Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 133–141

УДК 517.5

Т. Засадко

(Національний університет імені Тараса Шевченка)

Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою

Group classification of planar Schrödinger equations with position dependent mass is carried out. These equations are defined up to two arbitrary functions which represent a mass and potential. Twenty one class of such equations with different symmetries have been classified. These classes are defined up to the equivalence group which is the conformal group in two dimension Euclidean space.

Проведено групову класифікацію рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою, які мають одну часову та дві просторові змінні. Ці рівняння включають дві довільні функції, що задають масу та потенціал. Показано, що існує двадцять один клас рівнянь такого типу з різними симетріями. Ці класи визначені з точністю до групи еквівалентності досліджуваних рівнянь, яка є конформною групою у двовимірному Евклідовому просторі.

1. Вступ. Дослідження симетрії та інтегралів руху рівняння Шрьодінгера знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників. Інваріантність цього рівняння відносно групи Галілея фактично була відкрита ще Софусом Лі. Симетрії рівняння Шрьодінгера з потенціалом було прокласифіковано в роботах [1] та [2], про вищі симетрії та суперсиметрії (див. огляди [3] та [4], відповідно).

В той же час симетрії рівняння Шрьодінгера зі змінною масою, яке широко використовується у фізиці твердого тіла, досліджені відносно мало. Систематичне вивчення цих симетрій розпочато у роботах [5] і [6], де були знайдені усі інтеграли руху першого порядку для тривимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою. В роботі [7] проведено групову класифікацію стаціонарних рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку.

В даній роботі продовжено дослідження інтегровних і суперінтегровних систем зі змінною масою для двовимірного випадку. А саме, проведено групову класифікацію нестаціонарних рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою, які допускають інтеграли руху першого порядку. При цьому розглянуто тільки спеціальні групи симетрії, які допускають узагальнення на випадок рівнянь довільної розмірності. Повний список рівнянь з нееквівалентними групами симетрії наведено нижче у таблиці 2.

2. Визначальні рівняння для операторів симетрії.

Розглянемо рівняння Шрьодінгера зі змінною масою

$$\hat{H}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi, \tag{1}$$

де

$$\hat{H} = p_a f(\mathbf{x}) p_a - V(\mathbf{x}) = -\partial_a f(\mathbf{x})\partial_a - V(\mathbf{x}),$$
$$\mathbf{x} = (x^1, x^2), \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2,$$

f та V є диференційованими функціями від $\mathbf{x}$, які поки що вважаються невідомими.

Наша задача — дослідити симетрії рівняння (1) відносно неперервних груп перетворень залежних і незалежних змінних. Очевидно, такі симетрії будуть залежати від функцій f та V. Іншими словами, ставиться задача групової класифікації рівнянь (1), які включають два довільних елементи, якими є функції f та V.

Оскільки розглядуване рівняння є лінійним, генератори його груп симетрії можна представити в наступному вигляді:

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^a\partial_a + \eta, \tag{2}$$

де ξ^0, ξ^a та η — невідомі функції від $\mathbf{x}, t$ і $a = \overline{1, 2}$.

За визначенням, генератори групи симетрії повинні задовольняти наступне співвідношення [9]

$$\left[Q, \hat{H} - i\frac{\partial}{\partial t}\right] = \alpha\left(\hat{H} - i\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{3}$$

де α — деяка функція від $\mathbf{x}$. Обраховуючи комутатор $[.,.]$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових диференціалах, дістаємо наступну систему визначальних рівнянь:

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \delta_{ab}\xi_i^i = 0, \tag{4}$$

$$\xi^i f_i + \alpha f = f\xi_i^i, \tag{5}$$

$$\xi_t^0 = -\alpha, \quad \xi_a^0 = 0, \tag{6}$$

$$-i\xi_t^a - \xi^i f_{ai} + f_i\xi_i^a + f\xi_{cc}^a + 2f\eta_a = \alpha f_a, \tag{7}$$

$$f_a\eta_a + f\eta_{aa} - \xi^i V_i - i\eta_t = -\alpha V, \tag{8}$$

де δ_{ab} — символ Кронекера, і нижні індекси позначають похідні за відповідними змінними. Наприклад, $\xi_c^a = \frac{\partial\xi^a}{\partial x_c}, \xi_t^0 = \frac{\partial\xi^0}{\partial t}$, і т.п.

3. Нееквівалентні варіанти визначальних рівнянь. Вираз (4) є визначальним рівнянням для конформного вектора Кіллінга. Його загальний розв'язок має вигляд (див., наприклад, [10])

$$\xi^1 = \phi + \phi^*, \quad \xi^2 = \mathrm{i}(\phi - \phi^*) \tag{9}$$

де ϕ — довільна аналітична функція. Ми обмежимось наступним частковим випадком співвідношень (9):

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a\lambda^n x^n + \kappa\varepsilon^{ab}x^b + \omega x^a + \nu^a, \quad a, b = \overline{1,2}, \tag{10}$$

де $\lambda^a, \omega, \kappa$ та ν^a є функціями від t і ε^{ab} є одиничним антисиметричним тензором. Тоді, згідно з (2), (10), загальний вигляд інтеграла руху першого порядку для гамільтоніана () задається наступною формулою:

$$Q = \lambda^a K^a + \kappa J + \omega D + \nu^a P^a + \eta, \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned} P^a &= p^a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J = x^1p^2 - x^2p^1, \\ D &= x^a p^a - 1, \quad K^a = 2x^a D - x^n x^n p^a \end{aligned} \tag{12}$$

а η — невідома функція від x, t, і по індексах, що повторюються, розуміється сумування за значеннями 1, 2.

З (6) слідує, що

$$\xi^0 = \xi^0(t) = -\int \alpha dt. \tag{13}$$

Продиференціювавши (5) по x_a, виразивши $\xi^i f_{ai}$ з (5) і використавши (4), отримуємо

$$i\xi^a_t = 2f(\eta_a + 2\lambda) \tag{14}$$

Рівняння (7), (8) можуть бути зведені до дійсної форми. Це досягається наступною заміною:

$$\eta = \xi^n_n + i\tilde{\eta} = -2\vec{\lambda}\vec{x} + i\tilde{\eta}, \tag{15}$$

в результаті якої рівняння (7), (8) набувають вигляду:

$$\tilde{\eta}_t = \xi^i V_i - \alpha V + 2\lambda f_a, \tag{16}$$

$$\xi^a_t = 2f\tilde{\eta}_a. \tag{17}$$

Функція f не залежить від t, тому з (17) випливає що

$$\xi^a_t = \dot{\varphi}_1(t)\tilde{\xi^a}(x), \quad \tilde{\eta} = \varphi_2(t)\tilde{\mu}(x) + \varphi_3(t) \tag{18}$$

і

$$c_1\dot{\varphi}_1 = c_2\varphi_2, \tag{19}$$

де c_1 і c_2 — константи.

Підставивши (18) у (5), дістанемо наступний вираз для функції α

$$\alpha = c_3\varphi_1(t), \tag{20}$$

а саме рівняння (5) набуває вигляду

$$\tilde{\xi}^i f_i + c_3 f = f\tilde{\xi}^i_i. \tag{21}$$

Далі, підставивши (18) в (4), отримаємо рівняння:

$$\tilde{\xi}^b_a + \tilde{\xi}^a_b - \delta_{ab}\tilde{\xi}^i_i = 0, \tag{22}$$

яке формально співпадає з (4), але включає функції, які не залежать від t. Його розв'язок має вигляд

$$\tilde{\xi}^a = \tilde{\lambda}^a x^n x^n - 2x^a\tilde{\lambda}^n x^n + \tilde{\kappa}\varepsilon^{ab}x^b + \tilde{\omega}x^a + \tilde{v}^a, \quad a, b = \overline{1,2}, \tag{23}$$

де $\tilde{\lambda}^a, \tilde{\omega}, \tilde{\kappa}, \tilde{v}^a$ — константи.

Підставивши (18) і (23) у (16), отримаємо

$$\dot\varphi_2\tilde\mu + \dot\varphi_3 = \varphi_1(\tilde\xi^a V_a - c_3 V + 2\tilde\lambda_a f_a) \tag{24}$$

З рівняння (24) випливають наступні співвідношення

$$\dot\varphi_2 = c_4\varphi_1, \quad \dot\varphi_3 = c_5\varphi_1, \tag{25}$$

Нееквівалентні розв'язки системи (19), (25) наведено у наступній таблиці,

Таблиця 1. Розв'язки рівнянь (19), (25)

№	φ_1	φ_2	φ_3
1	t	1	c_5t^2
2	1	t	c_5t
3	$\cos t$	$\sin t$	$c_5\sin t$
4	$e^{\pm t}$	$\pm e^{\pm t}$	$\pm c_5 e^{\pm t}$

де ми використали можливість зміни масштабу часової змінної.

Для розв'язків, наведених у першому, другому, третьому та четвертому рядках таблиці, рівняння (17) і (24) перетворюються на

$$\tilde\xi_a = 2f\tilde\mu_a, \quad \tilde\xi^a V_a + 2\tilde\lambda_a f_a - c_3 V = 2c_5, \tag{26}$$

$$\tilde\xi_a = 0, \quad \tilde\xi^a V_a + 2\tilde\lambda_a f_a - c_3 V = c_5 + \tilde\mu, \tag{27}$$

$$-\tilde\xi_a = 2f\tilde\mu_a, \quad \tilde\xi^a V_a + 2\tilde\lambda_a f_a - c_3 V = c_5 + \tilde\mu, \tag{28}$$

$$\tilde\xi_a = 2f\tilde\mu_a, \quad \tilde\xi^a V_a + 2\tilde\lambda_a f_a - c_3 V = c_5 + \tilde\mu, \tag{29}$$

відповідно.

Отже, для кожного відомого набору функцій $\tilde\xi_a$, $a = \overline{1,2}$, наша задача зводиться до розв'язання чотирьох систем рівнянь, що включають рівняння (21) і одне з рівнянь (27–29).

Загальний вираз для функцій $\tilde\xi_a$ задається формулою (23) і включає шість довільних параметрів. Використовуючи групу еквівалентності досліджуваного рівняння (1) (а це конформна група C(2) у двовимірному Евклідовому просторі [7]), можна визначити нееквівалентні вирази цих функцій, які включають значно меншу кількість параметрів. Це зводиться до перебору нееквівалентних підалгебр алгебри c(2), який вдається зробити з використанням наступного твердження.

Твердження 1. *Алгебра $c(2)$ ізоморфна алгебрі Лі псевдоортогональної групи $SO(1,2)$.*

Сформульований вище автоморфізм може бути заданий явно за допомогою наступних співвідношень:

$$J = J^{12},\ K^a = J^{0a} - J^{3a},\ P^a = J^{0a} + J^{3a},\ D = J^{30} \tag{30}$$

де P^a, J^a, K^a та D — оператори (12). Ці співвідношення визначають базис алгебри $so(1,2)$, який утворюють оператори $J^{\mu\nu}$.

Згідно з наведеним твердженням, оптимальна система підалгебр алгебри (2) співпадає з оптимальною системою підалгебр алгебри $so(1,2)$. Остання була знайдена у роботі [11], результатами якої ми і скористаємося. Ці результати можуть бути представлені у вигляді наступного твердження.

Твердження 2. *Нееквівалентні підалгебри алгебри $so(1,2)$ визначаються наступними наборами базисних елементів.*

Одновимірні підалгебри:
$< J_{12} >,\ \ < J_{01} + J_{31} >,\ \ < J_{03} >,\ \ < J_{12} + \alpha J_{03} >,\ \ \alpha > 0;$
двовимірні підалгебри:
$< J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32} >,\ \ < J_{01} + J_{31}, J_{03} >,\ \ < J_{12}, J_{03} >;$
тривимірні підалгебри:
$< J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32}, J_{03} >,\ \ < J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32}, J_{12} >,$
$< J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32}, J_{12} + \alpha J_{03} >,$
$< J_{12}, J_{13}, J_{23} >,\ \ < J_{01}, J_{02}, J_{12} >;$
чотиривимірна підалгебра: $< J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32}, J_{12}, J_{03} >;$
шестивимірна підалгебра: $< J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23} >.$

Кожній підалгебрі, наведеній у твердженні 2, можна співставити нееквівалентний набір функцій ξ^a. Ці функції ξ^a легко знайти, порівнявши вирази (11), (23) та (30). Наприклад, для двовимірної підалгебри $< J_{01} + J_{31}, J_{02} + J_{32} >$ отримуємо дві такі функції: $\xi^1 = \nu^1$ та $\xi^2 = \nu^2$, які в даному випадку є константами.

Таким чином, задача групової класифікації рівнянь (1) зводиться до пошуку загальних розв'язків систем (21),(26); (21),(27); (21),(28) і (21),(29), де функції ξ^a визначаються за вище описаним способом. Ми не будемо наводити відповідні громіздкі обчислення, результатом яких є набір розв'язків для функцій f та V, який наведено у таблиці 2 разом з базисними елементами відповідної алгебри симетрії рівняння (1).

Таблиця 2. Нееквівалентні функції f та V і відповідні симетрії

f	V	Q
$cr^2e^{c_1\varphi}$	$\widetilde{F}(r)e^{-c_1\varphi}-c_2$	$2cc_1\left(\xi^0\partial_t+tJ\right)+$ $+i\left(cc_1^2c_2t^2+e^{-c_1\varphi}\right)$
$F(r)e^{c_1\varphi}$	$\widetilde{F}(r)e^{-c_1\varphi}-c_2$	$\xi^0\partial_t+J+ic_1c_2t$
$\frac{1}{2cc_1}r^2e^{c_1\varphi}$	$\widetilde{F}(r)e^{-c_1\varphi}+$ $+ce^{-c_1\varphi}\varphi-c_2$	$\xi^0\partial_t+\cos tJ+$ $+\sin t(c_1c_2-ce^{-c_1\varphi})i$
$\frac{1}{2cc_1}r^2e^{c_1\varphi}$	$\widetilde{F}(r)e^{-c_1\varphi}-$ $-ce^{-c_1\varphi}\varphi-c_2$	$\xi^0\partial_t+e^{\pm t}J$ $\pm e^{\pm t}(c_1c_2+ce^{-c_1\varphi})i$
$ce^{-c_1x_1}$	$\widetilde{F}(x_2)e^{c_1x_1}-c_2$	$2cc_1\left(\xi^0\partial_t+t\partial_1\right)$ $+i(cc_1^2c_2t^2+e^{c_1x_1})$
$F(x_2)e^{-c_1x_1}$	$\widetilde{F}(x_2)e^{c_1x_1}-c_2$	$\xi^0\partial_t+\partial_1+ic_1c_2t$
$ce^{-c_1x_1}$	$e^{c_1x_1}\left(\widetilde{F}(x_2)-\frac{x_1}{2c_1c}\right)-c_2$	$2cc_1\left(\xi^0\partial_t+\cos t\partial_1\right)$ $+i\sin(t)\left(-e^{c_1x_1}+cc_1^2c_2\right)$
$ce^{-c_1x_1}$	$\widetilde{F}(x_2)e^{c_1x_1}+$ $+\frac{e^{c_1x_1}x_1}{2c_1c}-c_2$	$\xi^0\partial_t+e^{\pm t}\partial_1+$ $\pm ie^{\pm t}(\frac{e^{c_1x_1}}{2c_1c}+c_1c_2)$
cr^{c_1+2}	$\widetilde{F}(\varphi)r^{-c_1}-c_2$	$2cc_1\left(\xi^0\partial_t-tD\right)$ $+i(r^{-c_1}+cc_1^2c_2t^2)$
$F(\varphi)r^{c_1+2}$	$\widetilde{F}(\varphi)r^{-c_1}-c_2$	$\xi^0\partial_t-D+ic_1c_2t$
cr^{c_1+2}	$\widetilde{F}(\varphi)r^{-c_1}+$ $+\frac{r^{-c_1}\ln r}{2c_1c}-c_2$	$\xi^0\partial_t-\cos tD+$ $+i\sin t(-\frac{r^{-c_1}}{2c_1c}+c_1c_2)$
cr^{c_1+2}	$\widetilde{F}(\varphi)r^{-c_1}-$ $-\frac{r^{-c_1}\ln r}{2c_1c}-c_2$	$\xi^0\partial_t-e^{\pm t}D$ $\pm ie^{\pm t}(\frac{r^{c_1}}{2c_1c}+c_1c_2)$
cr^2	$\widetilde{F}(r^{-c_1}e^{\varphi})-c_1c_2\ln r$	$\partial_t,\ ctR+ic_1(cc_2t^2$ $-\ln(r^{c_1}e^{\varphi}))$
cr^2	$\widetilde{F}(r^{-c_1}e^{\varphi})+g_-$	$\partial_t,\ \cos tR$ $+ic_1\sin t(\ln(r^{-c_1}e^{\varphi})+cc_1)$
cr^2	$\widetilde{F}(r^{-c_1}e^{\varphi})+g_+$	$\partial_t,\ e^{\pm t}R\mp$ $\pm c_1e^{\pm t}(-\ln(r^{-c_1}e^{\varphi})+cc_1)i$
$F(r^{-c_1}e^{\varphi})r^{cc_1+2}$	$\widetilde{F}(r^{-c_1}e^{\varphi})r^{-cc_1}-c_2$	$c_1\xi^0\partial_t+R+ic_1c_2t$
$ce^{-c_1(x_1+x_2)}$	$c_3e^{c_1(x_1+x_2)}-c_2$	$\xi^0\partial_t+t\partial_1+ic_1c_2t,$ $\xi^0\partial_t+t\partial_2+ic_1c_2t$
$ce^{c_1\varphi}r^{c_1+2}$	$c_3e^{-c_1\varphi}r^{-c_1}-c_2$	$\xi^0\partial_t+tJ+ic_1c_2t,$ $\xi^0\partial_t-tD+ic_1c_2t$
cx_2^2	c	$\partial_t,\ \partial_1,\ D$
$c(r^2+1)^2$	$4cr^2+\nu$	$\partial_t, J,\ K_1-P_1,$ K_2-P_2
$c(r^2-1)^2$	$4cr^2+\nu$	$\partial_t,\ J,\ K_1+P_1,$ K_2+P_2

де

$$g_{\pm} = \frac{1}{4c}\left(-c_1xc_2\ln(r)\gamma \pm (\ln(r)^2(1-\frac{1}{c_1^2}) + 2\ln(r)\varphi c_1)\right),$$

$$R = c_1J - D,\ \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$F(\cdot)$ та $\widetilde{F(\cdot)}$ — довільні функції, а $c,\ c_1,\ c_2$ — довільні константи.

4. Висновки. Ми провели групову класифікацію класу рівнянь Шрьодінгера (1), які включають дві довільні функції f та V. Іншими словами, ми знайшли усі такі функції, що відповідають нееквівалентним симетріям цих рівнянь, і знайшли відповідні алгебри інваріантності. При цьому ми обмежились спеціальним класом операторів симетрії, визначеним співвідношеннями (2) та (9), а відношення еквівалентності визначаються конформною групою $C(2)$, яка діє у просторі двох незалежних змінних. Саме цей клас допускає пряме узагальнення на випадок рівнянь вигляду (1) з довільною кількістю незалежних змінних.

Згідно з результатами, наведеними у таблиці 2, існує 21 підклас рівнянь (1) з різною симетрією. Найбільш широку симетрію, а саме симетрію відносно чотирипараметричної групи Лі, мають рівняння, що відповідають функціям f та V, наведеним у двох останніх рядках таблиці.

Отримані результати можуть мати цікаві застосування в теорії твердого тіла. По-перше, їх можна використовувати при побудові моделей з бажаною симетрією. По-друге, знайдені симетрії можна використовувати для інтегрування рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою, як це було зроблено у роботі [6] для деяких тривимірних моделей.

Література

[1] *Hagen C.R.* Scale and conformal transformations in Galilean-invariant conformal field theory // Phys. Rev. — 1972. — **D 5**. — P. 377 – 388.

[2] *Niederer U.* The maximal kinematical invariance group of the free SchrЁodinger equations // Helv. Phys. Acta. — 1972. — **45**. — P. 802 – 810.

[3] *Miller W., Jr, Post S. and Winternitz P.* Classical and Quantum Superintegrability with Applications // J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — **46**. — P. 423001.

[4] *Nikitin A. G.* Superintegrable systems with arbitrary spin // Ukr. J. Phys. — 2013. — **58**. — P. 1046 – 1054.

[5] *Нікітін А. Г., Засадко Т.М.* Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою // Зб. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 1. — С. 228 – 240.

[6] *Nikitin A. G., Zasadko T. N.* Superintegrable systems with position dependent mass // J. Math. Phys. — 2015. — **56**. — P. 042101.

[7] *Засадко Т.М.* Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку // Доп. НАН України. — 2015. — № 5. — С. 7 – 14.

[8] *Желобенко Д.П., Штерн А.И.* Представления групп Ли. — Москва: Наука, 1983.

[9] *Miller W., Jr.* Symmetry and separation of variables // Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1977.

[10] *Нікітін А. Г.* Узагальнені тензори Кілінга довільного рангу та порядку // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**. — С. 786 – 795; *Nikitin A. G.* Generalized Killing tensors of arbitrary valence and order // Ukr. Mat. J. — 1991. — **43**. — P. 734 – 743.

[11] *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — К.: Наук. думка, 1991. — 304 с.