m,k} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)^{k-m} G_0(x,t,y,\tau)\psi^{(m)}(x)dx,$$

де $c_{m,k}$ – певні додатні сталі, $k = 0, 1, \ldots$. Врахували, що функції

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)^{k-m} G_0(x,t,y,\tau)$$

мають такі ж особливості, як $G_0(x,t,y,\tau)$. З рівномірної обмеженості функцій $y^l v_m(y,t,\tau)$ для всіх $\psi \in S(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \le \tau \le t \le T$, m, l випливає, що $(\hat{\mathcal{G}}_0\psi)(\cdot,t,\tau) \in S(\mathbb{R})$ для всіх $0 \le \tau \le t \le T$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_m(y,t,\tau)$ та рівномірну обмеженість функцій $y^l v_m(y,t,\tau)$ для всіх $\psi \in S(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \le \tau \le t \le T$, $m, l = 0, 1, \ldots$. Використовуючи оцінки функції $G_0(x,t,y,\tau)$, одержуємо

$$|v_m(y,t,\tau)| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |G_0(x,t,y,\tau)| \cdot |\psi^{(m)}(x)|dx \le$$

$$\le \hat{c}_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\psi^{(m)}(x)|}{(t-\tau)^{\beta/2}} exp(-c_0 r(x-y,t-\tau))dx =$$

$$= 2\hat{c}_0(2-\beta) \int\limits_0^{\infty} |\psi^{(m)}(y + z^{2-\beta}(t-\tau)^{\beta/2})| \times$$

$$\times z^{1-\beta} exp(-c_0 z)dz.$$

За обмеженістю функцій $x^l\psi^{(m)}(x)$ на $\mathbb{R}$ для всіх $m, l, q = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\psi^{(m)}(x)| \le \frac{d_0}{(2d_1 + |x|)^q}.$$

Тут і далі d_0, d_1, d_2 – певні додатні сталі. Тоді

$$|y^l \psi^{(m)}(y + z^{2-\beta}(t-\tau)^{\beta/2})| \leq$$
$$\leq \frac{d_0|y|^l}{(2d_1 + |y + z^{2-\beta}(t-\tau)^{\beta/2}|)^q} \leq \frac{d_0|y|^l}{(2d_1 + |y|)^q}$$

і при $q \geq l$ одержуємо обмеженість функцій $y^l v_m(y,t,\tau)$ для всіх m, l:

$$|y^l v_m(y,t,\tau)| \leq d_2 \int\limits_0^\infty z^{1-\beta} exp(-c_0 z) dz =$$
$$= d_2 \Gamma(2-\beta) c_0^{-(2-\beta)}.$$

Ми довели перше твердження леми.

На підставі оцінок $G_1(x,t,y)$, як вище, показуємо, що

$$(\hat{\mathcal{G}}_1 \psi)(\cdot, t) \in S(\mathbb{R})$$

для всіх $\psi \in S(\mathbb{R})$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Справді, рівномірна обмеженість функцій

$$y^l \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y)\psi(x)dx$$

випливає з рівномірної обмеженості на Q_T функцій

$$w_{k,l}(y,t) = y^l \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y)\psi^{(k)}(x)dx \quad \forall k, l = 0, 1, \ldots.$$

Маємо

$$|w_{k,l}(y,t)| \leq$$
$$\leq \hat{c}_1 |y|^l \int\limits_{\mathbb{R}} t^{-1+\beta/2} exp(-c_0 r(x,y,t,0)) |\psi^{(k)}(x)| dx$$

та знаходимо її оцінки при $\psi \in S(\mathbb{R})$, як вище.

Теорема 3. *Нехай*

$$\beta \in (0,1],\ s \in \mathbb{R},\ \ \varphi \in \Phi,\ \ \theta \in (0,1),\ 1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta},$$
$$F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R})\big), \quad F_1 \in H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}).$$

Тоді існує единий розв'язок

$$u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\big)$$

задачі (14). Він визначений формулою

$$u(x,t) = F_0(y,\tau)\, o\, G_0(x,t,y,\tau) + F_1(y)\, o\, G_1(x,t,y),$$
$$(x,t) \in Q_T$$

та правильні оцінки

$$\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} \le$$
$$\le C_0 \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} + C\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R})},$$

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} \le$$
$$\le b_0 \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} + b_1\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R})}$$

із деякими додатними сталими C_0, C, b_0, b_1.

Нехай коефіцієнти рівняння не залежать від t,

$$\beta \in (0,1),\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \Phi,\ \theta \in (0,1),\ p \in (1, 1/\beta),$$
$$F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad f \in C\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\big),$$
$$F_1 \in H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}).$$

Тоді задача (14) однозначно розв'язна у $C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\big)$, розв'язок и визначений формулою

$$u(x,t) = f(y,\tau)\, o\, G_1(x,t,y,\tau) + F_1(y)\, o\, G_1(x,t,y),$$
$$(x,t) \in Q_T$$

та правильні оцінки

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} \le$$
$$\le k_0\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R})\right)} + k_1\|F_1\|_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R})}$$

із деякими додатними сталими k_0, k_1.

Доведення. Згідно з методом побудови (див. [11]) та вище наведеними властивостями вектор-функції Гріна,

$$\left|\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_0(y+x,t,y,\tau)]\right| \le$$
$$\le \hat{C}_0(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a_0|\xi|^{\alpha}(t-\tau)^{\beta}),$$
$$\left|\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_1(y+x,t,y)]\right| \le \hat{C}_1 E_{\beta,1}(-a_0|\xi|^{\alpha}t^{\beta}),$$

де $\hat{C}_0$, $\hat{C}_1$ – певні додатні сталі. Отож, функції

$$\mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_0(x,t,y,\tau)], \quad \mathfrak{F}_{x\to\xi}[G_1(x,t,y)]$$

належать класу ϑ_M за змінною $\xi \in \mathbb{R}$. Звідси та з леми 3 випливає, що компоненти вектор-функції Гріна задовольняють умови леми 2.

Далі достатньо повторити доведення теорем 1 та 2 із використанням леми 2.

5. Висновки

Доведена однозначна розв'язність задачі Коші для рівняння з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними у класі функцій, класичних за часовою змінною t та зі значеннями в уточнених просторах беселевих потенціалів.

Література

[1] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] *Rojtberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions – Dordrecht: Kluver Acad. Publishers, 1996. – xii+415 p.

[3] *Лионс Ж.–Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[4] *Хермандер Э.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – Москва: Изд. иностр. лит., 1959. – 132 с.

[5] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[6] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступна як arXiv:1106.3214.)

[7] *Лось В. М., Мурач О. О.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського у просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – **10**. – С. 24–32.

[8] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений — Киев: Наукова думка, 1984. – 284 с.

[9] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. – 390 p.

[10] *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Диф. уравн. – 1990. – **26**, № 4. – С. 660–670.

[11] *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.

[12] *Anh V. V. and Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Statistical Physics. – 2001. – **104**(5/6). – P. 1349–1387.

[13] *Baeumer B., Kurita S., Meerschaert M. M.* Inhomogeneous fractional diffusion equations // Frac. Calc. Appl. Anal. – 2005. – **8**, № 4. – P. 371–381.

[14] *Baeumer B. and Meerschaert M.* Stochastic solutions for fractional Cauchy problems // Frac. Calc. Appl. Alal. – 2001. – **4**. – P. 481–500.

[15] *Duan Jun Sheng* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phis. – 2005. – 46 (013504).

[16] *Gorenfio R., Iskenderov A., and Luchko Yu.* Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2000. – **3**. – P. 75–86.

[17] *Hanyga A.* Multi-dimensional solutions for space-time-fractional diffusion equations // Proc. R. Soc. London. – 2002. – A 458. – P. 429–450.

[18] *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифуззионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Доклады Академии Наук. – 2007. – **414**, № 4. – С. 1–4.

[19] *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent, II. // Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – **13**. – P. 529–539.

[20] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1999. – 671 с.

[21] *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівняннь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальних функцій // Укр. мат. ж. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1067-1080.

[22] *Luchko Yu.* Fractional wave equation and damped waves // J. Math. Phys. – 2013. – 54(031505).

[23] *Luchko Yu.* Multi-dimensional fractional wave equation and some properties of its fundamental solution, e-print. – 2013. – Arxiv: 1311.5920[math-ph].

[24] *Mainardi F., Luchko Yu., and Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time-fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2001. – **4**. – P. 153–192. [E-print http://arxiv.org/abs/cond-mat/0702419].

[25] *Metzler R. ang Nonnenmacher T. F.* Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker-Planck equations, and physical motivation // Chem. Phys. – 2002. – **284**. – P. 67–90.

[26] *Лопушанский А. О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселевых потенциалов // Сиб. мат. журн. – 2014. – **55**, № 6. – С. 1089–1097.

[27] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальний курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.

[28] *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems"de M.M. Hardi et Littlewood Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.

[29] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[30] *Лопушанская Г. П.* О решении граничных задач для эллиптических систем в пространстве обобщенных функций // Диф. уравн. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1401–1410.