Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 147–154

УДК 517.5 + 513.83

***Ю. Б. Зелинский*[1], *И. Ю. Выговская*[2], *О. В. Сафонова*[3]**

[1], [2]*(Институт математики НАН Украины, Киев)*

[3]*(Национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев)*
[1] **zel@imath.kiev.ua**, [2] **vkirinata@gmail.com**,
[3] **olechkadiadin@gmail.com**

О многозначных нульмерных отображениях

Multivalued isolated mappings are investigated. We describe a behaviour of such mappings on the exclusive set and conditions of their extention.

Досліджуються многозначні нульвимірні відображення. Встановлена поведінка таких відображень на особливих множинах та умови стирання особливостей.

В работе рассмотрим многозначные отображения областей на многообразиях.

Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение $F\colon X \longrightarrow Y$ называется многозначным, если образом точки $x \in X$ есть множество $F(x) \subset Y$. Отображение F называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(U(x)) \subset V$. Отображение F называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$ (см., напр., [1]). В дальнейшем все отображения предполагаем многозначными и полунепрерывными сверху. Под прообразом $F^{-1}(y)$ точки $y \in Y$ понимаем множество $\{x \in X \mid y \in F(x)\}$. Далее предположим, что M^n и N^n — n-мерные многообразия, а $D \subset M^n$ — область на многообразии, ∂D — граница области D, $\rho(A,B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B. Пересечение открытых множеств называется множеством типа G_δ [1].

Определение 1. Отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ назовем нульмерным (изолированным), если размерность [2] полного прообраза $F^{-1}(F(x))$ каждой точки $x \in D$ равна нулю (если каждая точка полного прообраза имеет окрестность, не содержащую других точек этого же прообраза).

Определение 2. Пусть $F\colon D \longrightarrow N^n$ — многозначное отображение. Точка x_0 называется точкой взаимной однозначности отображения F, если $F^{-1}(F(x_0)) = x_0$.

Лемма 1. *Множество D_1 точек взаимной однозначности многозначного полунепрерывного сверху отображения $F\colon D \longrightarrow N^n$ есть множество типа G_δ.*

Доказательство. Обозначим через A_m множество точек $x \in D$, для которых $F^{-1}(F(x))$ содержит пару точек x_1, x_2 таких, что $\rho(x_1, x_2) \geq 1/m$ и $\rho(x_1 \cup x_2, \partial D \geq 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Легко убедиться, что каждое A_m — замкнутое множество. Тогда очевидное равенство $D_1 = D \backslash \bigcup\limits_m A_m = \bigcap\limits_m (D \backslash A_m)$ завершает доказательство.

Определение 3. Отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ назовем ацикличным, если для каждой точки $x \in D$ все приведенные группы когомологий множества $F(x)$ тривиальны [3].

Определение 4. Отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ называется монотонным, если множество $F^{-1}(y)$ связно для каждой точки $y \in N^n$.

Теорема 1. *Нульмерное многозначное отображение не понижает размерности.*

Доказательство. Утверждение носит локальный характер. Поэтому можем предположить, что рассматривается отображение замкнутого n-мерного шара $F\colon \overline{D} \longrightarrow N^n$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ такое, чтобы при произвольном ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, шар $\overline{D}$ не имел открытых покрытий множествами диаметра меньше ε и кратности $\leq n$. Отметим, что в силу полунепрерывности сверху и нульмерности отображения F для любого ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, найдется δ_0 такое, что прообраз произвольного множества диаметра меньшего δ_0 состоит из компонент диаметра, не превышающего ε. Образ $F\overline{D}$ — компакт, следовательно, из произвольного покрытия этого компакта можно выделить конечное подпокрытие. Пусть задано конечное покрытие компакта $F(\overline{D})$

открытыми множествами диаметра δ_0 и пусть δ_1 его лебегово число $\delta_1 < \delta_0$. Теперь покроем $F(\overline{D})$ конечным открытым покрытием множествами $\{A_1, \ldots, A_k\}$ диаметра $< \delta$, $0 < \delta \leq \delta_1$. Тогда для каждого из множеств A_i прообраз $F^{-1}(A_i)$ состоит из открытых компонент B_i^j $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots)$ диаметра меньшего ε. Совокупность множеств B_i^j $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots)$ задает открытое покрытие шара $\overline{D}$. Выберем из этой совокупности $\{B_1^{j_1}, \ldots, B_s^{j_s}\}$ конечное подпокрытие $\overline{D}$. В силу выбора диаметров компонент, кратность этого покрытия не меньше $n+1$. Поскольку различные компоненты прообраза $F^{-1}(A_i)$ не пересекаются, то найдется система из $n+1$ индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ таких, что пересечение множеств с этими индексами непусто. Если мы обозначим через $\{B(1), B(2), \ldots, B(n+1)\}$ и $\{A(1), A(2), \ldots, A(n+1)\}$ множества $B_{i_m}^{j_{i_m}}$ и $A_m^{i_m}$, соответственно, тогда получим

$$A(1) \cap A(2) \cap \ldots \cap A(n+1) \supset F(B(1)) \cap F(B(2)) \cap \ldots \cap F(B(n+1)) \supset$$

$$\supset F(B(1) \cap B(2) \cap \ldots \cap B(n+1)) \neq \varnothing.$$

Следовательно, кратность покрытия $A(i)$ не меньше $n+1$. Поэтому размерность компакта $F(\overline{D})$ не меньше n. Отсюда следует утверждение леммы.

Определение 5. Многозначное отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ назовем отображением типа (η), если для произвольной точки $y \in N^n$ найдется такое $\delta(y)$, что прообраз окрестности точки y диаметра меньше $\delta(y)$ состоит из открытых компонент, диаметр каждой из которых не превышает η.

Анализ доказательства предыдущей теоремы позволяет заключить, что ее утверждение, как и в случае однозначных отображений [4,5], останется справедливым и при более слабых ограничениях.

Следствие 1. Нульмерное многозначное отображение типа (η) не понижает размерности.

Докажем теперь одно утверждение о точках взаимной однозначности.

Теорема 2. *Пусть $F\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^1$ — нульмерное ациклическое многозначное отображение одномерного интервала. Если множество точек взаимной однозначности D_1 плотно в (a, b), то обратное отображение F^{-1} — однозначное монотонное отображение.*

Доказательство. В одномерном случае ацикличность обозначает связность образа точки. Пусть $c, d \in (a, b)$ — две точки взаимной однозначности и пусть не нарушая общности $F(c) < F(d)$ (под $F(c) < F(d)$ понимаем, что все точки множества $F(c)$ меньше каждой точки множества $F(d)$). В силу полунепрерывности сверху и связности образов точки для произвольной пары точек $f \in F(c), g \in F(d)$ образ отрезка $[c, d]$ содержит отрезок $[f, g]$. Предположим, что существует точка $y \in [f, g]$, для которой $F^{-1}(y)$ содержит не менее двух точек. Пусть это точки $x_1,\ x_2 \in F^{-1}(y),\ c \leq x_1 < x_2 \leq d$. В силу нульмерности отображения существует точка $x_0, x_1 < x_0 < x_2$, такая, что $x_0 \notin F^{-1}(y)$. Не нарушая общности предположим, что в точке x_0 F достигает своего максимального значения. Выберем точку $y_0 = \min F(x_0), \quad y_0 > y$. В силу плотности точек взаимной однозначности в D_1 существует последовательность точек $\{z_n\}$ сходящаяся к точке x_0. Из-за полунепрерывности сверху отображения F и принадлежности множеству D_1 образы этих точек начиная с некоторого номера должны принадлежать интервалу (y, y_0). Мы можем считать, что это верно для всех элементов последовательности. С другой стороны, в силу полунепрерывности сверху отображения F образ отрезка $[x_0, x_2]$ должен покрывать отрезок $[y, y_0]$ и, следовательно, для каждой точки выбранной последовательности множество $F^{-1}(F(z_n))$ состоит не менее чем из двух точек. Это противоречит плотности точек множества D_1. Теорема доказана.

Пусть $F\colon \overline{D} \longrightarrow N^n$ — нульмерное ацикличное многозначное отображение и точка $y \in F(\overline{D}),\ y \notin F(\partial D)$. Это отображение индуцирует отображение соответствующих групп когомологий $F^*\colon H^n(F(\overline{D}), F(\partial D)) \longrightarrow H^n(\overline{D}, \partial D)$ с коэффициентами в группе целых чисел $\mathbb{Z}$ [3]. Выберем некоторую открытую связную окрестность $U(y)$ точки y такую, что $F(\partial D) \cap U(y) = \varnothing$. Существует такое целое число k, что $jF^*(\eta(U)) = k\eta(D)$, где $\eta(U)$ и $\eta(D)$ соответствующие образующие групп $H^n(\overline{U}, \partial U)$ и $H^n(\overline{D}, \partial D)$, а — $j\colon H^n(F^{-1}(\overline{U}), F^{-1}(\partial U)) \longrightarrow H^n(\overline{D}, \partial D)$ — канонический гомоморфизм вложения. Известно, что k не зависит от выбора $U(y)$. В дальнейшем это число будем обозначать через $\gamma(D, F, y)$ и называть степенью отображения F относительно точки y. Пусть для точки $x \in F^{-1}(y)$ существует фильтр из областей $\{D_m\}, D_m \subset D, \ \cap D_m = x$ [1]. Если, начиная с некоторого элемента фильтра для всех в него вложенных областей, степень стабилизируется, то скажем, что в точке существует локальная степень отображения $\gamma(x) = \gamma(D_m, F, y)$ [6].

Легко показать, что так введенная локальная степень обладает свойствами классической локальной степени для однозначных нульмерных отображений [5]. Аналоги следующего результата для однозначных отображений получены в [5,7].

Теорема 3. *Пусть в M^n задан произвольный компакт E и пусть нульмерное ацикличное многозначное отображение $F\colon M^n \longrightarrow N^n$ такое, что в каждой точке множества $M^n \backslash E$ существует локальная степень $\gamma(x) > 0$. Тогда либо $F(M^n) = N^n$, либо $F(T) \supset F(M^n \backslash E)$, т.е. в последнем случае все значения, которые отображение принимает вне E, оно принимает и на E.*

Доказательство. Если $F(M^n) = N^n$, то теорема доказана. Если же $F(M^n) \neq F(N^n)$, то $H^n(F(M^n)) = 0$, так как в этом случае $F(M^n)$ компактное подмножество N^n. Тогда степень отображения $\gamma(M^n, F, y) = 0$ для всех точек $y \in N^n$. Так как для каждой точки из $M^n \backslash E$ существует локальная степень $\gamma(x) > 0$, то найдется окрестность $U(y)$ точки $y = F(x)$ такая, что $V(x) \subset M^n \backslash E$, $V(x)$ — компонента $F^{-1}(U)$ и $\gamma(V, F, y) > 0$. Тогда найдется компонента $V_1 \subset F^{-1}(U)$, для которой $\gamma(V_1 F, y) < 0, F(V_1) \supset y$, поскольку суммарная степень $\gamma(F^{-1}(U), F, y) = \gamma(M^n, F, y) = 0$. А так как для всех точек из $M^n \backslash E$ локальная степень больше нуля, то $V_1 \cap E = \varnothing$, и значит, существует точка $x_1 \in F^{-1}(F(x)), x_1 \in E$. Произвольность выбора точки x завершает доказательство теоремы.

Определение 6. Отображение $F\colon D^n \longrightarrow N^n$ назовем слабо нульмерным (слабо изолированным), если размерность прообраза $F^{-1}(y)$ каждой точки $y \in F(D)$ равна нулю (если каждая точка полного прообраза имеет окрестность, не содержащую других точек этого же прообраза).

Замечание 1. Теорема, аналогичная теореме 3, справедлива и для слабо нульмерных отображений.

Замечание 2. В отличие от однозначных отображений особое множество E в теореме 3 для слабо изолированных отображений может состоять из одной точки. Например, пусть отображение окружности (отрезка [0,1] с отождествленными крайними точками) на прямую задается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 9(x) + x,\ x \in (0,1), \\ [0,2],\ x = 0,1, \end{cases}$$

где $9(x)$ — канторова лестница.

Кстати, это пример слабо изолированного, но не нульмерного отображения.

Определение 7. Отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ называется собственным, если прообраз $F^{-1}(K)$ произвольного компакта $K \subset N^n$ компактен.

Определение 8. Отображение $F\colon D \longrightarrow N^n$ назовем открытым в точке x, если для произвольного открытого множества V, содержащего x, образ $F(x)$ принадлежит int F(V) по отношению к N^n.

Лемма 2. *Пусть $F\colon D \longrightarrow N^n$ ацикличное отображение и для фильтра открытых областей $\{U_i\}$ таких, что $U_{i+1} \subset U_i$ и $\bigcap\limits_i U_i = x$, имеем $\gamma(U_i, F, y) \neq 0,\ y \in F(x)$. Тогда F открыто в точке x.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторой открытой окрестности $V(x)$ точки x точка $y \in F(x)$ будет граничной для $W = F(V(x))$. Очевидно, что int $W \neq W$, поэтому $H^n(\overline{W}, \partial W) = 0$. Тривиальный гомоморфизм $F^*\colon H^n(\overline{W}, \partial W) \longrightarrow H^n(\overline{U}, \partial U)$ индуцирован отображением $F\colon \overline{U} \longrightarrow \overline{W}$, следовательно, $\gamma(U, F, y) = 0$. Равенство нулю выполняется и для всех $U_i \subset U$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4. *Пусть $F\colon D \longrightarrow D_1 \subset N^n$ — собственное отображение, D — область в M^n и $E \subset D$ — замкнутое подмножество такое, что для каждой точки $x \in E$ найдется последовательность точек $\{x_n\}$, которая сходится к x, $x_n \in D \backslash E$. В каждой точке открытого множества $D \backslash E$ существует локальная степень отображения $\gamma(x)$, причем $\gamma(x) > 0$ и $F(E) = F(D) = D_1$. Тогда в D_1 существует множество D_1' всюду второй категории (на D_1), для каждой точки y_0 которого найдется бесконечная последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in D \backslash E$ таких, что $F(x_n) = y_0$.*

Доказательство. Определим в D_1 множества F_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ всех точек y, каждой из которых соответствует не более чем p точек из $D \backslash E$. Так как F открыто в $D \backslash E$, то легко видеть, что дополнение к F_p открыто, т.е. F_p (p = 0, 1, 2, ...) замкнуто в D_1, при этом для $p > 1$ множество F даже компактно в D_1.

Очевидно, что имеют место включения $F_0 \subset F_1 \subset \ldots F_p \subset \ldots$.

Покажем теперь, что в наших условиях каждое из множеств E_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ нигде не плотно в $D_1 = F(D)$. Допустим, что F_p содержит некоторый открытый шар V и пусть $y_0 \in V$ — одна из точек допустимой "кратности" среди всех точек V; ей соответствует не более чем p точек $(k = 1, 2, \ldots, k_0;\ k_0 \leq p)$.

Далее, возьмем такие попарно непересекающиеся окрестности $U(x_k)$, замыкания которых принадлежат $D\backslash E$: образы этих замыканий суть замкнутые области V_k, содержащие точку y_0 строго внутри. Пересечение всех V_k содержит некоторую окрестность V' точки y_0 в силу конечности k.

Очевидно, удаляя замкнутые области $\overline{U}(x_k)$ из D, получим некоторую область D', содержащую компакт E и такую, что ни одна точка из $D'\backslash E$ не имеет образа внутри V'.

По теореме 3 для некоторой точки $x_0 \in E$ будем иметь: $F(x_k) \supset y_0$. Так как E нигде не плотно в $D' = D\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} \overline{U}(x_k)$, то существует последовательность $\{x_m\}$ точек $x_m \in D'\backslash E$, сходящихся к точке x_0 при $m \longrightarrow \infty$.

Начиная с некоторого m, все значения в силу полунепрерывности попадут внутрь окрестности V' точки $F(x_0) \supset y_0$, но это противоречит построению окрестности V'.

Значит, множество $K = \cup_p F_p$ есть множество первой категории в D_1 и следовательно, $D_1' = D_1 \backslash K = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} (K\backslash F_p)$ будет второй категории, которое, как легко видеть, обладает требуемым свойством.

Теорема 5. *(* **О продолжении** *). Пусть $F\colon D \longrightarrow D_1 \subset N^n$ — собственное нульмерное отображение причем $\gamma(x) > 0(\gamma(x) < 0)$ всюду в D, кроме, возможно, множества $E \subset D$ такого, что $F(D)\backslash F(E)$ всюду плотно в $F(D)$. Тогда отображение F является изолированным и открытым в D, причем $\gamma(x) > 0(\gamma(x) < 0)$ для всех $x \in D$.*

Доказательство. Пусть точка $x \in D$, выберем окрестность $U(y)$ точки $y \in F(x)$. Для каждой $U(y)$ в связной компоненте $V(x) \subset F^{-1}(U(y))$ содержится точка x_1 из $D\backslash E$. Для всех точек $x \in F^{-1}(y_1)$, где $y_1 \in F(D)\backslash F(E)$, существует локальная степень отображения. Не нарушая общности, предположим, что во всех точках множества $x \in F^{-1}(y_1)$ локальная степень положительна. Поэтому $\gamma(V(x), F, y) = \gamma(V(x_1), F, y_1) > 0$. Отсюда следует, что существует $\gamma(x) > 0$.

Теорема доказана.

Открытый вопрос. Пусть $F\colon D \longrightarrow N^n$ — нульмерное ациклическое многозначное отображение. Верно ли, что если множество точек взаимной однозначности D_1 плотно в D при $n \geq 2$, то обратное отображение F^{-1} — однозначное монотонное отображение?

Список литературы

[1] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. — Москва: Мир, 1966. — Т. 1. — 596 с.; Т. 2. — 624 с.

[2] *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

[3] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

[4] *Трохимчук Ю. Ю., Бондарь А. В.* О локальной степени нульмерного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. — К.: Наукова думка, 1969. — С. 221 – 241.

[5] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Інституту математики НАН України. — 2008. — **70**. — К.: Ин-т математики НАН Украины. — 539 с.

[6] *Зелинский Ю. Б.* О локальной степени для многозначных отображений // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1975. — №10. — С. 872 – 876.

[7] *Зелинский Ю. Б.* О непрерывных отображениях областей обобщенных многообразий // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Вып. 4. — К.: Наукова думка, 1973. — С. 79 – 91.