Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 65–77

УДК 517.5

Г. М. Власик

(Інститут математики НАН України, Київ)

annawlasik@gmail.com

Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q

It have been obtained exact order estimates of orthoprojective widths of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some values of p and q.

Отримано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

1. Вступ. У роботі встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q для певних співвідношень між параметрами p та q. Паралельно досліджено наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в метриці L_q лінійними операторами, які підпорядковуються деяким умовам. Більш детально про ці величини мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| \,, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Далі нехай $\psi \neq 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, Т. 1, с. 132]), назвемо (ψ,β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \le 1\}, 1 \le p \le \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > 0, \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^r_{p,\beta}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Позначимо через Ψ множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}, r > 0$; $\frac{\ln^{\gamma}(t+1)}{t^r}, \ \gamma \in \mathbb{R}, \ r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$

$(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі константи $C_i,\ i = 1, 2, ...,$ які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, у якій вимірюється похибка наближення.

Тепер перейдемо до означення досліджуваних апроксимативних характеристик.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1,m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j(x),$$

де

$$(f, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_j(x)} dx,$$

а $\overline{u_j}$ — функції комплексно-спряжені до u_j.

Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j \right\|_q \qquad (1)$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі L_q. Ортопроекційний поперечник був введений В.М. Темляковим [3].

Паралельно з поперечниками $d_m^{\perp}(F, L_q)$ будемо розглядати величини $d_m^B(F, L_q)$, також введені В.М. Темляковим (див., наприклад, [4]), які для функціонального класу $F \subset L_q$ означаються за формулою

$$d_m^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \left\| f - Gf \right\|_q. \qquad (2)$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значення міститься в підпросторі L_q розмірності m;

б) число $B \geq 1$ і для всіх k виконується нерівність $||Ge^{ikx}||_2 \leq B$.

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать зокрема оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \leq 1$ для всіх l.

Із означення величин $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і $d_m^B(F, L_q)$ слідує, що вони пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^B(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q). \tag{3}$$

Із нерівності (3) видно, що оцінки знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величини $d_m^B(F, L_q)$. Ця обставина буде врахована при доведенні відповідних тверджень. Відмітимо також, що при доведенні оцінок знизу величини $d_m^B(F, L_q)$ будемо використовувати метод, який застосовував В.М. Темляков при встановленні оцінок цих величин для деяких функціональних класів [3–5]. Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, які "погано" наближаються за допомогою операторів G.

Детальнішу інформацію стосовно дослідження величин (1) і (2) можна знайти в роботах [3], [5–12], а також у монографіях [4, 13].

2. Допоміжні твердження. У цьому пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які нами будуть використовуватися при доведенні отриманих результатів.

Нехай $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, тоді через $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, будемо позначати величини

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q.$$

Зазначимо, що величини $d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ і $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, де $m = 2n+1$, пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q. \tag{4}$$

Теорема А [14]. *Нехай $1 < p, q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, $\psi(\tau)\tau^{\alpha}$ не зростає. Тоді*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\alpha},$$

де $\alpha = (1/p - 1/q)_+$, $a_+ = max\{0; a\}$.

Лема А [5]. *Нехай A — лінійний оператор, такий, що для довільного k*

$$Ae^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x), \tag{5}$$

де $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій. Тоді для довільного тригонометричного полінома t виконується нерівність

$$\min_{y=x} \mathrm{Re} At(x-y) \le \left(m \sum_{l=1}^{m} \sum_{k} |a_l^k \hat{t}(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{ k: \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s \right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема Б (Літтлвуда-Пелі) (див., наприклад, [13, с. 17]). *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують додатні сталі C_3, C_4 такі, що для кожної функції $f \in L_q$ має місце оцінка*

$$C_3 \|f\|_q \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_4 \|f\|_q.$$

Нехай

$$T_m = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Тоді справедливе наступне твердження.
Теорема В (див., наприклад, [15, с. 159]). *Нехай $t \in T_m, m > 0$. Тоді при $1 \le q < p < \infty$ виконується нерівність*

$$\|t\|_p \ll m^{1/q-1/p} \|t\|_q. \tag{7}$$

Це співвідношення є частковим випадком нерівності, яка була доведена Нікольським С.М. і відома як "нерівність різних метрик". Зауважимо також, що у випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [16].

Теорема Г [17]. *Нехай $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тоді для $t \in T_m$ справедлива оцінка*

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_p.$$

Теорема Д [18]. *Нехай $1 < q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \Psi \cap \Psi_{q'}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, де $\Psi_{q'}$ — множина монотонно незростаючих функцій $\psi(\tau)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{q'}$ така, що функція $\psi(\tau)\tau^{\alpha}$ майже спадає, і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \ge 0, \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \le 0, \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді справедливе наступне співвідношення

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{q'}}.$$

Твердження А [2, Т.II, c. 119]. *Нехай $\psi(\tau)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов (8) або (9) і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{m-1} \psi(m)(k\psi(k))^{-1} = O(1), \tag{10}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по m. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t \in T_m$ виконується нерівність

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_1 \le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ — рівномірно обмежена по m і t.

3. Основні результати.

Має місце таке тведження.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$ не зростає, $\tau \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}. \tag{11}$$

Доведення. Оцінки зверху в (11) одержуються з оцінок наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ сумами Фур'є у метриці простору L_q. Для цього достатньо скористатися теоремою A та нерівностями (3) і (4)

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \leq d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}.$$

Тепер перейдемо до встановлення в (11) оцінок знизу, зробивши попередньо деякі зауваження.

При оцінці знизу величин $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ будемо вважати, що оператори G належать $\mathcal{L}_m(B)_2$. Для зручності наведемо відповідні міркування Темлякова В.М. (див., наприклад, [5]), які підтверджують, що таке припущення не є додатковим обмеженням на оператор G.

У випадку $q \geq 2$ умова $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ є безпосереднім наслідком умови $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Покажемо тепер, що якщо $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ при $1 \leq q < 2$, то також можна вважати, що $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Дійсно, нехай $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ і

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kx$$

— ядро Валле-Пуссена. Позначимо через $\mathbf{V}_m$ оператор, що діє на функцію $f \in L_q$ наступним чином

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m,$$

де $*$ — операція згортки.

Відомо, що для довільної функції $f \in L_q, 1 \leq q \leq \infty$, виконується співвідношення

$$\|\mathbf{V}_m f\|_q \leq 3\|f\|_q,$$

і, крім цього, для $t \in T_m$

$$\mathbf{V}_m t = t.$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Розглянемо оператор $A = \mathbf{V}_m G$. Тоді $A \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для $t \in T_m$ можемо записати

$$\|f - Af\|_q = \|\mathbf{V}_m(f - Af)\|_q \leq 3\|f - Gf\|_q.$$

Із цієї нерівності випливає, що при отриманні порядкових оцінок знизу величин $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ можна вважати, що $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Отже, нехай оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для довільного k

$$Ge^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x),$$

де $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій. Зазначимо, що для довільного m і k

$$\sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \leq B^2,$$

а для довільного l

$$\sum_{k} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \leq 1. \tag{12}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до отримання оцінки знизу величин $d_m^B(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q)$.

Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) = K_{2^n-1}(x),$$

де

$$\mathcal{K}_{l-1}(t) = \sum_{k=-(l-1)}^{l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikx}$$

— ядро Фейєра порядку l, $\mathcal{K}_{l-1}(t) \equiv 1$ при $l \leq 1$.

Нехай задано оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ і $2^{n+1} > m, 2^n \asymp m$. Розглянемо оператор

$$A = \mathbf{S}_{2^n} G \in \mathcal{L}_m(B)_q,$$

де $\mathbf{S}_{2^n}$ — оператор Фур'є, який співставляє кожній функції $f \in L_1$ її частинну суму виду

$$S_{2^n}(f, x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Зазначимо, що згідно з наслідком з теореми Б

$$\|\mathbf{S}_{2^n}\|_{q \to q} \leq C_5, 1 < q < \infty, l \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

і тому для $f \in T_m$, можемо записати

$$\|f - Af\|_q = \|\mathbf{S}_{2^n}(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q. \tag{13}$$

Із співвідношення (13) випливає, що оцінку знизу достатньо встановити для класу $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T_m$ і операторів $A \in \mathcal{L}_m(B)_q$ з областю значень в T_m. Тоді для оператора A і класу функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$ можемо записати співвідношення, яке є наслідком (13),

$$\inf_{A \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T_m} \|f - Af\|_q \ll d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q). \tag{14}$$

Для встановлення оцінки знизу для величин в лівій частині співвідношення (14) розглянемо величину

$$I = \sup_y \|\varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y)\|_\infty,$$

Легко бачити, що

$$I \geq \varphi_n(0) - \min_{y=x} Re\ A\varphi_n(x-y). \tag{15}$$

Оцінимо кожний даданок правої частини (15). Згідно з означенням функції φ_n можемо записати

$$\varphi_n(0) \geq C_6 N, \quad C_6 > 0. \tag{16}$$

Далі, нехай $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій і

$$Ae^{ikx} = \sum_{l=1}^m a_l^k \psi_l(x).$$

Тоді

$$\left(\sum_{l=1}^m |a_l^k|^2 \right)^{1/2} \leq B, \tag{17}$$

і, згідно з лемою A та нерівностями (12) і (17), маємо

$$\min_{y=x} ReA\varphi_n(x-y) \leq \left(m \sum_{l=1}^m \sum_k |a_l^k \hat{\varphi_n}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(m \sum_{l=1}^m \sum_k |a_l^k|^2 \right)^{1/2} = \left(m \sum_k \sum_{l=1}^m |a_l^k|^2 \right)^{1/2} \leq B(m2^{n+1})^{1/2}. \tag{18}$$

Виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалось співвідношення $m \asymp 2^n$, $2^n > 2B(m2^{n+1})^{1/2}$.

Тоді, використовуючи оцінки (15) – (18), отримуємо

$$I = \sup_y \|\varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y)\|_\infty \gg 2^n.$$

Відповідно, знайдеться y^* такий, що

$$\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg 2^n. \tag{19}$$

Далі, згідно з "нерівністю різних метрик" (7) для полінома $t \in T_{2^n}$ можемо записати

$$\|t\|_\infty \ll 2^{n/q}\|t\|_q,$$

і відповідно

$$\|t\|_q \gg 2^{-n/q}\|t\|_\infty.$$

Таким чином, скориставшись (19), отримаємо

$$\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-n/q}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg$$
$$\gg 2^{-n/q}2^n = 2^{n(1-1/q)}. \tag{20}$$

Для завершення доведення оцінки знизу величин $d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ розглянемо функцію

$$g(x) = C_7\psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\varphi_n(x), \quad C_7 > 0.$$

Використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [13, с. 27]),

$$\|\mathcal{K}_{2^n-1}\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, 1 \le p \le \infty, \tag{21}$$

згідно з теоремою Г, легко переконатися, що $g \in L^\psi_{\beta,p}, 1 < p < \infty$:

$$\|g^\psi_\beta\|_p \ll \psi^{-1}(2^n)\|g\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}\psi^{-1}(2^n)\psi(2^n)\|\varphi_n\|_q \ll$$
$$\ll 2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/p)} = 1.$$

Звідси слідує, що при певному виборі сталої $C_7 > 0$ функція $g \in L^\psi_{\beta,p}$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (20), на підставі (14), будемо мати

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg \|g(x-y^*) - Ag(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/q)} = \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}. \quad (22)$$

Оцінка знизу, а разом з нею і теорема 1 доведені.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов (8) або (9) і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що* $\psi(\tau)\tau^{1-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді*

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{1-1/q}. \quad (23)$$

Доведення. Оцінки зверху в (23) випливають із теореми Д та нерівностей (3) і (4)

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \le d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \ll \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-1/q}.$$

Для встановлення оцінки знизу величин $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_8\psi(2^n)\varphi_n(x), C_8 > 0.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої C_8 функція g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\| \ll 1$. Із цією метою скористаємося твердженням А.

Зауважимо, що умова (10) виконується, оскільки існує таке число $\alpha > 1 - 1/q$, що послідовність $\eta(m) = \psi(m)m^{\alpha}$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\eta(k)k} \le \frac{1}{m^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{\alpha}}{k} \le 1.$$

Отже, на підставі твердження А і спввідношення (21) одержимо, що

$$\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\|g_1\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\psi(2^n) = 1,$$

звідки слідує, що g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (20), згідно з (14), будемо мати

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \gg \|g_1(x-y^*) - Ag_1(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_q \gg$$
$$\gg \psi(2^n)2^{n(1-1/q)} \asymp \psi(m)m^{1-1/q}.$$

Оцінка знизу, а разом з нею і теорема 2 доведені.

Зауваження 1. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}, r > 1/p - 1/q, 1 \leq p < q \leq \infty$, то відповідні твердження до теореми 1 і 2 встановлено В.М. Темляковим (див., наприклад, [13, с. 54 – 56]).

Література

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40** — Т.I. — 427 с.; Т.II. — 468 с.

[3] *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.

[4] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3 – 113.

[5] *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.

[6] *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №9. — С. 1224 – 1231.

[7] *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №10. — С. 1402 – 1408.

[8] *Федуник О.В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін–ту математики НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.

[9] *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінни // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 –704.

[10] *Романюк С.А., Романюк В.С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №10. — С. 1348 – 1366.

[11] *Дерев'янко Н.В.* Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних // Аналіз і застосування: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, №2. — С. 146 – 156.

[12] *Дерев'янко Н.В.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін–ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 95 – 109.

[13] *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 272 p.

[14] *Степанец А.И, Кушпель А.К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 4. — С. 483 – 492.

[15] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1989. — 480 с.

[16] *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, № 12. — P. 889 – 906.

[17] *Романюк А.С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92 – 105.

[18] *Грабова У.З., Сердюк А.С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій. // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1186 – 1197.