Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 276–290

УДК 517.956.4

В. М. Лось

(Національний технічний університет України "КПІ Київ)

(Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів)

Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і $2b$-анізотропні простори Хермандера.

v_los@yahoo.com

We obtained new sufficient conditions under which the generalized solution of the parabolic initial–boundary value problem with homogeneous initial Cauchy data will be classic. Conditions formulated in terms of inclusion right-hand sides of the problem in some $2b$-anisotropic Hormander spaces.

Встановлено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків параболічної початково–крайової задачі з однорідними початковими даними Коші. Умови сформульвано в термінах приналежності правих частин задачі певним $2b$-анізотропним просторам Хермандера.

1. Вступ

Одним з важливих питань в теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних є питання про регулярність розв'язків досліджуваних задач. Зокрема, коли узагальнений розв'язок задачі є класичним, тобто коли диференціальні оператори застосовуються до розв'язків у термінах класичних похідних.

Скориставшись теоремою про розв'язність задачі в певній шкалі функціональних просторів та теоремами вкладання цих просторів в простори неперервно дифенеційовних функцій, можна судити чи є узагальнений розв'язок задачі певну кількість разів неперервно-диференційовним.

Для параболічних рівнянь правильні є теореми про коректну розв'язність початково-крайових задач у просторах Соболєва [1–6]. Разом з теоремами вкладання Соболєва вони дають можливість дослідити, чи буде узагальнений розв'язок задачі класичним. Проте в просторах неперервно диференційовних функцій висновки теорем про коректну розв'язність початково-крайових параболічних задач не вірні. Досліджуючи параболічні рівняння у більш тонко градуйованих шкалах просторів ніж соболєвська, в яких виконується теорема про коректну розв'язність, можна отримати більш тонкі умови неперервності узагальнених розв'язків.

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоноване Л.Хермандером у [7]. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ залежна від кількох дуальних змінних. Такі простори знайшли різноманітні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [7–25].

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [13–19] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Зокрема, вони отримали більш тонкі, ніж це дозволяє соболєвська шкала, умови класичності узагальнених розв'язів еліптичних задач.

В роботі [23] доведена теорема про коректну розв'язність параболічної мішаної задачі у $2b$-анізотропних гільбертових просторах Хермандера. Метою цієї роботи є дати застосування вище згаданої теореми для вирішення питання класичності розв'язку параболічної задачі.

Зазначимо, що питання класичності розв'язків параболічних задач, розглядуваних у просторах Соболєва, досліджував В.А. Ільїн, див. [26] та наведену там бібліографію.

Стаття складається з 6 пунктів. Пункт 1. є вступ. Пункт 2. містить постановку задачі, що досліджується. У п. 3. розглянута $2b$-анізотропна шкала гільбертових просторів Хермандера. У п. 4. сформульовано основний результат статті. Він доведений у п. 5.. Пункт 6. містить висновки до статті.

2. Постановка задачі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ – циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Розглянемо в Ω параболічну задачу з нульовими початковими даними Коші:

$$\begin{gathered} A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \\ \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \\ \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \end{gathered} \tag{2}$$

$$\text{для} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau \quad \text{і всіх} \quad j \in \{1,\dots,m\},$$

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для} \quad x \in G \quad \text{і всіх} \quad k \in \{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{3}$$

Тут b, m та всі m_j є довільні задані цілі числа, такі, що $m \geq b \geq 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ та $m_j \geq 0$. Всі коефіцієнти диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ та $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$ вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. А саме, $a^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ та $b_j^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S})$, де $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$, $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$. Використовуємо такі позначення для частинних похідних: $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ та $\partial_t := \partial/\partial t$. Тут $x = (x_1,\dots,x_n)$ є довільною точкою простору $\mathbb{R}^n$, а $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ є мультиіндексом і $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$. У формулах (1) і (2) підсумовування ведеться по цілим індексам $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta \geq 0$, які задовольняють нерівності, що написані під знаком суми.

Нагадаємо [1, § 9, пункт 1], що задачу (1)–(3) називають параболічною в циліндрі Ω, якщо виконуються такі дві умови.

Умова 1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p \geq 0$, виконується

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^\alpha p^\beta \neq 0$$

$$\text{для всіх} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Довільно оберемо $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межи Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p \geq 0$, такі, що $|\xi| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x)$ є ортом внутрішньої нормалі до межи Γ у точці x. З умови 1 випливає, що многочлен $A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має рівно m коренів $\zeta_j^+(x,t,\xi,p)$, $j = 1,\dots,m$, с додатною уявною частиною і m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 2. При кожному такому виборі x, t, ξ та p многочлени

$$B_j^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,(\xi+\zeta\nu(x))^\alpha p^\beta$$

$(j = 1,\dots,m)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні по модулю многочлена $\prod_{j=1}^m (\zeta - \zeta_j^+(x,t,\xi,p))$.

Відмітимо, що умова 1 є умовою $2b$-параболічності за І. Г. Петровським диференціального рівняння $Au = f$ у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 2 виражає той факт, що система граничних диференціальних операторів $\{B_1, \ldots, B_m\}$ накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

3. Гільбертові $2b$ -анізотропні простори Хермандера

Основний результат роботи будемо формулювати у термінах приналежності правих частин задачі гільбертовим функціональним просторам $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені Л. Хермандером [7, п. 2.2] та Л. Р. Волєвичем, Б. П. Панеяхом [8, § 2, 3]. Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 2$, є вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^l$ для будь-яких $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$.

За означенням, лінійний простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі усі розподіли/функції вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно скалярного добутку, що визначає норму $\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}$.

Нам буде потрібна версія $H^\mu_+(V)$ простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої множини $V \neq \varnothing$. Лінійний простір $H^\mu_+(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$, що дорівнюють нулю при $x_k < 0$. Тут $w = w(x', x_k)$, де $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $x_k \in \mathbb{R}$. У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}_{+}(V)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} : \, w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k), \qquad (4)$$
$$w(x', x_k) \equiv 0 \text{ при } x_k < 0, \; u = w \restriction V\bigr\}.$$

Простір $H^{\mu}_{+}(V)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно норми (4).

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/(2b)$. Будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu(\xi', \xi_k) = \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \qquad (5)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$ [17, пункт 1.2.1]. Цей клас складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, що означає

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0. \qquad (6)$$

Теорія повільно змінних функцій викладена в монографіях [27, 28]. Наведемо важливий і стандартний приклад функцій, що задовольняють (6):

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} \, (\log \log r)^{\theta_2} \dots (\underbrace{\log \dots \log}_{k \text{ разів}} r)^{\theta_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$ довільні параметри.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розглянемо $2b$-анізотропний гільбертів простір Хермандера $H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^k) := H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де показник μ визначений формулою (5).

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає $2b$-анізотропним гільбертовим простором Соболева порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^k)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x,t)$ по просторовій змінній $x \in \mathbb{R}^{k-1}$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in \mathbb{R}$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні та щільні вкладання

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \tag{7}$$

Розглянемо клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера

$$\bigl\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k):\, s \in \mathbb{R},\, \varphi \in \mathcal{M}\,\bigr\}. \tag{8}$$

Вкладання (7) показують, що у (8) функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s, s\gamma)$-гладкості. Якщо $\varphi(r) \to \infty$ (або $\varphi(r) \to 0$) при $r \to \infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Інакше кажучи, φ уточнює основну гладкість $(s, s\gamma)$. Тут $\gamma := 1/(2b)$ виконує роль параметру анізотропії просторів, що утворюють цей клас.

Назвемо клас (8) $2b$-*анізотропною шкалою гільбертових просторів Хермандера* на $\mathbb{R}^k$.

Використовуючи цю шкалу ведемо функціональні простори, пов'язані з параболічною задачею (1)–(3). Її розв'язок u та праву частину f рівняння (1) будемо розглядати у $2b$-анізотропних гільбертових просторах Хермандера $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega) := H^{\mu}_{+}(\Omega)$ де показник μ визначений формулою (5), у якій $k := n + 1$.

$2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера, до яких належать праві частини g_j крайових умов (2), задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$ циліндра Ω. Означимо їх використовуючи локальні карти на S.

Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Pi) := H^{\mu}_{+}(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (5), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкрити множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \lambda$, такі, що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j \equiv 1$ на Γ.

За означенням, лінійний простір $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номеру $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ функція $v_j(x,t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x), t)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. У просторі $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Цей простір є повним (гільбертовим) та не залежить від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ з точністю до еквівалентності норм.

Наостанок введемо локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$, де $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Нехай U — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^{n+1}$, $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\gamma_1 := U \cap \partial\Omega$, $\gamma_0 := U \cap S$.

Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\omega, \gamma_1)$ лінійний простір усіх розподілів $u \in D'(\Omega)$ в області Ω таких, що $\chi u \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp} \chi \subset \omega \cup \gamma_1$. Подібно до цього, позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $v \in D'(S)$ на S таких, що $\chi v \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp} \chi \subset \gamma_0$.

Підкреслимо, що у важливому окремому випадку $\varphi(r) \equiv 1$, всі означені в роботі простори стають $2b$-анізотропними соболєвськими просторами. У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях просторів.

4. Основний результат

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \text{ для всіх } j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \text{та} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Із результату М. С. Аграновіа та М. І. Вішіка [1, теорема 12.1] випливає, що для кожного вектора

$$F := (f, g_1, ..., g_m) \in \tag{9}$$
$$H_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+}^{\sigma_0-m_j-1/2,(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(S)$$

задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Цю функцію u називаємо узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3) із правою частиною (9).

Позначимо через m_0 найменше ціле число, таке, що

$$\frac{m_0}{2b} \geq \varkappa - 1, \quad m_0 \geq m_j \text{ для всіх } j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{та} \quad \frac{m_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Узагальнений розв'язок $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ задачі (1)–(3) назвемо класичним розв'язком цієї задачі, якщо виконуються такі дві умови:

1) всі узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \leq 2m$, є неперервними на множині Ω,

2) всі узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \leq m_0$, є неперервними на множині $\overline{\Omega}$.

Іншими словами, узагальнений розв'язок u назвемо класичним розв'язком параболічної задачі (1)–(3), якщо

$$u \in C_{x,t}^{2m,2m/(2b)}(\Omega) \cap C_{x,t}^{m_0,m_0/(2b)}(\overline{\Omega}).$$

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b),\varphi_1}_{+,\,\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b),\varphi_2}_{+}(\Omega),$$
$$g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b),\varphi_2}_{+}(S) \quad \textit{для всіх } j \in \{1,\dots,m\}, \tag{10}$$

де $\sigma_1 := 2m + b + n/2$*,* $\sigma_2 := m_0 + b + n/2 > \sigma_0$*, а функціональні параметри* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$ *такі, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varphi_j^2(t)} < \infty \quad \textit{для всіх} \quad j \in \{1,2\}. \tag{11}$$

Тоді $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1)–(3).

Зауваження. Якщо сформулювати аналог теореми 1 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умову цієї теореми на більш сильну: для правих частин задачі виконуються включення (10) при деяких $\sigma_1 > 2m + b + n/2$ і $\sigma_2 > m_0 + b + n/2$. Це робить результат значно більш грубим.

Приклад. Розглянемо в циліндрі $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задачу:

$$u'_t = \Delta u + f, \qquad u\big|_S = g, \qquad u\big|_{t=0} = 0. \tag{12}$$

Тут $m = b = 1$, $m_1 = 0$. Звідси $\sigma_0 = 2$, $m_0 = 0$. Нехай $u \in H^{2,1}_{+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі (12), де

$$f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4,\ \varphi_1}_{+,\,\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap H^{-1+n/2,\ -1/2+n/4,\ \varphi_2}_{+}(\Omega),$$

$$g \in H^{1/2+n/2,\ 1/4+n/4,\ \varphi_2}_{+}(S),$$

з $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$, що задовольняють умову (11). Тоді u є класичним розв'язком задачі (12), тобто $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Відмітимо, що з умови теореми $\sigma_2 > \sigma_0$ випливає, що в цьому прикладі $n > 2$.

5. Доведення

Нагадаємо, що U — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^{n+1}$, $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\gamma_1 := U \cap \partial\Omega$, $\gamma_0 := U \cap S$. Доведення теореми 1 спирається на такий результат [23, теорема 3].

Твердження 1. *Нехай довільно обране ціле число $q \geq 0$. Припустимо, що функція $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$
\begin{gathered}
f \in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\omega,\gamma_1),\\
g_j \in H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\gamma_0) \quad \textit{для всіх } j \in \{1,\dots,m\},
\end{gathered}
\tag{13}
$$

де $\sigma := 2bq + b + n/2 > 2m$, а функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ такий, що

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ і всі його узагальнені частинні похідні $D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \leq 2bq$, є неперервними на множині $\omega \cup \gamma_1$.

Доведення теореми 1. Покажемо спочатку, що $u \in C^{m_0,m_0/(2b)}_{x,t}(\overline{\Omega})$. З умови (10) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b),\varphi_2}_{+}(\Omega) = H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b),\varphi_2}_{+,\,\mathrm{loc}}(\Omega,\partial\Omega),\\
&g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b),\varphi_2}_{+}(S) =\\
&H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b),\varphi_2}_{+,\,\mathrm{loc}}(S) \quad \text{для всіх } j \in \{1,\dots,m\}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Тоді з твердження 1 при $q = m_0/(2b)$ завдяки (14) маємо, що функція $u(x,t)$ і всі її узагальнені частинні похідні $D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \le m_0$, є неперервними на множині $\overline{\Omega}$, тобто $u \in C^{m_0, m_0/(2b)}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

Якщо $m_0 \ge 2m$, то $C^{m_0, m_0/(2b)}_{x,t}(\overline{\Omega}) \subset C^{2m, 2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$ і теорема в цьому випадку доведена.

Нехай тепер $m_0 < 2m$. В цьому випадку ще потрібно довести включення $u \in C^{2m, 2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$. З умови (10) маємо включення

$$\begin{aligned} & f \in H^{\sigma_1 - 2m, (\sigma_1 - 2m)/(2b), \varphi_1}_{+, \mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing), \\ & g_j \in L_2(S) = H^{\sigma_1 - m_j - 1/2, (\sigma_1 - m_j - 1/2)/(2b), \varphi_1}_{+, \mathrm{loc}}(\varnothing) \\ & \text{для всіх } \ j \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Оскільки $m_0 < 2m$, то $\sigma_1 > \sigma_0$. Отже, з твердження 1 при $q = m/b$ завдяки (15) маємо, що функція $u(x,t)$ і всі її узагальнені частинні похідні $D^{\alpha}_x \partial^{\beta}_t u(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \le 2m$, є неперервними на множині Ω, тобто $u \in C^{2m, 2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$. Таким чином, $u \in C^{2m, 2m/(2b)}_{x,t}(\Omega) \cap C^{m_0, m_0/(2b)}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

Теорема 1 доведена.

6. Висновки

В статті встановлено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків параболічної початково–крайової задачі (1)–(3) (теорема 1). Праві частини задачі належать $2b$-анізотропним просторам Хермандера. Завдяки цим просторам отримано більш тонкий результат, ніж це дозволяють зробити простори Соболєва.

Література

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.

[2] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

[3] *Lions J.-L. Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.

[4] *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Operator Theory: Advances and Applications, 101. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.

[5] *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205–316.

[6] *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев, Выща школа, 1990. – 200 с.

[7] *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.)

[8] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[9] *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.

[10] *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.

[11] *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäser, 2001. – xii+425 p.

[12] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – xi+306 p.

[13] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukrainian Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.

[14] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.

[15] *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold. // Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.

[16] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukrainian Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.

[17] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[18] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.

[19] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.

[20] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **19**, No. 2. – P. 146–160

[21] *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач. – Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219–234.

[22] *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. // Доповіді НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23–31.

[23] *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості. // Доповіді НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24–32.

[24] *Лось В. М.* Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра. // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**,№ 2. – С. 226-237.

[25] *Лось В. М.* Мішані задачі для двовимірного рівняння теплопровідності у анізотропних просторах Хермандера. // Український математичний журнал. – 2015. – **67**,№ 5. – С. 645-656.

[26] *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97–154.

[27] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[28] *Seneta E.* Regularly varying functions. – Berlin: Springer, 1976. – 112 p. (Рус. перевод: Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.)